3

ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A L'ETRANGER

Réforme du système éducatif en Sarre

par Gabriel BORGER et Charles KRAUS, Moselle

Dans le cadre de la commission 3e/après 3e, Gabriel Borger a pris la responsabilité d'étudier la réforme du système éducatif en Sarre. Il a effectué ce travail avec Charles Kraus, membre de la commission 3e/après 3e de la départementale de la Moselle.

Nous pensons que ce document peut être le début d'une étude des enseignements de mathématique à l'étranger.

Depuis la rentrée 1976-77, l'enseignement secondaire en Sarre se remodèle.

Cette réforme touche plus particulièrement les niveaux 11, 12 et 13 qui correspondent à notre second cycle. Ces transformations modifient aussi bien la structure que les programmes.

Nous tenons à remercier tout spécialement M. Wolf, conseiller du Ministre de l'Education de la Sarre, M. Rixecker, président la section sarroise du "MNU" ("Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts"), en français "Association allemande pour la promotion de l'enseignement de la mathématique et des sciences", notre collègue Chantal Mandrier, sans lesquels ce travail aurait été impossible.

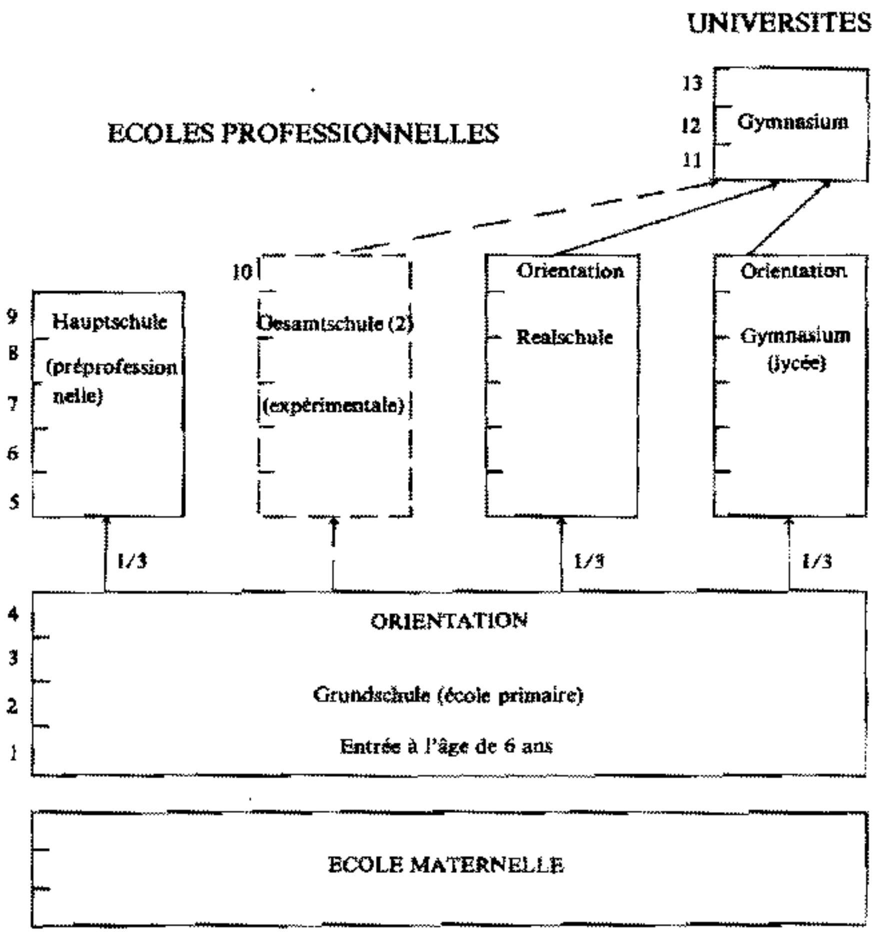
Il faut souligner que la réforme a commencé par toucher les niveaux 12 et 13 et que le premier baccalauréat nouvelle formule s'est déroulé d'une façon généralisée en 1979 après quelques essais antérieurs qui, dès 1970, ont été faits dans 3 écoles du pays (1).

L'emploi des calculatrices est obligatoire à partir du niveau 9, l'achat est à la charge des familles.

---

(1) Les collègues intéressés par les programmes de mathématiques des classes peuvent les demander à G. BORGER.

Présentation sommaire des structures scolaires



(2) Gesamtschule : - Très grande ressemblance avec le collège HABY.
Idée chère à la SPD mais très contestée par la CDU et la plupart des enseignants.
Un seul établissement en Sarre (Dillingen).

Structures du Second cycle en Sarre

1/ Organisation de l'enseignement (1er et 2d cycles)

Les disciplines enseignées dans les classes 5 à 10 (CM2 à 3e) sont divisées en

— disciplines fondamentales (allemand, mathématiques, langues vivantes)
— disciplines secondaires.

A partir du niveau 6, les matières fondamentales prennent un coefficient de plus en plus important d'une année à l'autre.

Quel que soit le type de lycée (langues mortes, langues vivantes, scientifique), les disciplines fondamentales et secondaires sont les mêmes pour tous les élèves. Il peut cependant exister une différenciation dans les langues.

Jusqu'au niveau 11 inclus, les élèves sont répartis par classes (système français). A partir du niveau 12 (2d cycle), il n'existe plus de classes. Toutes les disciplines sont enseignées sous deux formes :

— comme matière dite "normale"
— comme matière dite "à performance" ;

l'élève peut ainsi choisir sa spécialisation.

2/ Accès dans le second cycle

Il s'agit :

• des élèves de lycée orientés au niveau 11
• des élèves des "Realschulen" (Collèges) orientés au niveau 11.

Il est toutefois indispensable pour entrer dans le second cycle d'avoir suivi pendant le 1er cycle l'enseignement d'une seconde langue (vivante ou morte).

3/ Structures du second cycle

Il se compose des niveaux 11, 12, 13 découpés en 3 périodes qui étaient à l'origine :

• la phase introductive (Einführungsphase) 11/1
• la phase principale (Hauptphase) 11/2 ; 12/1 ; 12/2 ; 13/1
• le semestre consacré aux examens (Prüfungshalbjahr) 13/2.

Certaines difficultés éprouvées lors de la mise en application ont amené le ministère à réviser cette division de la manière suivante :

— phase introductive (la classe 11 en entier)
— phase principale (les semestres 12 à 13/2)

Cette modification est appliquée depuis l'été 1979.

Le semestre des examens s'en trouve reconverti en semestre d'enseignement normal, les examens étant rejetés aux tout derniers jours du semestre 13/2.

Mémoire sur l'enseignement des mathématiques dans les lycées Deutsche Mathematiker - Vereinigung

Printemps 1976

La D.M.V. attire officiellement l'attention sur l'insuffisance de la préparation en mathématique de la plupart des étudiants débutants. Dans un monde de plus en plus assujetti à l'emprise des mathématiques, l'incapacité à se tirer d'affaire face aux modes de pensée et méthodes mathématiques, surtout pour les élèves quittant l'école et qui n'entreprennent pas l'étude des mathématiques, s'avère fatale. De plus en plus les jeunes gens sont menacés par le danger d'échouer dans leur formation ou leur profession à cause d'une initiation aux mathématiques trop succincte. C'est pourquoi la D.M.V. propose avec ce mémoire des exemples de questions commentées qui doivent être posées à tout candidat au baccalauréat et qui concernent du même coup tous les élèves achevant leur scolarité. Cette base ne saurait être réduite. Aujourd'hui comme par le passé, il faut se donner d'autres buts à atteindre mais il ne faut pas pour autant négliger cette base sans laquelle ces visées seraient d'ailleurs inutiles et vaines.

La D.M.V. réclame que toutes les réformes et tous les changements de notre système éducatif respectent ce noyau. Il doit obligatoirement concerner chaque élève indépendamment du stade de réforme atteint par chaque catégorie d'école. D'autre part, la formation des maîtres doit rendre ceux-ci capables de présenter ces points essentiels de telle sorte que les principes vitaux et liens des mathématiques deviennent évidents. Cela nécessite pour les professeurs de mathématiques de toutes les catégories d'écoles une formation initiale et continue suffisamment vaste et surtout en mathématiques.

La D.M.V. espère que le mémoire sera perçu par toutes les instances concernées, institutions et personnalités, comme une participation effective au correctif indispensable de notre système éducatif. Il propose son aide pour sa réalisation.

Remarques fondamentales

Les différentes parties de ce mémoire ne peuvent être abordées indépendamment les unes des autres. Elles forment un tout. Dans ce premier paragraphe sont énoncés des points de vue et des aspects dont on devrait tenir compte en enseignant.

La D.M.V. se réjouit de voir qu'on enseigne les mathématiques en des termes plus clairs. Cependant la compréhension :

— des problèmes particuliers à un domaine
— des idées fondamentales et méthodes
— du contenu d'un théorème
— de l'idée fondamentale d'une démonstration

doit absolument garder la prépondérance sur "l'exactitude et la perfection formelles". De toutes façons, celles-ci sont limitées par le stade des connaissances acquises et la faculté de compréhension de l'élève. Les élèves doivent voir la nécessité d'une démonstration. C'est pourquoi il convient de se montrer réservé et prudent dans la démonstration de faits que les élèves ont perçus d'eux-mêmes, surtout si la démonstration en question doit faire appel à des termes techniques par trop confus. Cela est bien plus rentable pour les théorèmes pour lesquels elle facilite la compréhension de faits prouvés. La "plausibilité" est un moyen d'enseignement légitime, non seulement s'il s'agit de considérations heuristiques, mais aussi lorsque la justification et l'explication des faits ne sont que partielles. Naturellement, ces considérations de "plausibilité" doivent être énoncées en tant que telles. L'âge et le niveau des élèves serviront de critères pour déterminer jusqu'à quel point on expliquera ce "manque d'exactitude" et dans quelle mesure on fera comprendre qu'un théorème peut être démontré par d'autres procédés.

La tendance à vouloir baser le cours de mathématiques sur une assise concrète et précise a parfois eu pour effet que la théorie des ensembles et la logique sont devenues des sujets de cours en soi et qu'avant d'exposer et d'expliquer les contenus mathématiques, on s'est occupé de formalismes vides de sens. Ainsi, au lieu d'utiliser dans notre pédagogie les facultés de compréhension de l'élève, nous les ignorons. De telles erreurs peuvent faire échouer toute réforme judicieuse de l'esprit des mathématiques. La D.M.V. rejette tout cours qui traiterait la théorie des ensembles, la logique et l'algèbre de Boole indépendamment les uns des autres et réclame au contraire que soient traités dans ces trois rubriques les points essentiels et de première importance pour l'enseignement des mathématiques en général. Cela se fera à l'aide de données mathématiques concrètes et fera par la suite constamment l'objet de mises au point et d'exercices en rapport avec le niveau et l'âge de l'élève.

A ce stade, il importe de différencier clairement :

— le théorème et la définition
— l'hypothèse et l'affirmation
— les conditions nécessaires et suffisantes
— la négation d'assertions,

mais il n'est pas nécessaire d'isoler de façon formelle les règles de déduction employées concrètement et de développer à partir de cela la terminologie et l'écriture de la logique mathématique.

Il est bien plus important que l'élève sache s'exprimer clairement avec ses propres mots plutôt que de lui faire manipuler de façon mécanique des formules écrites ou parlées. Feront l'objet de cours de mathématiques uniquement des faits susceptibles :

— d'être étayés avec suffisamment d'exemples
— de jouer un rôle important dans le déroulement ultérieur du cours
— de contribuer largement à la compréhension du programme.

Qu'on ne se méprenne pas sur le sens du terme "modernisation" des mathématiques. Il ne s'agit pas d'introduire dans le programme des concepts et données mathématiques issus du domaine proprement scientifique si leur efficicacité n'est pas évidente.

On ne devrait introduire dans le cours des expressions et dénominations nouvelles que si elles sont susceptibles à la longue d'apporter une simplification de la terminologie. Il faut combatte cette tendance à introduire constamment des concepts et dénominations qui sont parfaitement inutiles et menacent d'étouffer le contenu mathématique (ceci est valable pour les expressions issues du langage technique spécifique comme pour celles qui ne sont guère utilisées qu'à l'école). Les auteurs, éditeurs et critiques de manuels scolaires devraient, avant d'introduire des concepts nouveaux, vérifier dans quelle mesure ils seront réutilisés et s'ils facilitent la compréhension. Il est cependant judicieux et indispensable d'employer le langage mathématique spécifique, donc, aussi, le vocabulaire de la théorie des ensembles, partout où celui-ci permet de formuler des données mathématiques avec plus de clarté et de précision que ne le permettrait le langage courant.

Travailler sur des structures mathématiques abstraites ne sert pas seulement à ordonner la multitude des objets et résultats mathématiques, mais sert aussi à livrer de nouvelles connaissances qui permettraient de résoudre des problèmes concrets ; le cours devrait faire découvrir cet aspect-là aussi aux élèves. Chaque fois que l'on traite de faits mathématiques concrets, il faudrait s'attacher à mettre en relief les connexions structurales sans qu'il soit nécessaire auparavant de traiter de façon explicite la structure abstraite de base (exemple : espace vectoriel). Ce faisant, les élèves confrontés à de nouvelles formulations de problèmes sont amenés à redécouvrir des structures déjà connues et à appliquer des méthodes qui leur sont familières. C'est la seule base qui permette de comprendre qu'il est utile de traiter des structures mathématiques abstraites. En outre, le fait de reconnaître et d'utiliser des relations structurales est plus ambitieux que de se servir de démonstations formulées à la manière d'axiomes. Car, la plupart du temps, les conclusions que l'on peut tirer des axiomes sont restreintes et banales et ne jettent que rarement plus de lumière sur les exemples familiers. En travaillant sur les relations structurales et en les exploitant au niveau des problèmes mathématiques concrets, on met en évidence des relations indirectes entre les différents domaines mathématiques. Cela est indispensable si l'on ne veut pas réduire la mathématique à la simple addition de parties isolées.

Cette compréhension ne peut être atteinte que si l'on maîtrise parfaitement à chaque niveau, les techniques et les méthodes vues dans les classes antérieures. Le manque d'assurance dans les calculs met souvent l'élève dans l'impossibilité de suivre un raisonnement mathématique nouveau ou d'employer des méthodes mathématiques nouvelles ; un élève qui n'a pas assimilé et ne maîtrise pas les inéquations et la notion de valeur absolue se heurtera en analyse à des difficultés inutiles et ne parviendra pas à acquérir des connaissances solides dans ce domaine.

Il faut absolument veiller à ce que les élèves ne fassent pas l'expérience des mathématiques sous la forme exclusive des mathématiques "pures", mais qu'ils développent leur compréhension pour les diverses possibilités d'application. Les questions innombrables issues de ces domaines d'application peuvent constituer une approche judicieuse de la théorie mathématique. Il faut aussi montrer l'efficacité des méthodes mathématiques dans des problèmes extérieurs aux mathématiques. C'est faire fausse route que de réduire les mathématiques à l'école à un système de déductions formelles et de démonstrations exactes, que de s'imaginer devoir créer de nouvelles matières telles que "la mathématique appliquée" ou l'informatique pour traiter le système numérique et les algorithmes.

Eu égard à la grande importance des procédés stochastiques dans les problèmes de décision ou dans l'exploitation des faits observés, la D.M.V. salue l'introduction dans les écoles du calcul des probabilités et de la statistique en tant que matières. Il faudrait s'efforcer de faire comprendre aux élèves les possibilités et les limites des procédés stochastiques et d'en faire le propos du cours. La D.M.V. pense qu'il est indispensable d'introduire la stochastique ainsi conçue au cœur même de l'enseignement des mathématiques aussitôt que la formation initiale et continue des maîtres, les investigations des spécialistes et didacticiens ainsi que des expériences suffisantes rendront la chose possible.

Connaissances, aptitudes et capacités que l'on attend de tout candidat au baccalauréat.

Avertissement :

Il serait fort regrettable que cette énumération de connaissances, aptitudes et capacités nous conduise à penser que l'enseignement des mathématiques puisse se limiter à l'apprentissage de ces notions de manière isolée. Par contre, il faut les développer à partir de problèmes variés en faisant apparaître leurs interactions.

1) *Techniques numériques*

— Fractions, pourcentages
— Nombres décimaux, approximations décimales
— Puissances entières et fractionnaires

— Utilisation des calculettes, règle à calcul, tableaux.
— Maîtrise des ordres de grandeur, ordre de grandeur du résultat d'une opération....

2) *Equations et inéquations élémentaires*

— Résolution de systèmes d'équations linéaires à 2 ou 3 inconnues

— Equations du type $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$, $s = \frac{1}{2} gt^2$

— Equations du second degré
— Factorisation d'un polynome du second degré, étude de son signe
— "Addition et multiplication" d'inéquations
— Valeur absolue ($a^2 < 25 \Leftrightarrow |a| < 5 \Leftrightarrow -5 < a < 5$)

— Estimations (exemple : $2 < \sqrt[3]{16} < 3$ car $8 < 16 < 27$)

3) *Représentations graphiques - Graphes*

Les techniques de calcul et méthodes de résolution doivent être mises en évidence.

Il est très utile d'introduire très tôt et de manière qualitative des notions telles que sens de variation, direction asymptotique, asymptote, limite, périodicité et sans faire appel à l'analyse.

Sensibilisation avec les inéquations et les valeurs absolues (polygone des solutions d'un système d'inéquations...)

4) *Connaissances de base en géométrie*

Avertissement : un des objectifs prioritaires de l'enseignement des mathématiques est l'initiation à la démonstration. Pour cela, il n'est pas nécessaire de faire appel à une présentation axiomatique des mathématiques. Savoir minimum en géométrie à l'issue du premier cycle :

— Isométries du plan (translation, rotation, symétrie)
— Cas d'égalité des triangles
— Théorème de Pythagore ; distances
— Homothéties, triangles semblables
— Sinus. Cosinus
— Périmètres. Volumes.

5) *"Capacités formelles" (calcul littéral)*

Un élève du second cycle ne devrait plus être ralenti par des difficultés en calcul littéral.

En plus des identités élémentaires, un bachelier doit pouvoir démontrer et utiliser dans les deux sens les formules suivantes :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{(dérivation de } x \mapsto x^3\text{)}$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)a^n \left(1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

Utilisation de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ si a est nettement plus grand que b dans des calculs approchés ($1{,}03^2 \approx 1{,}06$ donc $\sqrt{1{,}06} \approx 1{,}03$)

Savoir utiliser $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ sous la forme :

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \quad \text{(dérivation de } x \mapsto \sqrt{x}\text{)}$$

Les propriétés élémentaires des fonctions exponentielle, logarithme et trigonométriques doivent être familières, par exemple :

$a^{x+y} = a^x a^y$

$x < y \Rightarrow a^x < a^y$ pour $a > 1$

$\log x + \log y = \log (xy)$

$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Dans l'étude des fonctions ci-dessus, il n'est pas nécessaire de démontrer tous les théorèmes ; une justification avec des arguments de "plausibilité" est suffisante et légitime.

6) *Algèbre linéaire et géométrie*

La résolution d'un système d'équations linéaires est une technique de base que tout bachelier doit maîtriser.

Les combinaisons jouent un rôle décisif dans toutes les applications de l'algèbre linéaire ; elles doivent déjà être abordées dans l'étude des équations (comme introduction du concept d'espace vectoriel). Dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, il est indispensable de traiter leur interprétation géométrique parce que la description analytique de l'espace représente un des objectifs de l'enseignement d'une part, et d'autre part pour donner une représentation intuitive de l'ensemble des solutions. Il va de soi que l'interprétation géométrique du vecteur revêt une importance fondamentale, que celle-ci permet une meilleure compréhension du calcul vectoriel ; toutefois, il ne faudra pas se limiter à cette illustration géométrique. La "relation" entre théorème de Pythagore et espace métrique doit être maîtrisée.

L'élève doit pouvoir se servir de la linéarité du produit scalaire et de son interprétation géométrique dans la résolution des problèmes métriques. Il doit savoir que l'application $(x,y) \mapsto (ax,by)$ envoie le cercle unité sur l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. On doit faire apparaître les relations entre géométrie et analyse.

7) *Analyse*

L'objectif principal du calcul différentiel est d'introduire la notion de dérivée et de clarifier les rapports entre une fonction et sa dérivée. Cela ne signifie pas que l'on doive obligatoirement faire appel au calcul différentiel dans l'étude graphique de fonctions simples

$$\{ \; x \mapsto (x-a)^2 + b \;,\; x \mapsto mx + \frac{1}{x} \;,\; x \mapsto \sqrt{1+x} \;, \ldots \} \;;$$

au contraire les fonctions doivent être connues bien avant l'introduction du calcul différentiel pour qu'on puisse à partir d'elles expliquer "la relation" entre f et f'. La définition de la dérivée est liée très étroitement à la notion de limite. Pour les fonctions simples, des considérations élémentaires conduisent à la notion de tangente, qui donne une image intuitive de la notion de limite.

La méthode de Newton appliquée à ces fonctions simples démontre l'utilité des tangentes et de leurs propriétés d'approximation (aspect numérique, image intuitive de la notion de limite).

L'élève doit maîtriser les propriétés de la dérivation (linéarité, dérivée de fonctions composées, produit, quotient), la dérivation des fonctions rationnelles ainsi que des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, sin, cos, exp, ln .

On ne demande pas les démonstrations de tous ces énoncés, mais par contre on montrera leur application dans les problèmes de géométrie, de physique et d'économie.

Les fondements du calcul intégral font partie également du noyau de l'enseignement des mathématiques. On doit faire apparaître à tout bachelier la relation entre primitive et aire.

*

* *

Les contenus présentés ci-dessus ne peuvent pas être remplacés ni refusés. Ils sont en grande partie classiques ; toutefois ils ne peuvent être démodés, par contre la manière de les présenter peut le devenir. Les réflexions ici présentées évitent que l'exigence de la "disponibilité" permanente de connaissances élémentaires ne conduise à un entraînement insensé.

L'enseignement ne manque pas de rigueur si tout n'est pas démontré, et il n'est pas nécessairement non scientifique s'il montre que les mathématiques sont utiles et intéressantes.

Les demandes ici présentées ne sont pas satisfaites, bien que certaines directives en fassent mention.

Pour concrétiser nos propositions, il faut repenser l'école, les manuels scolaires et donner une meilleure formation initiale et continue aux enseignants.