Bulletin de l'APMEP n°331 - Décembre 1981

2
ECHANGES

Langage, synonymie et démonstration

par Francis REYNES, Lycée d'application de l'E.N.S., Dakar

Si l'on se réfère à la hiérarchie des "stades" établie par Jean Piaget, on peut constater que le premier cycle de l'enseignement secondaire correspond approximativement au passage du "stade opératoire concret" au "stade opératoire formel", le premier étant marqué par une dépendance de la pensée vis-à-vis des contenus auxquels elle s'applique, le second étant caractérisé par l'accession au concept et au raisonnement hypothético-déductif. D'autre part, les "structures cognitives" dégagées étant des structures mathématiques (en particulier *treillis* et *groupe* pour le stade formel), on est ainsi facilement amené à penser que, presque "par essence", l'activité mathématique constitue un facteur — ou à tout le moins un catalyseur — privilégié pour effectuer ce "passage du concret à l'abstrait".

Certaines conditions doivent toutefois être remplies, et dont le non-respect est probablement la cause fondamentale de bien des "blocages" ou "refus" :

L'enseignement ne doit pas **imposer** des structures que l'intelligence doit **construire par elle-même**, car c'est, sinon, refuser à cette dernière la possibilité de fonctionner et de se développer normalement.

L'enseignement ne devrait donc surtout pas imposer des concepts hors de portée de la capacité d'assimilation des élèves, car c'est, sinon, le processus même d'élaboration de ces concepts qui sera perturbé, ce qui va plus loin et a des conséquences plus graves que la simple incompréhension locale et momentanée.

D'autre part, le rôle du **langage** devrait être précisé avec plus de clarté et d'insistance : au cours du développement de l'intelligence il prend en effet une importance qui croît, pourrait-on dire, de zéro à l'infini...

"Le langage joue un rôle particulièrement important car, contrairement aux autres instruments sémiotiques qui sont construits par l'individu au fur et à mesure des besoins, le langage est déjà tout élaboré socialement et contient d'avance, à l'usage des individus qui l'apprennent, un ensemble d'instruments cognitifs au service de la pensée." (J. Piaget, B. Inhelder : La psychologie de l'enfant).

Il me semble indispensable de préciser un peu cette **variation du rôle du langage** entre le "stade concret" et le "stade formel" :

"Les mêmes difficultés que l'enfant de 7-8 à 11-12 ans rencontre lorsqu'il s'agit de raisonner formellement ou "abstraitement", il les ignore dès qu'il lui est possible de raisonner concrètement sur des objets offerts à son action." (J. Piaget : Le jugement et le raisonnement chez l'enfant).

"Ce n'est pas la possession de certaines expressions qui structure l'opération, ni leur absence qui empêche sa constitution ; les expressions s'acquièrent et leur emploi devient fonctionnel selon un processus semblable au mode de structuration de l'opération elle-même, à savoir par un jeu de décentrations et de coordinations. L'apport du langage est à chercher sur un autre plan : il peut diriger l'attention sur les facteurs pertinents d'un problème, tout comme il peut diriger les activités perceptives. De cette façon le langage peut préparer l'opération mais il n'est ni suffisant ni nécessaire à la constitution des opérations concrètes." (H. Sinclair : Acquisition du langage et développement de la pensée).

"Le langage transmet à l'individu un système tout préparé de notions, de relations, de classifications, bref un potentiel inépuisable de concepts qui se reconstruisent en chaque individu sur le modèle multiséculaire ayant déjà façonné les générations antérieures. Mais il va de soi que, à cette collection, l'enfant commence par emprunter seulement ce qui lui convient, en ignorant superbement tout ce qui dépasse son niveau mental. Et encore ce qu'il emprunte est-il assimilé selon sa structure intellectuelle." (J. Piaget : La psychologie de l'intelligence).

"Le langage une fois acquis ne suffit nullement à assurer la transmission de structures opératoires toutes faites que l'enfant recevrait ainsi du dehors par contrainte linguistique." (J. Piaget : Problèmes de psychologie génétique).

"Il est absurde (voir dangereux) d'enseigner à des enfants qui n'ont pas les structures mentales qui leur permettraient de les appliquer à des contenus, des langages "vides". Ceci induit en effet des comportements langagiers qui peuvent donner l'illusion d'un accès à des comportements d'un niveau supérieur et qui ne sont, en fait, que des comportements de perroquets." (F. Jaulin-Mannoni : Recherche sur les fondements d'une pédagogie authentique).

"Les opérations propositionnelles qui se constituent de 11-12 ans à 14-15 ans sont alors manifestement plus liées à l'exercice de la communication verbale et l'on voit mal comment elles se développeraient ou plutôt comment elles achèveraient leur développement sans l'emploi du langage." (J. Piaget : Problèmes de psychologie génétique).

Ainsi, une mauvaise appréciation du rôle du langage et de l'évolution de ce rôle favorise l'apparition de deux erreurs concomitantes — et qui sont, je le crains, trop souvent commises dans notre enseignement (primaire puis secondaire) :

1) Lui accorder trop de place au début (stade concret), c'est-à-dire faire passer un apprentissage verbal avant un apprentissage opératoire.

2) Ne pas lui accorder une attention suffisante ensuite (stade formel), au moment où il doit devenir le support privilégié de la pensée.

L'enseignement tel que nous le pratiquons dans le secondaire se fait fondamentalement par la médiation d'un langage (oral ou écrit). Il ne saurait donc prétendre à quelque efficacité que dans la mesure où le langage utilisé constituera pour les élèves non plus un handicap mais un véritable instrument. En ce qui concerne plus particulièrement l'enseignement des mathématiques, une certaine maîtrise du langage mathématique semble donc un objectif assez prioritaire, et prérequis pour toute activité qui veuille éviter de devenir un "comportement de perroquet" (Corriger des copies de Bac permet de se faire très vite une idée des progrès qui restent à accomplir en ce domaine...). Plus précisément encore, et comme il a été relevé au début, le premier cycle paraît être l'intervalle intermédiaire et crucial où doit s'effectuer le fameux "saut dans l'abstraction". Pour un professeur de mathématique, cela se manifeste par la possibilité qui lui est (enfin) accordée de faire des démonstrations et... de tenter d'en faire faire...

Démonstration... Mot mystérieux et magique pour ces élèves qui en découvrent soudain les vertus (quand c'est le prof qui les fait) et les vices... quand ce sont eux qui s'y collettent... Notion clef pour tout professeur.

Lorsqu'on pense *"démonstration"*, c'est d'ordinaire l'idée de *"déduction"*, la notion d'*"enchaînement logique"* ou le concept d'*implication* qui viennent assez spontanément et "naturellement" à l'esprit. Et l'enseignement de la mathématique aurait la noble tâche de promouvoir et de développer la structuration logique de la pensée... Les ennuis surgissent dès que l'on commence à essayer de mettre en pratique ce généreux mais épineux projet : après un certain nombre de constatations amères — sinon désabusées —, on en arrive plus ou moins vite mais pratiquement à coup sûr à un énoncé du genre : *"Faire une démonstration ? Mais ça ne s'apprend pas !"* Conclusion ou postulat ? Découverte ou décret ?...

Il est certes banal de constater, lorsqu'on suit des élèves d'une année à la suivante, que tel concept qui posait auparavant des problèmes majeurs, sinon insurmontables, "passe" alors avec une facilité déconcertante. Et l'on est bien incapable d'expliquer un aussi radical changement... Assurément, et surtout dans les "petites classes", l'aspect sous lequel est présenté un concept mathématique joue un rôle important, parfois même déterminant ; mais aussi astucieux ou génial pédagogue que l'on soit, il y a des choses que l'on ne pourra jamais faire assimiler à un élève de sixième ou de cinquième : la maturation est évidemment une condition nécessaire, les travaux de Piaget et de ses collaborateurs sont assez éloquents...

Mais même si l'on se pique d'épistémologie génétique (attention à l'overdose) on ajoutera que Jean Piaget donne de très fines descriptions des capacités — réelles ou virtuelles — à tel ou tel de ses "stades", établit une filiation chronologique de structures cognitives, mais qu'en ce qui concerne les mécanismes d'acquisition, le schéma "assimilation-accommodation", l'"équilibration progressive" ou la "réversibilité opératoire" constituent à coup sûr de très séduisants modèles théoriques mais ne nous renseignent guère, dans la pratique, sur les facteurs qui font que *"le passage du "concret" à l'"abstrait" n'est pas tant un problème pédagogique qu'un problème épistémologique fondamental."* (J. Deveze).

Et n'a-t-on pas déjà assez entendu que *"les liaisons logiques ne s'enseignent pas, elles se découvrent"* (C. Hug : L'enfant et la Mathématique) et que l'*"on ne saurait communiquer à quelqu'un quelque chose qu'il ne doit pas recevoir mais construire"* (F. Jaulin-Mannoni : Pédagogie des structures logiques élémentaires) ?

Que faire, alors ? En revenir à la "bosse" ? Certes non ! Mais ne pas perdre son temps, comme des alchimistes, à chercher une ... "pierre mathématiquale", une formule magique qui ouvrirait l'entendement de nos élèves aux rigueurs de la logique.

Cela pour dire que je me limiterai donc ici à quelques réflexions seulement susceptibles d'améliorer quelque peu le rendement de nos efforts, et pour expliquer et justifier le fait que j'abandonnerai le terrain de la *déduction logique*, qui reste pour moi beaucoup trop mouvant et en friche, au profit de celui de l'**équivalence logique** — que j'appellerai "**synonymie**", comme je le fais avec mes élèves de premier cycle — qui me paraît beaucoup plus accessible et fertile, et ce d'autant mieux que je ne suis pas du tout persuadé que ce qui bloque les élèves soit un problème de *déduction*. Je crois que la question est plus vaste et dépasse en fait le champ mathématique (et le champ de l'école...) car elle est : comment utiliser efficacement ses connaissances ? Comment s'y prendre pour que ce que l'on sait serve à quelque chose ? Et je crois que, là, le professeur de mathématique peut jouer un rôle assez privilégié : n'avons-nous pas trop souvent remarqué que trop d'élèves "ne savent pas appliquer les définitions", "ne savent pas utiliser les théorèmes" ? Il ne serait donc pas tant question d'une faiblesse de la déduction logique en tant que telle que d'une difficulté à la mettre en situation de servir. A coup sûr un problème de **méthode**. Et peut-être davantage une question de **forme** que de fond.

Et l'occasion pour moi d'enfourcher une fois de plus mon cheval favori en affirmant qu'il y a encore ici, à la base, un problème de **langage**, de **traduction**, d'où l'importance de la **synonymie**.

Donner des noms et attribuer des qualificatifs à des objets constitue une activité primordiale, en mathématique comme ailleurs. A ce sujet, je me permettrai de rappeler deux évidences :

α) *Il faut* **nommer** *les objets pour pouvoir en parler.*

β) *Il ne faut pas donner le même nom à deux objets.*

Ces deux lapalissades feront sans doute sourire le lecteur "averti" et il aura tort : car l'élève, lui, n'a quasiment jamais été averti, et un bon nombre d'erreurs proviennent de la non-observation de ces deux règles élémentaires.

Enoncer une définition, cela peut être baptiser d'un certain nom un certain objet jouissant de certaines propriétés qui, du coup, ("*par définition*", précisément), le caractérisent. Par exemple une relation est appelée "injection" si...

Enoncer une définition, cela peut être également **donner un sens à** une certaine locution, à un *"lien verbal"* (être inclus dans, être parallèle à,...).

Dans un cas comme dans l'autre on utilise une synonymie, et cette utilisation devrait être systématiquement explicitée car elle conditionne la future bonne utilisation de la définition, elle met en évidence l'aspect "opératoire" des définitions mathématiques qui réside en ceci que toute définition contient — et souvent impose — une méthode à employer pour prouver qu'un objet possède la propriété qu'elle énonce. On peut remarquer qu'il s'agit davantage ici de *vérification* que de *démonstration* au sens "noble" du terme. Quoi qu'il en soit, **dans bien des situations on n'a pas le choix :**

Pour prouver qu'une application f est injective, on ne peut pas faire autrement que commencer par écrire : *soient a et b tels que $f(a) = f(b)$.*

Pour prouver qu'un ensemble X est inclus dans un ensemble Y, on ne peut pas faire autrement que commencer par écrire : *soit* $e \in X$.

Pour commencer de telles vérifications il n'y a, à proprement parler, pas à réfléchir, encore moins à hésiter. J'insiste sur ce point : dans de telles situations on doit littéralement agir par réflexe conditionné : cela fait gagner du temps et épargne de la fatigue... Et lorsqu'on parle d'objectifs d'acquisition on devrait associer indissolublement l'intégration de ces réflexes à l'apprentissage des définitions, le rôle du professeur étant alors de révéler le lien de nécessité logique qui lie la définition à la méthode de vérification.

Proposez l'exercice suivant en fin de seconde ou début de première :

Soit f une application de E vers H ; soient A et B deux parties de E.

Démontrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

Vous constaterez sans doute, comme je l'ai fait à maintes reprises, que la plupart des élèves commencent par écrire : *soit* $x \in A$.

Pourquoi ?!...

Peut-être parce qu'"on" leur a répété que, pour faire une démonstration, il fallait partir de l'hypothèse pour aboutir à la conclusion, et non l'inverse.

Or, en fin de seconde, l'élève "standard" sait faire la distinction : il voit clairement que l'hypothèse, ici, c'est : $A \subset B$. Alors il part... Mais il ne sait pas où il va !... Car il ne sait pas se poser les bonnes questions.

Il faut, effectivement, faire deux "tas" bien distincts : d'un côté tout ce que l'on sait ; de l'autre **la question**. Lorsqu'on dit "question", on attend en général (et à bon droit) un point d'interrogation. Force est de constater qu'il n'y en a pratiquement jamais dans les énoncés... Alors il faut apprendre à en mettre : il faut apprendre à retourner tous les *"démontrer que"* comme des chaussettes pour leur faire cracher leurs points d'interrogation !

1) **Je sais que** *: f est une application de E vers H ; $A \subset E$; $B \subset E$; $A \subset B$*

2) **Alors, quelle est la question que je me pose ?**

Car la question amène, sinon la réponse, au moins la méthode : en effet, à partir du moment où je me suis demandé : *est-ce que $f(A) \subset f(B)$?* je n'ai, comme on l'a vu, plus le choix : j'écris "sans réfléchir" : *soit $u \in f(A)$*. J'ai réfléchi avant, pour me poser la bonne question, et je vais réfléchir après, pour essayer de faire avancer la vérification, **sachant que** la cible que je vise, la conclusion à laquelle je veux aboutir, est : *$u \in f(B)$*.

La définition de l'inclusion ne pourra valablement être considérée comme assimilée, opérationnelle, que lorsqu'auront été acquis : 1) l'aptitude à poser la question adéquate ; 2) le réflexe d'écrire ipso facto la phrase de départ ; 3) la capacité de dégager clairement le but à atteindre.

On pourra facilement me faire remarquer qu'avec un tel critère je jugerai sans doute bien peu de définitions correctement assimilées, et je répondrai sans hésiter : oui ! et c'est bien là où le bât blesse !

Alors comment faciliter l'acquisition de ces réflexes conditionnant le bon démarrage d'une démonstration ? Essentiellement, je crois, en insistant sur les synonymies : que veut dire *"f est injective"* ? Que signifie "$M \subset K$" ? Et ainsi de suite, sans trêve... Savoir de quoi on parle, être capable d'expliquer — c'est-à-dire de remplacer une formulation par une autre qui recouvre le même sens — me semble primordial. Et ce n'est pas en seconde ni en quatrième qu'il faut commencer de telles activités, mais bien en sixième (cf. "Mathématique et langage formel" et "Langage mathématique et Logique") car elles sont à la fois fondamentales et parfaitement réalisables à ce niveau. Il me paraît tout aussi regrettable et nuisible de ne pas utiliser des concepts qui sont à la portée des élèves qu'il est ridicule et dangereux de tenter de leur en faire ingurgiter qui dépassent leurs possibilités.

En première approximation, on peut dire que la synonymie est aux phrases ce que l'égalité est aux désignations d'objets : deux phrases seront dites synonymes lorsqu'elles ont le même sens, lorsqu'elles traduisent la même idée, lorsqu'elles décrivent une même situation. Une telle formulation, assurément floue et pas rigoureuse, est pourtant parfaitement acceptable (et acceptée) en sixième pourvu que l'on donne suffisamment d'exemples "bien choisis", et elle se révèle d'une utilité remarquable et fortement croissante au fil des mois en même temps que (ou parce que), les exemples devenant de plus en plus nombreux, le concept se précise et s'affine.

L'utilisation de la synonymie est évidemment à rapprocher de celle de l'égalité, quoique leurs domaines respectifs soient à disjoindre sans la moindre ambiguïté. En effet, de même que l'on peut toujours remplacer une écriture par une écriture égale, par exemple pour conduire un algorithme, de même, pour développer un raisonnement, on peut toujours remplacer une phrase par une phrase synonyme : "ça ne change rien", "ça dit toujours la même chose", oui, mais ça le dit d'une autre manière, et c'est précisément ce **changement de forme** qui débloque la situation.

Pour s'en rendre compte, analysons un peu la démonstration de l'exercice proposé précédemment : ayant acquis les bons réflexes, on a donc écrit sans hésiter : *soit* $u \in f(A)$. **Bien ; et maintenant ?** Maintenant (et sans cesse) il faut : 1) se demander : qu'est-ce que cela veut dire ? 2) Avoir (et garder) dans sa ligne de mire la cible à atteindre : $u \in f(B)$. Pour pouvoir répondre à la question du 1) il est évidemment indispensable de savoir les définitions, de connaître la signification des écritures que l'on rencontre et emploie. Que désigne l'écriture $f(A)$? — *L'image de A par f.* — Mais encore ? — *L'ensemble des images des éléments de A par f.* — Alors que veut dire : $u \in f(A)$? — *Que u est l'image par f d'un élément de A.* — C'est-à-dire ? — *Il y a un élément de A, que je vais appeler "t", dont l'image par f est u.* — Traduction en langage mathématique ? — $\exists t \in A,\ f(t) = u$. **OUF !...** Certes ; mais il fallait absolument en arriver à ce "t" pour pouvoir faire évoluer les choses (nécessité de nommer...) :

$t \in A$ *et* $A \subset B$ *donc* .....
$t \in B$ *donc* $f(t) \in$ .....
$f(t) \in f(B)$ *et* $f(t) = u$ *donc* .....

DEUX REMARQUES

1°) La fameuse Hypothèse ($A \subset B$) est intervenue assez discrètement, et il a fallu lui préparer très soigneusement le terrain pour qu'elle puisse jouer son rôle ; elle ne peut pas s'insérer dans n'importe quelle configuration.

En fait, la formulation *"démontrer que si* $A \subset B$ *alors* $f(A) \subset f(B)$*"* semble privilégier abusivement l'hypothèse "$A \subset B$", qui n'est en fait **qu'une des** hypothèses : il est patent de constater que, dans la démonstration, on utilise bien d'autres ressources, en particulier une propriété qui n'est aucunement suggérée par l'énoncé : la substituion par égalité, qui permet de conclure.

2°) Les **déductions** qui sont faites ici sont à la portée de l'élève "standard" de quatrième : ce n'est donc certainement pas là que réside la difficulté de la démonstration...

Analysons de même un deuxième exemple "classique" : *f et g désignant deux applications telles que $g \circ f$ soit définie, démontrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.*

Beaucoup trop d'élèves compromettent irrémédiablement leur démonstration en... partant de l'hypothèse, c'est-à-dire en écrivant : $g \circ f(x) = g \circ f(u)$.

Or, **la question** étant "évidemment" de savoir si f est injective, le réflexe associé doit donc être d'écrire : *soient x et u tels que $f(x)=f(u)$*, et la cible visée : $x=u$. **Et après ?** Comme on l'a déjà vu, le problème est alors : comment se servir de ce que l'on sait ? Or ce que l'on sait concerne $g \circ f$: il faut donc se débrouiller pour faire intervenir $g \circ f$! C'est (une fois de plus...) un concept "élémentaire" qui permet d'effectuer le pas décisif : l'égalité et sa propriété fondamentale de substitution — élémentaire, mais dont l'utilisation ici est rendue un peu plus difficile par la plus grande complexité de l'écriture et de la situation : $a = b$ donc $g(a)=g(b)$ et ici il faut en plus remplacer a par $f(x)$ et b par $f(u)$... (cf. la notion de "décalage vertical" chez Piaget).

$$f(x) = f(u) \quad \text{donc} \quad g[f(x)] = \ldots$$

Il faut bien sûr savoir que, par définition, $g[f(x)] = g \circ f(x)$.

Alors, et alors seulement, on peut utiliser le fait que $g \circ f$ est injective, ce qui permet de conclure du même coup.

MEMES REMARQUES QUE POUR L'EXERCICE PRECEDENT...

Je donnerai plus rapidement un troisième exemple pour illustrer la deuxième lapalissade énoncée plus haut en β) :

f désignant une application injective et A et B deux parties de son ensemble de départ, démontrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Réflexe : *soit* $y \in f(A) \cap f(B)$

Cible : $y \in f(A \cap B)$

1ère traduction (définition de $\cap$) : $y \in f(A)$ *et* $y \in f(B)$

2ème traduction : cf. plus haut **mais attention** ! Il faut traduire que *"y a un antécédent dans A et y a un antécédent dans B"* ; or, à ce stade rien ne permet de croire que ce soit le même : dans le doute, il est donc nécessaire de leur donner deux noms différents (disons : x et u), d'autant plus que :
1) on a toujours le droit de donner plusieurs noms à un même objet ;
2) c'est précisément cela qui va permettre de faire fonctionner le fait que f est injective :

$\exists\, x \in A,\ y = f(x)$ *et* $\exists u \in B,\ y = f(u)$

$y = f(x)$ *et* $y = f(u)$ *donc* .....

$f(x) = f(u)$ *et* f *est injective donc* ....

$x = u$ *et* $u \in B$ *donc* ....

$x \in A$ *et* $x \in B$ *donc ....*
$x \in A \cap B$ *donc* $f(x) \in ....$
$y = f(x)$ *et* $f(x) \in f(A \cap B)$ *donc ....*

REMARQUE COMPLEMENTAIRE

Cette séquence de déductions fait apparaître encore plus clairement que les deux précédentes une **méthode de progression** : le résultat obtenu à la fin d'une ligne est repris à la ligne suivante où son association avec une autre propriété permet de déduire un autre résultat qui est à son tour repris à la ligne suivante et associé à une propriété, etc.

Par sa relative longueur, elle nous prouve encore que les difficultés ne sont pas d'ordre logique (il est facile de compléter ce qui doit venir après chaque *"donc"*), mais résident 1°) dans le choix des propriétés à faire intervenir ; 2°) dans la manière d'associer propriétés "extérieures" et résultats intermédiaires, pour trouver en même temps la "bonne" conjonction et la juste place où elle doit s'insérer dans la séquence.

La difficulté d'une démonstration semble souvent proportionnelle à la "distance" qui sépare de la cible visée : plus cette distance est grande et plus nombreuses seront les étapes nécessaires pour la franchir, plus nombreux seront les théorèmes auxquels il faudra faire appel, plus complexes seront les combinaisons à effectuer et l'ordre dans lequel elles devront être rangées, plus étendu devra être le champ d'attention et de mémoire pour la prise en compte de toutes les données, la réactivation de connaissances qui peuvent être utiles, le choix des propriétés à utiliser effectivement (car il ne suffit pas de pouvoir se remémorer suffisamment de résultats ayant un rapport avec la situation : encore faut-il être capable de trier ceux qui pourront servir).

Ne pas "perdre le fil" dans un tel dédale n'est pas tellement facile et, une fois encore, ce n'est pas un hasard si Piaget révèle l'importance de la **combinatoire** dans l'accession au stade formel : être capable d'envisager tous les cas, toutes les combinaisons possibles, de discriminer les paramètres pertinents, suppose une intelligence fermement structurée.

Et la méthode à suivre n'est pas toujours aussi aisée à mettre en évidence que lorsqu'il s'agit d'opérer une vérification. On s'en aperçoit en particulier en géométrie, qui n'est pas sans raison considérée comme le terrain de prédilection pour la floraison de "belles" démonstrations et... le dépistage d'élèves "doués"...

Cependant les considérations développées précédemment restent valables, et si l'on ne peut sans doute pas apprendre à avoir de l'intuition, on peut quand même apprendre à trouver des points de repère, apprendre un peu à "voir" au même titre que s'éduque et se développe toute forme de perception.

Avant tout, une bonne agilité mentale sera nécessaire. Plus que jamais, la maîtrise de la synonymie apparaîtra indispensable : un exemple "élémentaire" pourra facilement en convaincre : toutes les phrases suivantes sont synonymes :

(A,B,C,D) est un parallélogramme (propre ou aplati)
(A,B) est équipollent à (D,C)
(A,D) est équipollent à (B,C)
(A,C) et (B,D) ont même milieu
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$
$t_{\overrightarrow{AD}}(B) = C$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

La liste n'est pas exhaustive ...

On comprend que certains élèves paniquent un peu devant de semblables avalanches : on n'apprend pas du jour au lendemain à "jongler" avec tous ces concepts.

Pour terminer, analysons donc un peu un exemple géométrique :

On donne un point A et un vecteur $\vec{U}$.

On demande d'étudier et de reconnaître l'application $t_{\vec{U}} \circ S_A$.

($t_{\vec{U}}$: translation de vecteur $\vec{U}$; S_A : symétrie par rapport à A)

On a là un "problème ouvert" : la réponse à trouver n'est pas fournie par l'énoncé. La première étape sera donc une phase de recherche, de "bricolage", c'est-à-dire de dessin : on va "prendre au hasard" quelques points M, N, P ..., construire leurs images M', N', P', ..., et ... regarder s'il se présente quelque chose de particulier, de "remarquable", comme on dit souvent dans ces cas-là...

Ces constructions permettront de vérifier la bonne assimilation des "prérequis", ici : définitions de la symétrie centrale, de la translation, de la composée de deux applications. L'intérêt d'un dessin soigné se manifestera par le fait que seule la précision des constructions permettra de remarquer que les segments [MM'], [NN']... semblent concourants. Faire une ou deux constructions supplémentaires renforcera la conviction que ce n'est pas là un hasard.

La question se posera alors de déterminer ce point de concours. Ce doit être un point *fixe*, c'est-à-dire dépendant **uniquement** des *constantes* de la situation : les données A et $\vec{U}$. Il conviendra d'attirer l'attention des élèves sur ce fait car la recherche et l'utilisation d'*invariants* est fréquemment utile en géométrie : il faut être capable de se débrouiller avec ce que l'on a ! Or, ici, on ne dispose que de A et de $\vec{U}$.

L'utilisation de cas particuliers fournit souvent de précieuses indications. Déjà, au niveau de la représentation de $\vec{U}$, il semble tout indiqué, dans un souci de simplification, de choisir le représentant d'origine A, disons (A,B). Notons immédiatement que, A et $\vec{U}$ étant "fixés", B aussi est "fixe". Ensuite il est facile de constater puis de prouver que l'image de A est égale à B :

$$S_A(A) = A \qquad \text{et} \qquad t_{\vec{AB}}(A) = B \qquad \text{donc} \qquad t_{\vec{U}} \circ S_A(A) = B$$

Alors il faut **voir**... Et à ce niveau il est bien évident que l'on n'a pas de recette-panacée pour "apprendre à voir" : seule une fréquentation suffisante de situations de recherche, de bricolages, de tâtonnements, sera en mesure d'aiguiser la perception, l'"intuition"... Donc, il faut voir :

1) que tous les segments [MM′] se coupent au milieu de (A,B) ;
2) que ce milieu de (A,B), disons I, est lui aussi un point "fixe" ;
3) que I semble bien être également le milieu de tous les segments [MM′] ;
4) que s'il en est bien ainsi cela se **traduit** par $M' = S_I(M)$.

On est alors induit à formuler la **conjecture** : $t_{\vec{U}} \circ S_A = S_I$.

Pour **démontrer** que cette conjecture est vraie, une fois encore on n'a pas le choix : la définition de l'égalité de deux applications impose le premier pas : soit M un point quelconque, soit $M' = t_{\vec{U}} \circ S_A(M)$.

Question : Est-ce que $M' = S_I(M)$?

Il conviendra peut-être ici de refaire une figure comportant uniquement les éléments indispensables : A, I, M, $S_A(M)$, $t_{\vec{U}}[S_A(M)]$. Notons que B peut être utile (cf. première démonstration) mais n'est pas indispensable (cf. deuxième démonstration).

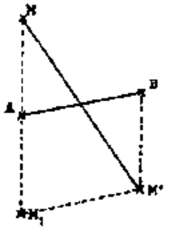
PREMIERE METHODE : utilisation de B défini par $\vec{AB} = \vec{U}$

1) Traduction des hypothèses

Utilisation des **définitions** :

$M_1 = S_A(M) \Leftrightarrow A = \text{milieu de } (M,M_1)$

$M' = t_{\vec{AB}}(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'} = \vec{AB}$



2) Utilisation de synonymies

$A = \text{milieu de } (M,M_1) \Leftrightarrow \vec{MA} = \overrightarrow{AM_1}$

$\overrightarrow{M_1M'} = \vec{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{BM'}$

La difficulté essentielle consiste ici à trouver les "bonnes" synonymies, c'est-à-dire celles qui vont permettre d'enchaîner :

3) Déduction

$$\vec{MA} = \overrightarrow{AM_1} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{BM'} \qquad \text{donc} \qquad \vec{MA} = \overrightarrow{BM'}$$

4) Utilisation de synonymies

$\vec{MA} = \overrightarrow{BM'} \Leftrightarrow$ (M,A,M′,B) est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ (M,M′) et (A,B) ont même milieu.

5) Dénomination du milieu de (A,B)

Soit I = milieu de (A,B) . Alors :
1°) I est fixe car il ne dépend que de A et de B.
2°) *Déduction* : I = milieu de (M,M').

6) Conclusion

Par définition I = milieu de (M,M') $\Leftrightarrow$ $M' = S_I(M)$.

DEUXIEME METHODE

1) Traduction des hypothèses
A = milieu de (M,M_1) et $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{U}$

2) Soit I = milieu de (M,M')

3) Déduction par utilisation d'un théorème

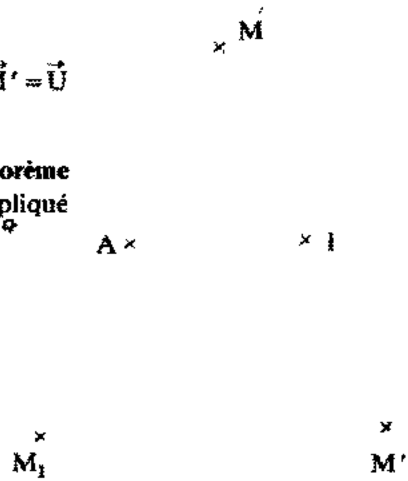
Le "théorème des milieux" appliqué au triangle (M,M_1,M') donne :
$$\overrightarrow{M_1M'} = 2\,\overrightarrow{AI}$$

4) Déductions

1°) $2\,\overrightarrow{AI} = \vec{U}$

2°) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{U}$

3°) I est fixe.



5) Conclusion

REMARQUES COMPARATIVES

Ces deux démonstrations diffèrent sensiblement, tant par la forme que par l'esprit :

La première est relativement "algébrisée" par l'utilisation d'égalités de vecteurs. Elle suit un cheminement plutôt analytique qui s'opère pas à pas et qui amène en quelque sorte à *découvrir* le point I — qui pourrait ne pas être "soupçonné" au départ — puis la conclusion. Elle pourrait à la rigueur être réalisée sans l'aide d'une figure : cette dernière n'est vraiment utile qu'en 4) pour retrouver plus facilement les synonymies, encore qu'à ce niveau elle ne constitue guère plus qu'une aide mnémotechnique.

La deuxième sera sans doute jugée plus "élégante", en tout cas plus "purement géométrique". Elle procède d'une "décomposition-reconstruction" de la situation à la fois plus profonde et d'une autre nature : elle **impose** le point I dès le début pour pouvoir **recréer** la situation d'un théorème, ce qui révèle une appréhension plus synthétique et requiert une **anticipation** du résultat. Elle ne semble guère pouvoir être élaborée *sans le support d'une* figure, et l'on pourra remarquer à ce sujet que c'est une figure *épurée* au maximum qui facilite le mieux l'intuition du théorème à utiliser.

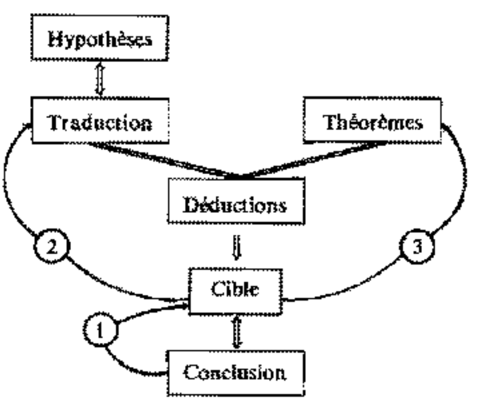
Ces dernières remarques nous incitent à revenir un peu sur une difficulté que nous avons rencontrée à plusieurs reprises : **comment trouver, comment choisir les "bonnes" synonymies, les "bons" théorèmes ?**

Comme nous l'avons déjà signalé, ce n'est que de la prise en compte **simultanée** des hypothèses et de la "cible" visée que peut naître l'idée de la méthode à utiliser. Remarquons tout d'abord que la cible n'est pas toujours la conclusion en tant que telle (celle qui est fournie par l'énoncé, par exemple), mais souvent une formulation équivalente et plus facile à appréhender : ainsi, dans le dernier exemple, on ne vise pas "$t_{\vec{U}} \circ S_A = S_1$" mais "pour tout M , I est le milieu de (M,M')", phrase qui est à coup sûr beaucoup plus "parlante".

Plus généralement, il semble bien qu'il n'y ait pas seulement un *déroulement* plus ou moins linéaire des hypothèses vers la conclusion mais plutôt un ***double mouvement***, la prise en compte de la cible introduisant un "**feed-back**" qui intervient

1) au niveau de la traduction de la conclusion en une cible qui oriente vers la méthode ;
2) au niveau du choix des synonymies pour la traduction des hypothèses ;
3) au niveau du choix des théorèmes destinés à réduire l'écart entre 1) et 2).

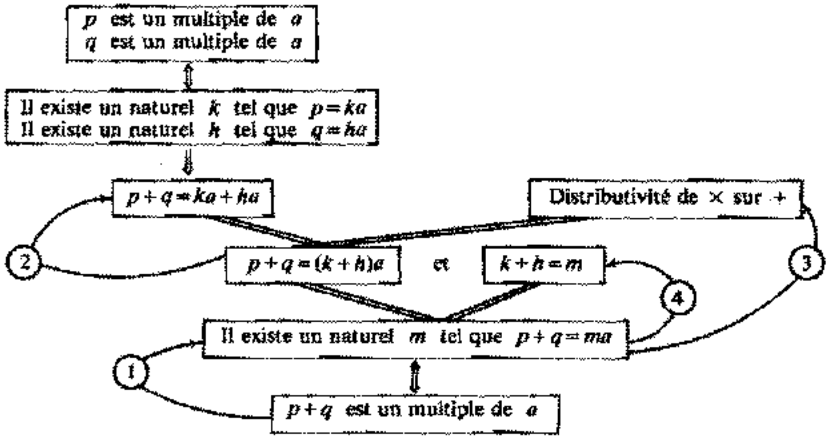
Un schéma pourrait être :



La numérotation adoptée ici ne traduit pas une chronologie obligatoire (cf. le deuxième exemple ci-après) car il y a une interaction évidente au moins entre les niveaux 2 et 3.

Donnons deux illustrations de cette dynamique, l'une en algèbre, l'autre en géométrie.

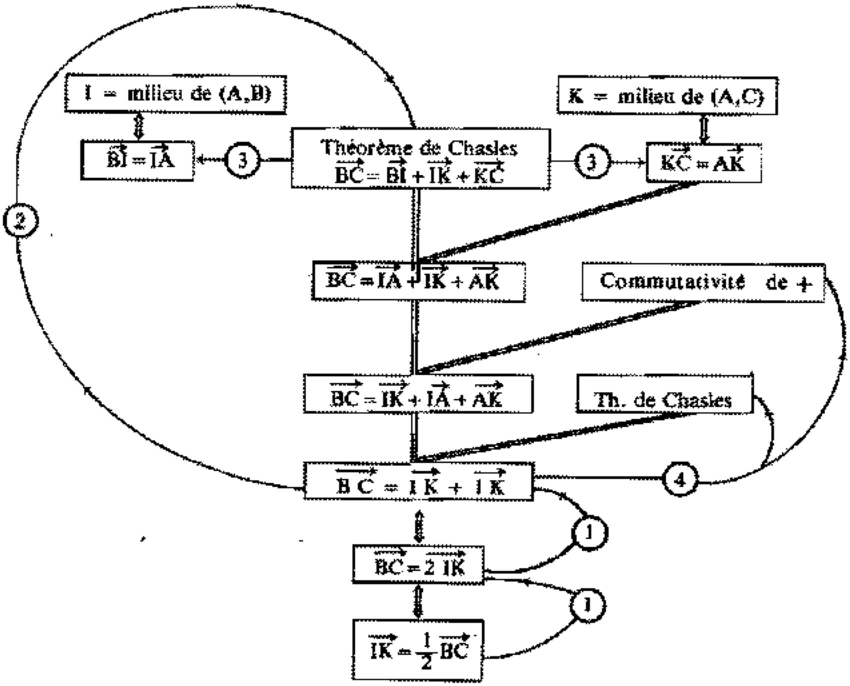
I La somme de deux multiples de a est un multiple de a



1) Ce n'est que la définition.
2) La cible fait intervenir $p+q$, d'où la nécessité de l'introduire.
3) La cible exige que l'on écrive $p+q$ sous la forme ma alors qu'on l'a sous la forme $ka+ha$, d'où la nécessité d'un moyen de transformer une somme en produit.
4) C'est la comparaison entre l'écriture obtenue et l'écriture visée qui amène à poser $k+h=m$.

On a ici un exemple extrêmement simple et pourtant très révélateur. Cette démonstration se fait en classe de cinquième et, en général, on ne lui consacre guère plus de cinq minutes tellement elle est "élémentaire"... Mais il faut bien voir qu'une analyse complète de sa structure et de sa dynamique, faite avec le concours des élèves, demanderait trois à quatre fois plus de temps. Ce ne serait peut-être pas du temps perdu...

II Le théorème des milieux dans un triangle (A,B,C)



1) Mise en place de la cible.
2) La cible **exige** que l'on trouve pour $\overrightarrow{BC}$ une écriture égale faisant intervenir I et K, d'où l'appel à la relation de Chasles, et ce **avant même la traduction des hypothèses.**
3) L'apparition de $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{KC}$ demande qu'on les transforme, d'où le choix de la traduction des hypothèses.
4) C'est toujours la considération de l'écart entre la cible et le stade de déduction où l'on se trouve qui peut faire penser aux propriétés à faire intervenir.

On notera la différence de démarche avec le premier exemple : ici, la traduction des hypothèses ne peut se faire utilement qu'**après** que la prise en compte de la cible ait amené à écrire une relation de Chasles.

Cette démonstration classique peut être exécutée en dix minutes dans une classe de quatrième... L'étude sérieuse de sa construction et de son fonctionnement requiert passablement plus de temps.

Pour tenter de faciliter l'installation de ces *feed-back* indispensables à l'élaboration d'une démonstration, on peut suggérer quelques types d'activités.

Tout d'abord faire, de temps en temps, le point sur un *ensemble de connaissances* : en premier lieu, être capable d'énoncer tout ce qui a été vu concernant tel ou tel concept, mais surtout apprendre à **relier des concepts les uns aux autres, de façon à remplacer ainsi une simple accumulation de connaissances par un réseau structuré d'informations qui se complètent et s'épaulent mutuellement** (par exemple mettre en évidence les liens entre parallélogramme, milieu et projection).

Ensuite chercher, à partir d'une situation donnée, les informations que l'on peut en tirer, les théorèmes du cours qui peuvent s'y rattacher, et ainsi les conséquences que l'on peut déduire.

Enfin, essayer de formuler des conjectures puis tenter d'analyser
1) pourquoi on est amené à telle conjecture plutôt qu'une autre ;
2) comment on peut en prouver la validité.

De telles activités prennent du temps, beaucoup de temps, surtout si l'on accepte de suivre le rythme des élèves au lieu de les astreindre à se plier aux exigences du sacro-saint programme... En pédagogie il est exceptionnel que l'on réussisse à faire vite et bien. Et il est dérisoire de vouloir faire comprendre — et a fortiori faire faire — une démonstration à un élève de quatrième ou de troisième s'il ne maîtrise pas des concepts que les programmes supposent acquis en cinquième ou sixième.

Ce n'est sans doute pas complètement par hasard si, depuis une dizaine d'années, mon expérience d'enseignement dans le premier cycle m'a fait progressivement attacher de plus en plus d'importance aux concepts d'*égalité* et de *synonymie* et à leur propriété de **substitution.**

Ce n'est certainement pas par hasard si le livre du maître d'un remarquable manuel de troisième déclare : "Nous avons remarqué dans nos classes que la notion de substitution (d'ailleurs indispensable en mathématiques) posait problèmes à de nombreux élèves".

Ce n'est assurément pas par hasard si, dans "La psychologie de l'intelligence", à propos des groupements d'opérations caractérisant le stade opératoire concret, Jean Piaget, après avoir présenté la Classification et la Sériation, déclare : *"une troisième opération fondamentale est celle de la substitution"*.

Etre capable de remplacer une écriture par une écriture égale est un premier pas indispensable pour cette distanciation, cette libération de la forme par rapport au contenu que réclame le passage à l'abstraction.

Etre capable de remplacer une phrase par une phrase synonyme est un deuxième pas allant de pair avec la *"décentration des points de vue"* et la constitution de la **combinatoire** sur laquelle s'appuie la construction de la pensée formelle.

Il n'est que trop évident que l'on perd son temps, et surtout qu'on le fait perdre aux élèves, en parlant par exemple d'application injective à quelqu'un qui n'est pas encore totalement convaincu de l'évidence que, pour n'importe quelle application f, si $u=m$ alors $f(u)=f(m)$. Car alors, non seulement il ne sera pas capable d'assimiler le concept d'injection, mais ce dernier, imposé mais ne pouvant être intégré, va "chercher sa place" en quelque sorte et créer ainsi des interférences fâcheuses, en particulier ici avec le concept d'égalité, nuisant en retour au bon fonctionnement de ce dernier.

On devine facilement le cercle vicieux et les ravages qu'il est en mesure de propager. On imagine tout aussi aisément le nombre de fois où un tel processus peut s'enclencher pour un élève qui "a quelque mal à suivre" (comme on dit pudiquement...).

Notre enseignement ressemble trop souvent à une espèce de forcing, et un forcing que l'on exige en outre d'élèves non préparés : il ne faut pas être surpris s'il y a de nombreux "claquages" ! ... Un exercice tel que celui qui a été analysé pages 844 à 846 requiert au moins deux heures pour être traité en classe de façon à peu près convenable. Quand on connaît le volume et la densité des programmes de quatrième et troisième, comment peut-on croire qu'un professeur ait le temps de les traiter sans les maltraiter, comment ose-t-on s'étonner que le gavage auquel on soumet les élèves conduise à tant d'indigestions ? Et quand bien même voudrait-on maintenir le rôle sélectif que l'on fait jouer aux mathématiques, n'y a-t-il vraiment pas de méthode moins aberrante que celle qui conduit à se poser régulièrement la question : des professeurs et des élèves, qui veut-on décourager, qui cherche-t-on à écœurer ? A moins que la réponse ne soit, comme dans la (mauvaise) plaisanterie : les deux ...

A une époque où la productivité a quasiment été érigée en valeur culturelle, il paraît pour le moins curieux, sinon navrant, de constater combien les résultats considérables obtenus par la psychologie de l'enfant depuis plusieurs décades n'ont eu que si peu de retombées pratiques dans un domaine où le "rendement" a toujours été l'un des principaux points noirs : l'enseignement.

Et si la chasse au gaspi est à l'ordre du jour, on souhaiterait qu'elle daigne aussi s'intéresser au prodigieux gâchis d'énergie qui s'opère trop souvent dans nos classes : la pollution et l'appauvrissement qui en résultent, s'ils sont peut-être moins visibles et choquants que d'autres, n'en sont pas moins réels et graves.