Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs

par François LÉONARD, Catherine GRISVARD, Laboratoire de Psychologie Expérimentale et Comparée de l'Université de Nice(1)

La numération décimale constitue une base essentielle pour le calcul et la mesure puisque c'est notre système d'écriture des nombres. Or on sait qu'elle n'est pas acquise sans difficultés puisque, introduite dès le CM1, elle pose encore des problèmes en quatrième et au-delà.

Nous présentons ici les résultats d'un sondage préliminaire sur le nombre décimal qui voudrait ouvrir des directions de recherches plus précises à différents niveaux de la scolarité et aborder dans la même optique les problèmes posés par les opérations sur les décimaux. L'analyse de ces résultats s'inscrit dans le cadre des études des aspects fonctionnels des acquisitions auxquels l'Ecole de Genève s'intéresse actuellement.

Au vu des résultats, nous avons pu faire l'hypothèse que les réponses fausses, et sans doute beaucoup de réponses exactes, provenaient de l'application d'une règle qui peut être décomposée en deux sous-règles :
— un algorithme de comparaison des entiers ;
— la distinction entre les chiffres avant et après la virgule.

(1) Ce travail doit beaucoup aux contacts qui ont pu être établis avec des enseignants du secondaire et de l'école élémentaire, à travers la collaboration de notre laboratoire et de l'IREM de Nice. Plusieurs idées de cette étude sont dues à M. Mérigot, directeur de l'IREM de Nice.

La composition de ces deux sous-règles se traduit par l'application successive du même algorithme aux chiffres qui se trouvent avant et après la virgule. C'est ce que nous avons appelé la *règle I* (2).

Nous avons aussi signalé une *seconde règle*, hélas contradictoire avec la première le plus souvent, qui amorce le décompte du nombre de décimales et qui pourrait permettre de passer à un algorithme correct.

La *règle I* montre une absence de compréhension de la nature de l'écriture décimale, bien qu'elle tienne compte de la virgule, mais — et ceci nous paraît fondamental du point de vue pédagogique — *cette règle produit souvent de bonnes réponses*. De ce fait, l'élève qui l'utilise sera parfois complimenté pour son résultat. Comme cette règle marche à tous les coups pour la partie entière, et qu'il y a heureusement beaucoup de nombres qui diffèrent dès ce niveau, l'élève qui applique cette règle, fausse, tombe juste le plus souvent. Pourquoi en changerait-il ?

La seconde règle que nous avons cru pouvoir distinguer semble être appliquée au hasard. Mais pour le nombre de décimales, que concerne cette règle, on n'a pas le renforcement systématique de la partie entière comme pour la première. Il est fort possible que l'élève ait en moyenne une chance sur deux de tomber juste avec cette règle fausse, et que la fréquence avec laquelle il l'applique manifeste une adaptation correcte à cette fréquence de réussite.

Les erreurs ne sont donc pas dues au hasard ; elles correspondent à une organisation cognitive, à une certaine « compréhension » des décimaux. Cette « compréhension » des décimaux est assez précoce puisqu'elle est déjà visible au CM 1. Nous verrons qu'elle est aussi assez stable, puisque des étudiants l'utilisent encore trois ans après le baccalauréat.

Le problème

Nous avons simplement demandé à des élèves de quatrième d'ordonner dix nombres décimaux. Ces nombres étaient les suivants (écrits dans cet ordre au tableau) :

11,98	12,4	12	11,898	11,09
12,04	12,1	12,113	11,8	12,001

Ils avaient été choisis en fonction d'une idée « intuitive » des difficultés qu'ils pouvaient présenter ; pour aller plus loin, il faudrait faire un nouveau choix en tenant compte des résultats obtenus ici.

Pour commencer à étudier les effets éventuels d'une pratique extrascolaire, nous avons aussi utilisé ces dix nombres en précisant qu'il s'agissait de poids (kg) soit sous la forme __,__ kg (par exemple : 11,98 kg) soit sous forme __ kg __ (par exemple 11 kg 98), ou qu'il s'agissait de longueurs (mètres) sous les deux mêmes formes (11,98 m ou 11 m 98).

(2) D'autres recherches, en particulier celles de l'équipe de G. Brousseau à Bordeaux, semblent confirmer cette hypothèse.

L'introduction des unités n'était pas prévue au début de l'expérience et s'est faite dans un deuxième temps.

Population

134 élèves de classes de quatrième, d'âge moyen 13 ans 9 mois. Écart-type : 7 mois. Deux classes (44 élèves en tout) ont reçu le problème sur les nombres, deux classes l'ont reçu sous la forme poids (22 sous la première forme, 22 sous la seconde) et deux classes ont reçu le problème sous la forme longueur (23 sous chaque forme).

RÉSULTATS

Les réussites :

Pour l'ensemble des sujets (134), les résultats sont les suivants :

Aucune erreur : 82 (61 %)
Une erreur ou plus : 52 (39 %)

Les 52 copies erronées comportent en tout 130 erreurs.

On voit que le nombre décimal est loin d'être acquis parfaitement en classe de quatrième ! (3)

Un modèle d'analyse des erreurs :

Aucun élève n'a fait d'erreur sur la partie entière des nombres ; seule la partie décimale fait l'objet de cette étude.

Les chiffres après la virgule offrent deux types d'indice : le *nombre de ces chiffres* et l'*« entier » qu'ils composent* : ainsi 11,898 a trois chiffres après la virgule et ces chiffres composent l'« entier » 898.

---

(3) A titre de comparaison, avec les réserves méthodologiques qui s'imposent, voici les résultats d'un sondage effectué au CM 1 : les 19 élèves devaient ordonner les deux termes de quatre couples de nombres décimaux. Il y a 30 réponses justes (39 %) et 46 réponses fausses (61 %).
Travail IREM-CRDP, avril 1979, Bastia.
Voir aussi Enquête INRP, 1977, CM 2 : Enquête sur l'enseignement mathématique à l'école élémentaire. Unité de recherche mathématique élémentaire INRP. Tome 1 : Comportement des élèves.
Sur une série de huit nombres décimaux, le quart des élèves (26 %) ordonne correctement les huits nombres. 74 % ordonnent correctement les nombres d'après leurs parties entières. Plus du tiers des enfants (37 %) donne une série où les nombres ayant même partie entière sont ordonnés d'après le nombre de chiffres de leur partie décimale.

Si on considère un couple de nombres décimaux selon ces indices, ils peuvent avoir le même nombre de chiffres après la virgule ou non, et ces chiffres peuvent composer des entiers égaux ou non. Ces différents cas seront notés de la façon suivante :

Décimales : + (le second nombre a plus de décimales)
= (le second nombre a autant de décimales)
– (le second nombre a moins de décimales)

Entier : + (l'entier que composent les décimales du second nombre est plus grand)
= (les entiers composés par les décimales sont égaux)
– (l'entier que composent les décimales du second nombre est plus petit).

On aurait évidemment pu donner ces notations par rapport au premier nombre. Les différentes combinaisons des modalités des indices « décimales » et « entier » sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1

Décimales

Entier		+	=	–
	+	1	2	3
	=	4	5	6
	–	7	8	9

Le numéro situé à l'intersection de la ligne + et de la colonne – exprime que le second nombre a un « entier » plus grand et un nombre de décimales plus petit ; c'est le cas n° 3 auquel appartient le couple (12,001 ; 12,4). De même le cas n° 8 correspond à un couple tel que (11,98 ; 11,09) où le second nombre a un entier plus petit et autant de décimales.

La combinaison 5 correspond à l'égalité des deux nombres. Les huit autres cas peuvent être réduits à quatre si on convient de remplacer « plus grand » par « moins grand » lorsqu'on inverse les termes du couple de nombres. Les cas se correspondent : 1 avec 9 ; 2 avec 8 ; 3 avec 7 et 4 avec 6.

A partir de ces indices, on peut se donner deux « règles » pour décider quel est le nombre le plus grand dans le couple :

Règle 1 : le nombre qui a le plus grand « entier » est le plus grand.
exemple : 12,113 > 12,4 car 113 > 4

Règle 2 : le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit.
exemple : 12,04 < 12,4

Les deux règles ci-dessus constituent des algorithmes partiels de comparaison de deux nombres décimaux. Comme on le verra plus loin en détail, ces deux règles suffisent pour donner une réponse exacte dans presque tous les cas. Néanmoins, pour avoir un algorithme correct, il est nécessaire d'ajouter une troisième règle :

Règle 3 : égaliser le nombre de décimales

La règle 3 enlève alors toute raison d'être à la règle 2 et, combinée seule à la règle 1, fournit un algorithme complet.

Avant de regarder dans quelle mesure ces règles permettent d'organiser les réponses, il convient de souligner plusieurs points remarquables.

Parmi les huit cas décrits au tableau 1 où il y a inégalité, la règle 1 est applicable dans six cas : les cas 1, 2, 3, 7, 8, 9 ; dans les cas 2-8 et 3-7 cette règle 1 appliquée isolément donne un résultat exact ; *exemples* :

cas 2 : 12,001 et 12,113 ; l'application de la règle donne 12,113 > 12,001

cas 3 : 12,001 et 12,04 ; l'application de la règle donne 12,04 > 12,001 ;

en intervertissant les éléments du couple le cas 2 devient le cas 8 et le cas 3 devient le cas 7.

De même la règle 2 est applicable dans les six cas 1, 3, 4, 6, 7, 9 et on peut voir comme plus haut que dans les cas 3-7 et 4-6 cette règle appliquée seule donne un résultat exact.

Les exemples ci-dessus ne sont que des exemples mais on peut trouver en annexe la démonstration mathématique correcte.

Tableau 2

Accord et désaccord des résultats fournis par les deux règles

Règle 1

Entier \ Décimales	+	=	−
+	<	<	<
=	*	=	*
−	>	>	>

Règle 2

Entier \ Décimales	+	=	−
+	>	*	<
=	>	=	<
−	>	*	<

Le signe < signifie que le premier élément du couple est inférieur au deuxième, le signe > signifie que le premier élément du couple est supérieur au deuxième, le signe * signifie que dans ce cas la règle considérée ne s'applique pas.

On voit que les deux règles sont en accord dans les cas 3-7, qu'elles sont indépendantes dans les cas 2-8 et 4-6 et qu'elles sont en désaccord dans les cas 1-9. Or, et ceci est remarquable, lorsqu'elles sont en accord, *elles donnent une réponse correcte* ; lorsqu'elles sont indépendantes, la règle qui joue *donne une réponse correcte*. Lorsqu'elles sont en désaccord, *chacunes des réponses est correcte dans certains cas* et fausse dans d'autres.

Les deux règles donnant des résultats contraires dans les cas 1-9, l'application de l'une constitue la négation de l'autre.

L'organisation des réponses

Comme nous cherchons ici à comprendre les réponses des élèves, nous ne considérerons d'abord que les réponses erronées. En effet, on peut toujours penser que les réponses justes ont été données en fonction d'une analyse *correcte* du problème qui ne nous apporte aucune information nouvelle.

Sur les 130 réponses erronées, 80 (62 %) sont conformes à la *règle 1*, 21 (16 %) sont conformes à la *règle 2* et 29 (22 %) ne sont pas conformes à ces règles. 78 % des réponses fausses sont donc conformes à une de ces deux règles fausses et l'application de la *règle 1* domine nettement celle de la *règle 2*.

Une réponse peut correspondre à l'affirmation ou à la négation de l'une, de l'autre ou des deux règles, ce qui donne huit possibilités :
1 et 2, 1 et $\overline{2}$, $\overline{1}$ et $\overline{2}$, $\overline{1}$ et 2, 1, $\overline{1}$, 2, $\overline{2}$, en notant 1 l'affirmation de la règle 1, $\overline{1}$ sa négation, 2 l'affirmation de la règle 2 et $\overline{2}$ sa négation.

Sur ces huit possibilités, cinq seulement donnent des réponses fausses. Les dix nombres utilisés ne donnaient pas une équi-répartition de ces différentes possibilités. Dans le tableau 3 nous indiquons pour chacune de ces possibilités le nombre de couples du sondage qui y correspondent, ce qui permet de comparer le nombre de réponses fausses obtenues aux effectifs théoriques correspondant à une répartition équiprobable des réponses fausses entre tous les couples.

Tableau 3

Possibilité	Nombre de couples	Effectifs théoriques	Nombre de réponses	Moyennes
1 et $\overline{2}$	6	37	80	13,33
$\overline{1}$ et 2	8	50	21	2,63
$\overline{1}$ et $\overline{2}$	2	12	15	7,50
$\overline{1}$ seule	3	19	3	1,00
$\overline{2}$ seule	2	12	11	5,50

Malgré l'interdépendance des différentes règles, les résultats peuvent s'interpréter comme une application systématique de la règle 1 et un refus de sa non-application. Par contre, la règle 2 semble être aussi souvent niée qu'affirmée. Remarquons d'autre part que *toutes* les réponses *justes* peuvent être interprétées comme des applications de l'une ou l'autre de ces règles ou des deux. Il est fort possible qu'une partie de ces réponses soit due à ces règles et non à une compréhension correcte du système décimal.

Si nous appliquons la même analyse aux résultats des 19 élèves de CM 1 que nous avons cités, nous obtenons des résultats analogues.

Les quatre couples de nombres étaient les suivants :

Tableau 4

		Réponses justes	Réponses fausses
1	35,07 et 35,7	9 (47 %)	10 (53 %)
2	12,49 et 124,9	16 (84 %)	3 (16 %)
3	15,743 et 15,685	15 (79 %)	4 (21 %)
4	24,9 et 24,174	6 (32 %)	13 (68 %)

Le couple 2 compare deux décimaux de parties entières différentes ; il obtient le meilleur score ; trois élèves de CM 1 se trompent là où aucun élève de 4^e ne le fait.

La réponse juste pour le couple 3 est conforme à la règle 1, le résultat est équivalent à la comparaison d'entiers.

La réponse fausse pour le couple 4 est conforme à la règle 1 et on obtient le résultat inverse du précédent avec une force analogue.

Le couple 1 correspond à la règle 2 seule, la réponse juste est conforme à la règle 2, la réponse fausse ne lui est pas conforme ; on obtient l'égalité des scores que nous avons trouvée avec nos élèves de 4^e.

Nous retrouvons donc très précisément les résultats précédents ; cette concordance suggère que les élèves de CM 1 utilisent ces règles mais une étude plus fine reste à faire. Inversement, nous avons constaté qu'il reste des traces de ces règles chez les étudiants.

Les nombres que nous avions utilisés en quatrième ont été proposés à des étudiants de 3^e année de psychologie. On leur a aussi demandé de les ordonner. A la différence des élèves de 4^e, on a demandé aux étudiants d'effectuer cette tâche *le plus rapidement possible*. Ils ont ordonné les dix nombres en moins d'une minute (minimum 30 s, maximum 60 s). Cependant le temps était libre. Les résultats sont les suivants :

Tableau 5

Répartition des réponses des étudiants

Nombre de réponses	67	
Nombre de *copies* sans erreur	40	60 %
Idem, mais oubli d'un nombre	7	10 %
Une erreur ou plus	20	30 %
Nombre d'erreurs	27	

Répartition des erreurs selon les différents cas

Cas	Nombre d'erreurs	Effectifs théoriques (4)
1-9	24	18
2-8 3-7 4-6	3	9

Sur ces 27 réponses, 24 correspondent à l'application d'une règle (cas 1-9). Dans les autres cas, l'application d'une des deux règles donnerait une réponse juste.

Les oublis ne se répartissent vraisemblablement pas au hasard : sur 7 oublis on a :

11,898 : 3 fois
12,113 : 3 fois
12,04 : 1 fois

Ces oublis sont le fait de six personnes, une d'elles ayant oublié à la fois 11,898 et 12,113. Ce sont justement ces nombres qui conduisent le plus souvent à une réponse fausse conforme à la règle 1.

Bien que ces résultats, tant à l'école élémentaire qu'en faculté, demandent à être confirmés (5), ils montrent l'importance de la règle 1. Celle-ci peut parfaitement s'expliquer par le fait que c'est la même règle qui sert à la comparaison des entiers. Les élèves appliquent successivement la même règle avant et après la virgule. En résumé, cela revient à dire que les élèves utilisent une procédure de comparaison des décimaux qui se contente de répliquer celle qu'ils utilisent pour les entiers.

Explications par les élèves des réponses données :

Les explications de réponses que nous avons demandées à quelques élèves vont dans le sens de cette interprétation. Pour les deux classes qui ont reçu le questionnaire sous la forme de nombres, sans unité, nous

(4) Le nombre de cas de chaque sorte n'étant pas égal, on peut comparer ces chiffres à une répartition aléatoire équiprobable pour les différents cas. $\chi_1^2 = 6$, alpha inférieur à .02.

(5) Un travail de R. Guillermart (IREM de Nice) vient de confirmer l'existence des deux règles.

Elle demandait d'ordonner les 3 nombres : 3,6 3,583 et 3,57. Il y avait 31 réponses fausses sur 74 en sixième, 10 sur 42 en cinquième, 9 sur 74 en quatrième, 3 sur 13 en C.P.P.N. (203 élèves en tout). Une seule de ces réponses ne correspond pas aux deux règles ; les autres se répartissent comme suit :

règle 1 : 77 %, 80 %, 67 %, 100 % ;
règle 2 : 23 %, 20 %, 33 % et 0 %,

respectivement pour les classes de sixième, cinquième, quatrième et C.P.P.N.

avions demandé des justifications écrites des réponses. Ces justifications peuvent être classées en quatre groupes :

A : celles qui soulignent, sans plus, la distinction entre les chiffres avant et après la virgule ;

A + B : celles qui ajoutent à cette distinction qu'il faut prendre les chiffres dans l'ordre ou qui égalisent d'abord le nombre de chiffres après la virgule, ou qui précisent la comparaison par puissances de 10 ;

NR : les non-réponses ;

Autres : les réponses qui n'entrent pas dans ces catégories.

La répartition des réponses dans ces quatre catégories diffère nettement selon qu'il s'agit d'élèves qui n'ont pas fait d'erreur ou d'élèves qui ont fait au moins une erreur.

Tableau 6

	Pas d'erreur	Une erreur ou plus	Total
	28 élèves	16 élèves	44 élèves
A	13 (46 %)	12 (76 %)	25 (57 %)
A + B	11 (39 %)	0	11 (25 %)
NR	1 (4 %)	2 (12 %)	3 (7 %)
Autres	3 (11 %)	2 (12 %)	5 (11 %)

Les élèves qui se trompent ne précisent pas dans quel sens ils entendent la distinction entre chiffres avant et après la virgule. On peut penser qu'ils se contentent de réutiliser après la virgule l'algorithme (règle 1) qu'ils ont utilisé avant la virgule. Les élèves qui ne se trompent pas précisent le sens correct de cette distinction (pour 39 %). Restent 17 élèves qui ne se trompent pas et ne disent pas pourquoi. Il n'y a finalement que 25 % des élèves qui ont donné des réponses correctes et des justifications correctes.

Les effets de la nature des mesures

Le fait de préciser l'unité (kilogramme ou mètre) ne change apparemment pas la nature de l'épreuve, le nombre d'erreurs est du même ordre.

Tableau 7

	Nombres	Kilogrammmes			Mètres		
		-,- kg	-kg-	total	-,-m	-m-	total
Nombre de copies sans erreur	28	15	11	26	15	13	28
%	.64	.69	.50	.59	.66	.57	.61
Effectif total	44	22	22	44	23	23	46
Nombre de copies à une erreur ou plus	16	7	11	18	8	10	18
Nombre total d'erreurs	32	16	35	51	23	24	47

On peut craindre que les effets des différences entre les classes ne soient supérieurs aux éventuels effets des contenus de problème posé.

Néanmoins, lorsqu'on examine les erreurs selon qu'elles sont commises dans tel ou tel groupe de situations, on voit un phénomène apparaître. Les erreurs peuvent être communes aux trois situations principales ou à deux d'entre elles ou propres à l'une d'elles. Nous présentons ici ce regroupement.

Tableau 8

Communes aux trois situations	80
Communes aux nombres et aux mètres	6
Communes aux nombres et aux kilos	2
Communes aux kilos et aux mètres	29
Propres aux nombres	6
Propres aux kilos	6
Propres aux mètres	1

On voit que, si la majorité des 130 erreurs est commune aux trois situations (62 %), un nombre non négligeable est commun aux kilogrammes et aux mètres (22 %). Le seul trait commun que nous ayons trouvé à ces erreurs est la présence presque constante d'un ou de plusieurs zéros dans les nombres comparés. En regroupant toutes les erreurs selon qu'elles concernent des nombres avec zéro ou non, on fait apparaître ce phénomène.

Tableau 9

Nombre moyen d'erreurs selon qu'il y a ou non des zéros

	Nombres	Kilogrammes	Mètres
Avec zéro	0,13	0,59	0,59
Sans zéro	0,59	0,57	0,44
Total	0,72	1,16	1,03

La très légère infériorité des réponses pour les nombres dont la nature de l'unité était précisée semble entièrement due à la présence des zéros ; par contre, lorsqu'ils sont absents, on ne voit plus de différences entre les situations.

Ce résultat reste analogue lorsqu'on distingue les deux modes d'écriture envisagés.

Tableau 10

Nombre moyen d'erreurs selon le mode d'écriture

	Nombres	-,- kg	-kg-	-,- m	-m-
Avec zéro	0,13	0,36	0,82	0,61	0,57
Sans zéro	0,59	0,36	0,77	0,39	0,48
Total	0,72	0,72	1,59	1,00	1,04

Mais ces analyses concernent de trop petits effectifs et mêlent les effets des variables expérimentales à ceux des différences entre les classes ; aussi il ne convient pas de les interpréter plus avant. Une nouvelle expérience mêlant les situations au hasard dans un plus grand nombre de classes permettra seule de dire si ces effets existent ou non.

En guise de conclusion

Les résultats de ce sondage montrent à l'évidence que des enfants de 13 ans et demi, en quatrième, ne maîtrisent pas les décimaux (non entiers). Comme il s'agissait simplement de les ordonner, on peut penser que des opérations plus complexes (soustractions, multiplications) présentent encore plus de difficultés, mais cela n'est pas certain ; les élèves peuvent très bien maîtriser un algorithme isolé pour une certaine opération et échouer sur d'autres points. Ainsi 84 % des élèves de CM 1 que nous avons cités réussissent à multiplier un nombre décimal non entier par 10, mais 38 % seulement parviennent à le multiplier par 100 ou 1000.

Ces difficultés, pour une notion aussi essentielle, justifient à elles seules une poursuite de ce travail, mais les décimaux offrent peut-être un intérêt supplémentaire. La notion de nombre paraît se constituer presque nécessairement, cette construction s'exprimant dans le nombre entier (cardinal ou ordinal) que nous utilisons constamment, ainsi que certains nombres fractionnaires. Par contre, on peut penser que les nombres décimaux ne sont pas utilisés comme tels dans la vie courante. Les différents systèmes d'unités nous permettent en effet d'éviter de manipuler la virgule : on passe des francs aux centimes, des kilogrammes aux grammes, des mètres aux centimètres ou aux millimètres. Les nombres décimaux pourraient constituer un acquis plus spécifiquement scolaire, moins dépendant des pratiques extra-scolaires, ou de l'ontogenèse, que d'autres notions mathématiques simples.

Ce « codage » des naturels que sont pour beaucoup les décimaux dans leur présentation actuelle à l'école serait géré scolairement par des règles du type de celles que nous avons dégagées et inutilisé dans la vie courante.

On voit alors se dégager deux axes de recherche :
— la présentation des décimaux pour en faire une nécessité, axe déjà abordé par plusieurs équipes (cf. bibliographie) ;
— le problème de la mise en place, à l'école élémentaire, de règles « fausses », pour essayer d'en comprendre les raisons et d'enrayer leur installation.

Annexe

Nous donnons ici pour les quatre cas considérés dans l'article la démonstration générale des résultats de la comparaison de deux décimaux positifs.

Nous supposons que les parties entières des décimaux X et Y sont égales et nous pouvons donc les prendre nulles, ce qui revient à poser :

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i.10^{-i} \qquad \text{et} \qquad Y = \sum_{j=1}^{p} y_j.10^{-j}$$

les entiers x_i et y_j vérifiant $0 \leqslant x_i \leqslant 9$ et $0 \leqslant y_j \leqslant 9$

On supposera que x_n et y_p ne sont pas nuls afin que le nombre de décimales de X soit exactement n et celui de Y soit p.

L'« entier » au sens où nous l'avons utilisé est, pour le décimal X,

$$x = 10^n.X \quad \text{,et, pour Y,} \quad y = 10^p.Y$$

d'où

$$X = 10^{-n}.x \quad \text{et} \quad Y = 10^{-p}.y$$

Exemple :
$X = 0,23 = 2.10^{-1} + 3.10^{-2}$ et $x = 23 = 2.10^{1} + 3.10^{0} = 10^{2}.X$

Cas 2-8
(Plaçons-nous dans le cas 2) (cf Tableaux 1 et 2)

$$n = p \; ; \; y > x$$

La règle 2 ne s'applique pas et la règle 1 entraîne $Y > X$; démonstration :
On a $y > x$ donc $10^{-n}.y > 10^{-n}.x$ soit $Y > X$

Cas 3-7
(Plaçons-nous dans le cas 3)

$$p < n \; ; \; y > x$$

Les règles 1 et 2 sont en accord et donnent $Y > X$; démonstration :
On a $p < n$ donc $-p > -n$ et $10^{-p} > 10^{-n}$
d'où, avec $y > x$, $10^{-p}.y > 10^{-n}.x$, soit $Y > X$.

Cas 4-6
(Plaçons-nous dans le cas 4)

$$y = x \; ; \; p > n$$

La règle 1 ne s'applique pas, la règle 2 entraîne $Y < X$; démonstration :
On a $p > n$ donc $-p < -n$ et $10^{-p} < 10^{-n}$
d'où $y.10^{-p} < x.10^{-n}$ soit $Y < X$.

Cas 1-9
(Plaçons-nous dans le cas 1)

Il y a ici contradiction entre les deux règles, qui se retrouve sur le plan mathématique, et il est impossible de conclure. En effet

$$y > x \; ; \; p > n \quad \text{donc} \quad -p < -n \quad \text{et} \quad 10^{-p} < 10^{-n}$$

d'où

$$Y = 10^{-p}.y > 10^{-p}.x$$

mais

$$10^{-p}.x < 10^{-n}.x = X$$

On remarque que les deux conclusions sont effectivement possibles :

$$y > x, \; p > n \quad \text{et} \quad Y > X : \quad 0,37 > 0,3$$
$$y > x, \; p > n \quad \text{et} \quad Y < X : \quad 0,08 < 0,3$$

Bibliographie provisoire

A la suite de notre travail expérimental, nous avons commencé une recherche bibliographique sur les travaux consacrés aux décimaux. On trouvera ici un premier recensement, classé selon l'année de publication et le lieu où on peut se procurer ces travaux. Nous remercions par avance les lecteurs qui voudraient bien nous communiquer les références d'autres travaux sur ce sujet.

Grenoble 1973. *Bulletin de Mathématiques, n° 1*, C.R.D.P., Les nombres à virgule, Neyret, p. 45-58.

Grenoble 1974. *Bulletin de Mathématiques, n° 2*, C.R.D.P., idem, p. 7-15.

Bordeaux 1976. IREM, *Enseignement Élémentaire des Mathématiques, n° 17*, Quelques étapes dans la construction des décimaux au CM.

Rouen 1977. IREM, Les nombres décimaux au CM, groupe de réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'École primaire.

Rouen 1977. IREM, *Le grenier mathématique*, Les nombres décimaux.

Bordeaux 1977. IREM, Compte rendu et analyse des travaux sur la numération, Quelques notes pour une épistémologie des décimaux, Brousseau.

Bordeaux 1978. IREM, *Enseignement élémentaire des mathématiques, n° 18*, pp. 163-166, Problèmes dans la construction du concept de décimal, Brousseau.

Nantes 1978. IREM, *Nanta-Iremica n° 21*, Les nombres décimaux, p. 15-40.

Grenoble 1979. CNDP-IREM, *Grand N n° 17*, Sur quelques thèmes fondamentaux à l'école élémentaire, Décimaux, R. Neyret, p. 5-20

Grenoble 1979. CNDP-IREM, *Grand N n° 18*, A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen, C. Comiti & R. Neyret, p. 5-20

Rouen 1979 IREM, Introduction du calcul décimal et du système métrique dans la région de Rouen pendant la Révolution.

Nice 1980. IREM, Aides pédagogiques pour les maîtres du cycle moyen, Fractions et décimaux, p. 99-119.

1980. *Recherche en didactique des mathématiques, 1980, 1.1*, Brousseau, Problèmes de l'enseignement des décimaux, p. 11-59.

Paris VII. Approche des réels en situation scolaire : axiomatisation, Régine Douady, IREM.