1

ETUDES

L'inutile règle*

par Bernard PARZYSZ, IREM de Paris VII.

S'il est une question qui a passionné les mathématiciens pendant des siècles, c'est bien celle des constructions géométriques réalisables "à la règle et au compas", c'est-à-dire à l'aide de ces deux seuls instruments, et en un nombre fini d'opérations (ce que les Grecs appelaient "problèmes plans"). Et on peut dire que la résistance que leur opposèrent certains problèmes (trisection de l'angle, duplication du cube, quadrature du cercle, inscription de polygones réguliers) entre pour une bonne part dans les progrès des mathématiques. Certes, résoudre des problèmes ardus à l'aide de ces deux seuls intruments n'est déjà pas si mal, mais il y a mieux encore...

En 1672 parut à Copenhague un livre qui passa totalement inaperçu(1) ; il s'agit de l'"Euclides danica", d'un certain Georg Mohr (1640-1697). Dans ce livre — qui aurait pourtant dû faire l'effet d'une bombe - Mohr n'annonçait rien moins que le résultat suivant : *tout point constructible à la règle et au compas peut être obtenu à l'aide du seul compas.* Certes Cardan, Tartaglia et d'autres avaient déjà travaillé dans ce sens, mais sur des problèmes particuliers ; on n'avait encore jamais *démontré* la totale inutilité (théorique) de la règle.

---

* *NDLR : Article publié dans le Bulletin de liaison des Professeurs de Mathématiques n° 28, mai 1981.*

(1) Ce ne fut pas avant 1928 qu'un mathématicien, amateur de vieux livres, en dénicha un exemplaire chez un bouquiniste de Copenhague. *Ce n'est qu'alors que l'on s'aperçut que* Mascheroni avait été devancé.

Plus d'un siècle passa, et il fallut attendre la "Geometria del compasso" de l'abbé Lorenzo Mascheroni (1750-1800), qui parut à Pavie en 1797, pour que la chose recueillît enfin un écho. Mais on avait perdu 125 ans...

Les points que l'on peut construire dans le plan à la règle et au compas sont obtenus comme intersections :

(1) de deux cercles
(2) d'un cercle et d'une droite
(3) de deux droites.

Avec le compas seul on n'a, bien sûr, aucune peine à construire l'intersection de deux cercles. Seuls restent donc à étudier les deux derniers cas.

Mais auparavant, nous allons commencer par traiter trois problèmes préliminaires : les constructions au compas seul :

- du symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée ;
- d'un bipoint[2] dont la longueur est égale à $\frac{a.b}{c}$ (quatrième proportionnelle), où a, b et c sont les longueurs de trois bipoints donnés ;
- d'un point C, aligné avec deux points donnés A et B, tel que l'on ait $AC = AB + a$ ou $AC = |AB - a|$, où a est la longueur d'un bipoint donné.

1. Symétrique d'un point donné par rapport à une droite donnée

La droite est donnée par les deux points A et B; soit M le point donné. Il suffit de construire les cercles centrés en A et B et contenant M, qui se couperont en un second point M', lequel est le symétrique cherché, en vertu de la symétrie de la figure par rapport à la droite (AB) (figure 1).

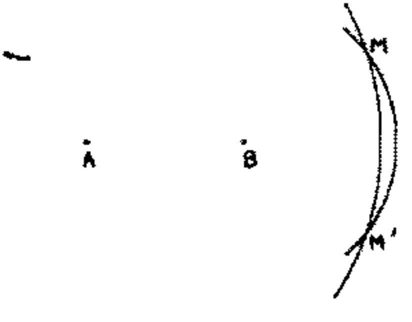

figure 1

(2) Nous sommes ici obligés de parler de "bipoints" plutôt que de "segments", que l'on ne peut évidemment pas tracer avec le seul compas.

2. Construction d'une quatrième proportionnelle

Soit O un point quelconque du plan. On construit (figure 2) :

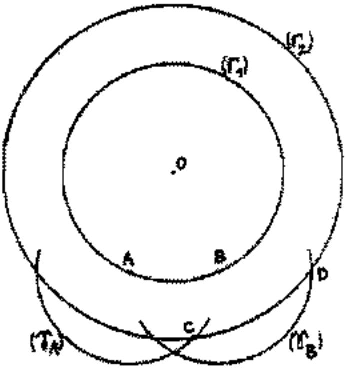

figure 2

- le cercle (Γ_1) de centre O et de rayon c.
- le cercle (Γ_2) de centre O et de rayon b.

Sur (Γ_1), on prend une corde [AB] de longueur a.
Puis on construit un cercle (γ_A) de centre A, coupant (Γ_2).
Soit C l'un des points d'intersection.
On construit également un cercle (γ_B) de centre B, et de même rayon que (γ_A). Ce cercle, transformé de (γ_A) dans la rotation R de centre O qui fait passer de A à B, va donc couper (Γ_2), et l'un des points d'intersection, soit D, sera l'image de C par R.
Le segment [CD] a la longueur cherchée.

Démonstration :

Les triangles OAC et OBD sont isométriques par construction ; on en déduit : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$. Les triangles isocèles OAB et OCD sont donc semblables, et on a $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{OC}{OA}$, d'où $CD = a.\dfrac{b}{c}$.

3. Construction d'un point C, aligné avec A et B donnés, tel que $AC = AB + a$ ou $AC = |AB - a|$

On construit le cercle (Γ) de centre B et de rayon a, puis un cercle de centre A qui coupe (Γ) en deux points distincts D et D′ (figure 3).

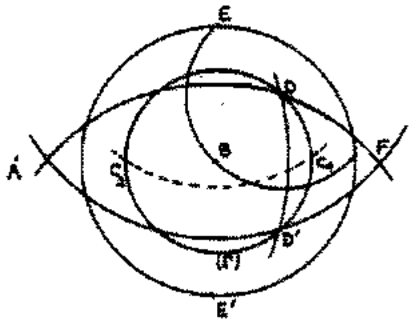

figure 3

On trace alors le cercle de centre D contenant B, et le cercle de centre B et de rayon DD′. Ces deux cercles sont sécants en deux points distincts (car $0 < DD' < 2a$), symétriques par rapport à (BD), donc situés dans deux demi-plans distincts de frontière (BD). Soit E celui de ces deux points qui n'est pas situé dans le même demi-plan que D′.

Le quadrilatère BEDD′ est alors convexe, et ses côtés opposés sont deux à deux isométriques ; c'est donc un parallélogramme, et (EB) — comme (DD′) — est perpendiculaire à (AB). De plus, D et E sont situés dans le même demi-plan de frontière (AB).

On construit alors le symétrique E′ de E par rapport à (AB) (construction 1), puis le cercle de centre E contenant D′, ainsi que le cercle de centre E′ contenant D. Ces deux cercles, symétriques par rapport à (AB), sont sécants (puisqu'ils passent par un point situé dans le demi-plan de frontière (AB) qui ne contient pas leur centre).

Les points de concours de ces deux cercles sont (pour cause de symétrie) sur (AB), et symétriques par rapport à B. Soit F l'un de ces deux points.

On construit (enfin !) le cercle de centre E et de rayon BF, qui coupera le cercle (Γ) en deux points dont l'un, C_1, vérifie $AC_1 = AB + a$, et l'autre, C_2, vérifie $AC_2 = |AB - a|$.

Démonstration :

a) *Calcul de* ED′ : Posons Mes $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}) = \Theta$, et soit I et I′ les projections respectives de D et D′ sur (EE′).
On a : $DI = a|\cos\Theta|$, $BI = a|\sin\Theta|$ et, par suite, $EI' = 3a|\sin\Theta|$.

D'où, dans le triangle rectangle EI'D' : $(ED')^2 = 9a^2\sin^2\Theta + a^2\cos^2\Theta$,
soit $(ED')^2 = a^2(1+8\sin^2\Theta)$.

b) *Calcul de* BF : Dans le triangle rectangle BEF, on a

$$(BF)^2 = (EF)^2 - (EB)^2 .$$

Mais $EF = ED'$, et $BE = 2BI$, d'où :

$$(BF)^2 = a^2(1+8\sin^2\Theta) - 4a^2\sin^2\Theta ,$$

soit $(BF)^2 = a^2(1+4\sin^2\Theta)$.

[Remarque : $\left.\begin{array}{l} BF = a\sqrt{1+4\sin^2\Theta} \\ BE = 2a|\sin\Theta| \end{array}\right|$ donc $BF - a < BE < BF + a$
(le calcul, sans difficulté, est laissé au lecteur). Le cercle de centre E et de rayon BF coupera donc bien le cercle (Γ).]

c) *Les points* C_1 *et* C_2 *se trouvent-il sur* (AB) ?

On a : $(EC_1)^2 = (BF)^2 = a^2(1+4\sin^2\Theta)$
$(EB)^2 = 4a^2\sin^2\Theta$
$(BC_1)^2 = a^2$

Donc $(EC_1)^2 = (EB)^2 + (BC_1)^2$. Le triangle EBC_1, vérifiant la relation de Pythagore, est rectangle, ce qui prouve que C_1 est bien sur la droite (AB), ainsi que C_2 .

Entrons maintenant dans le vif du sujet, et indiquons les deux constructions annoncées :

4. Points d'intersection d'un cercle et d'une droite

La droite est donnée par deux points A et B ; le cercle donné a pour centre O et pour rayon R (si le centre est perdu, voir au **8**).

On construit le point O', symétrique de O par rapport à (AB) (voir construction **1**).

- *Si* O' = O : c'est que (AB) contient O ; il suffit alors de construire les points M_i de (AB) définis par $AM_i = OA + R$ ou $AM_i = |OA - R|$ (voir construction **3**). Parmi ces quatre points, deux se trouvent sur le cercle donné ; ce sont les points cherchés (figure 4).

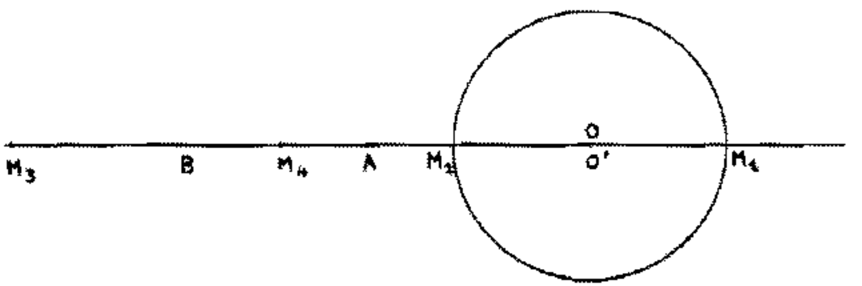

figure 4

- *Si* O′ ≠ O : On construit le cercle de centre O′ et de rayon R, qui coupera le cercle donné aux points cherchés (s'ils existent), en vertu de la symétrie de la construction par rapport à (AB) (figure 5).

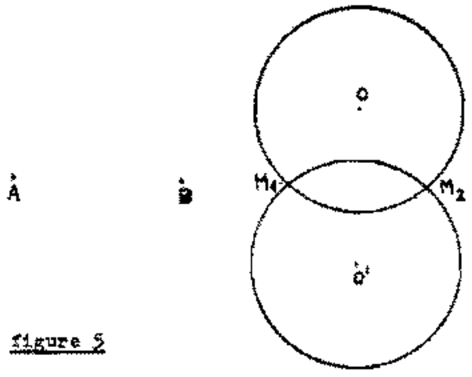

figure 5

5. Point d'intersection de deux droites données

L'une des droites est donnée par les points A et B, et l'autre par les points C et D.

a) On construit les symétriques C′ et D′ de C et D par rapport à (AB) ; le point d'intersection I cherché est également celui de (CD) et (C′D′) (figure 6).

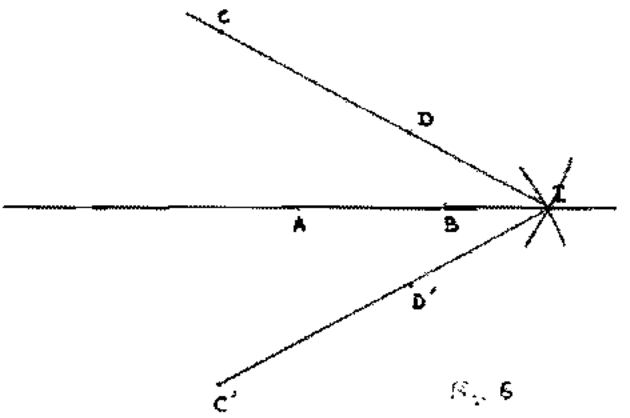

fig. 6

En vertu de l'homothétie de centre I qui transforme C en D et C′ en D′, on a : $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{CC'}{DD'}$ (1).

D'autre part, suivant les positions relatives de C, D et I, on aura des expressions différentes pour IC :

- I *entre* C *et* D : Alors $ID = CD - IC$ d'où, en reportant dans la relation (1) : $\dfrac{IC}{CD-IC} = \dfrac{CC'}{DD'}$,

et finalement : $IC = CD \cdot \dfrac{CC'}{CC'+DD'}$

- D *entre* C *et* I : Ici, on a $ID = IC - CD$,

et $IC = CD \cdot \dfrac{CC'}{CC'-DD'}$

- C *entre* D *et* I : On a alors $ID = CD + IC$,

et $IC = CD \cdot \dfrac{CC'}{DD'-CC'}$

On construira donc ensuite :

b) un bipoint (C,E) de longueur $CC'+DD'$, $CC'-DD'$ ou $DD'-CC'$ (suivant le cas) par la construction 3, puis

c) un bipoint (F,G) de longueur $CD \cdot \dfrac{CC'}{CE}$ par la construction 2.

d) on obtiendra enfin I comme intersection des cercles de centres C et C′ et de rayon FG (en fait, celui des deux points d'intersection qui sera aligné avec C et D).

Voilà qui achève la résolution (d'un intérêt purement théorique, est-il besoin de le préciser) du problème de la géométrie du compas seul.

A titre d'exemples, nous indiquons ci-après trois constructions au compas seul :
- symétrique d'un point donné par rapport à un point donné ;
- milieu d'un bipoint donné ;
- détermination du centre (perdu) d'un cercle.

6. Construction du symétrique d'un point donné par rapport à un point donné

On cherche le symétrique du point M par rapport au point O (figure 7).

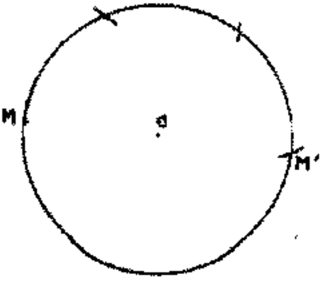

figure 7

On construit le cercle de centre O contenant M puis, à partir de M, et avec la même ouverture de compas, on construit quatre sommets consécutifs d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle ; le point M′ cherché est justement ce quatrième sommet.

7. Construction du milieu d'un bipoint donné

On cherche à construire le milieu I du bipoint (A,B).

On construit les cercles qui sont centrés en l'un de ces deux points et qui contiennent l'autre (figure 8). On détermine alors le point C, symétrique de A par rapport à B (voir construction 6), puis on construit le cercle de centre C contenant A, qui coupera le cercle de centre A en D et E.

Les cercles de centre D et E contenant A se recouperont au point I cherché.

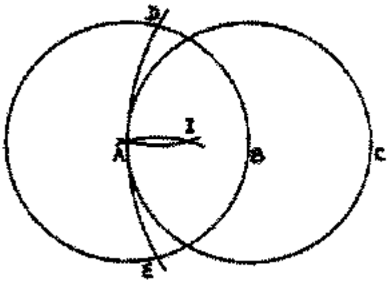

figure 8

Démonstration :

A, B, C et I sont alignés (symétrie de la construction par rapport à (AB)). Les triangles isocèles ADI et ACD sont semblables, car ils ont un angle à la base commun (en A). D'où $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AI}{AD}$.

Mais $AD = AB$, et $AC = 2AB$, d'où $AI = \dfrac{1}{2} \cdot AB$.

8. Détermination du centre (perdu) d'un cercle

Le général Napoléon Bonaparte (1769-1821) eut l'occasion de rencontrer l'abbé Mascheroni lors d'un voyage qu'il entreprit en Italie en 1797 (cette rencontre n'était pas, faut-il le dire, l'unique but du voyage).

Impressionné par la beauté du résultat que venait d'obtenir l'Italien, il s'attaqua à la recherche de diverses constructions au compas seul, et en particulier à celle du centre d'un cercle donné (problème devenu classique depuis, sous le nom de "problème de Napoléon"). En voici la solution :

Soit (Γ) le cercle donné, et A un point quelconque de ce cercle (figure 9). On construit un cercle "quelconque" (γ), de centre A, qui coupe (Γ) en deux points B et C (3). Puis on trace les cercles de centres B et C contenant A, qui se recoupent en D.

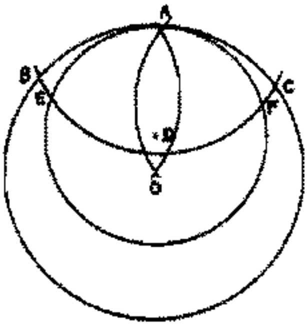

figure 9

On construit alors le cercle de centre D contenant A, qui coupera (peut-être) le cercle (γ) en E et F.

["Peut-être", parce que les cercles ne seront sécants que si la distance des centres, AD, est supérieure à la valeur absolue de la différence des rayons, $|AD - AB|$.

Or $|AD - AB| < AD$ équivaut à $\left|1 - \dfrac{AB}{AD}\right| < 1$,

soit $-1 < \dfrac{AB}{AD} - 1 < 1$, ou enfin $\dfrac{AB}{AD} < 2$.

Posons $Mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \Theta$. On a $AD = 2\,AB\cos\Theta$. La condition précédente peut donc s'écrire : $\dfrac{AB}{2\,AB\cos\Theta} < 2$, soit $\cos\Theta > \dfrac{1}{4}$.

Il faudra donc choisir le rayon de (γ) suffisamment grand pour que la construction soit efficace. C'est ce qui explique les guillemets autour de "quelconque".]

Après ce (bon ?) a parte, reprenons le cours de notre construction :

En fait, il ne reste plus qu'à tracer les cercles de centres E et F contenant A, qui se recouperont au point O cherché.

(3) On verra ci-après la raison de la présence de ces guillemets.

Démonstration :

Par construction, les points A, O et D sont alignés sur l'axe de symétrie de la figure. Les triangles AED et AOE, isocèles, ont un angle à la base commun (en A) ; ils sont donc semblables, et on a en particulier

$$\frac{AE}{AO} = \frac{AD}{AE}\text{ , soit } (AE)^2 = AD.AO\ .$$

$$\text{Or, } AE = AB\text{ , donc } (AB)^2 = AD.AO\text{ , et } \frac{AB}{AD} = \frac{AO}{AB}\ .$$

On peut en déduire que les triangles ABD et AOB (qui ont, en outre, un angle commun en A) sont semblables. Comme ABD est isocèle, il en est de même de AOB, et on en déduit $OA = OB$. Par symétrie, on a également $OA = OC$, ce qui implique que O est bien le centre cherché.

Le lecteur intéressé pourra s'amuser à chercher (à l'instar du militaire précité) d'autres constructions au compas seul. Qu'il ne compte cependant pas trop que cela le fera passer à la postérité (surtout si les problèmes qu'il choisit de résoudre sont du même genre que la construction du troisième sommet d'un triangle équilatéral, ou celle du quatrième sommet d'un parallélogramme...).

BIBLIOGRAPHIE

Boyer (Carl B.), *A History of Mathematics* (John Wiley & Sons, New York, 1968).

Callandreau (Edouard), *Célèbres problèmes mathématiques* (Albin Michel, 1949).

Le Lionnais (François), *Peut-on encore faire une conférence sur la quadrature du cercle en 1974 ?* (in Revue du Palais de la Découverte. Vol. 3, n° 3, 1975).

Carrega (Jean-Claude), *Théorie des corps ; la règle et le compas* (Hermann, 1981).