2
ETUDES DIDACTIQUES

L'acquisition du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur

par Aline ROBERT, M.A., Université Paris VI

Je ferai au sujet du sujet de ce travail deux remarques générales :

1) Il n'est pas inutile de reconnaître que cette recherche est "datée". Si l'enseignement supérieur ne connaissait pas la crise durable que nous savons, je ne me serais peut-être pas intéressée (de fil en aiguille) aux mécanismes cognitifs mis en jeu durant le dit enseignement supérieur.

2) Je cite P. Bourdieu (1) : "La recherche, c'est peut-être l'art de se créer des difficultés fécondes — et d'en créer aux autres. Là où il y avait des choses simples, on fait apparaître des problèmes"... Illusion de la transparence ! Bon nombre de lecteurs avertis, interrogés à l'improviste sur l'acquisition du concept de convergence des suites dans le supérieur, répondraient sans doute "Ah, ce n'est pas immédiat ?" ou "Il y a de vraies difficultés ?" — ce qui est déjà tout un programme sur les présupposés qui peuvent fonctionner à l'écoute d'une telle question.

Quant à nous, nous espérons que, la liberté commençant par la connaissance des nécessités (2), ce genre de travaux pourra donner aux enseignants un peu de cette liberté dont d'aucuns ont si peur de se voir privés par cette "didactique des mathématiques" si controversée.

Pour le reste, laissons la parole aux premiers éléments de mon travail qui sont résumés ici.

---

(1) Bourdieu : *Questions de sociologie*, p. 58, Paris, Editions de Minuit, 1980.

(2) Bourdieu, opus cité p. 77 : "Je doute cependant qu'il existe aucune autre liberté réelle que celle que rend possible la connaissance de la nécessité".

Nous développerons d'abord les objectifs et les moyens du travail. Puis nous résumerons les diverses représentations sur la convergence des suites qu'ont exprimées les étudiants interrogés, et la relation qu'on a pu constater entre ces représentations et les conduites de preuve produites au cours d'un exercice classique sur les suites numériques.

I. Présentation du travail

Nous avions donc été amenés à constater qu'une partie des connaissances supposées "acquises" dans l'enseignement supérieur (attestées en tout cas par le succès à un examen, par exemple) n'étaient pas assimilées (3) par tous les étudiants. Ainsi s'avérait-il parfois impossible que ces connaissances soient réinvesties dans des champs mathématiques légèrement différents, ou encore pour éclairer des situations simples mais non identifiées comme relevant de ces mêmes connaissances... Nous avons alors tenté de rendre compte précisément de l'"acquisition" du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur — étant entendu que, pour nous, l'objectif d'un enseignement comprend une certaine compétence (4) finale, indice de cette acquisition. Or nous allons montrer que ce concept, dont certes le "sort" peut être considéré comme réglé pour certains étudiants dès la première année, est en réalité encore longtemps source d'erreurs diverses. Nous estimons que ces erreurs peuvent provenir de difficultés profondes (conceptuelles) qui ne disparaissent pas nécessairement à la simple exposition du cours suivie d'exercices d'application — c'est la raison pour laquelle il est intéressant d'étudier cette acquisition compte tenu de l'enseignement qui la rend (ou non) possible (ou probable) (5).

Pourquoi le concept de convergence des suites numériques ? En premier lieu, la convergence est un concept central et difficile de l'analyse, et bien des enseignants perçoivent l'existence d'une maturation progressive du concept chez leurs étudiants. Ensuite, le cours sur les suites est fait en première année du supérieur et même souvent assez tôt dans l'année, ce qui permet de cerner une évolution dès la première année. De plus, c'est une notion dont les étudiants ont déjà entendu parler en terminale, partiellement certes, mais on peut chercher les traces de l'enseignement précédent et essayer de voir comment le "nouveau" s'installe par rapport à l'"ancien". En outre, les suites (éventuellement dans des espaces plus généraux) interviennent tout au long de la scolarité universitaire, même si le cours initial n'est pas repris ; il est donc possible d'interroger les étu-

---

(3) Au sens naïf ; "appropriées" serait plus adapté.

(4) Cf. O. Reboul, *Qu'est-ce qu'apprendre ?*, ch. VIII, P.U.F., 1981.

(5) Ceci ne figure pas dans les éléments résumés ici.

diants de tous les niveaux sur les suites, personne ne peut avoir complètement "oublié". Enfin, le vocabulaire utilisé pour ce concept a ceci de particulier qu'il est double ("convergent" - "a une limite") d'une part, et que d'autre part l'une des manières de dire (la deuxième) a un sens en français courant qui n'est pas entièrement respecté même dans les interprétations les plus concrètes qu'on peut avoir du concept — phénomène fréquent en mathématiques. Cela permet de cerner l'évolution de la mise en place des représentations "correctes" de la convergence des suites en remplacement des représentations spontanées (avant tout enseignement) qui donnent aux mots leur sens courant comme l'a vérifié B. Cornu (6) (classes de seconde), puis des premières représentations — éventuellement insuffisantes — qui se forment et évoluent au fur et à mesure de l'enseignement et de la pratique des étudiants. Nous appellerons "modèles" ces représentations que se font les étudiants de la convergence des suites. Ce sont précisément *des expressions écrites des représentations* de la convergence des suites que se font les étudiants que nous nous sommes attachés à rechercher : c'est ce que nous appelons les "*modèles exprimés*". Nous en étudions l'évolution au cours des 4 années du supérieur. Ayant aussi proposé un certain nombre d'exercices classiques sur les suites, nous pouvons étudier, outre les procédures utilisées (et leur évolution), le lien éventuel entre ces procédures et les modèles exprimés ; nous en donnons un exemple dans la partie III. Cette étude permettra d'ailleurs de préciser ultérieurement une typologie des modèles qui fonctionnent chez les étudiants, et pas seulement des modèles exprimés. Toutes ces études (synchroniques) sont effectuées sur les 1 380 copies recueillies en 1979-80 auprès d'étudiants de différents niveaux de l'enseignement supérieur en réponse à un même questionnaire (à de très légères variantes près dont je ne parlerai pas ici). Le texte de ce questionnaire figure en annexe.

Pour terminer cette présentation, je voudrais signaler d'une part les liens entre ce travail et celui de Mme M.C. Bour (7) qui a dégagé les étapes de l'élaboration historique du concept de convergence des suites telles que peuvent en témoigner les écrits des mathématiciens ; d'autre part, les liens entre ce travail et celui de Mme F. Boschet (8) qui, par une analyse détaillée de quelques chapitres des manuels du premier cycle du supérieur, a dégagé les "modèles exprimés" qu'on peut y trouver.

---

(6) B. Cornu : *Interférences des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite*. In Séminaire Recherche Pédagogique n° 8, Grenoble, février 80 (Mathématiques Appliquées et Informatique).

(7) A paraître.

(8) Cf. Annexe n° III.

Enfin, je ne peux m'empêcher de souligner que ce travail n'aurait pas pu être commencé sans la collaboration (souvent ingrate) d'une dizaine de collègues [9] enseignants en math. sup. ou en deug, avec lesquels nous avons procédé à un recueil d'erreurs préliminaire, et c'est à 70 collègues (enseignants en math. sup., math. spé, ou à l'université) que je dois d'avoir pu recueillir mes 1 380 copies !

II. Les "modèles exprimés" par les étudiants sur la convergence des suites

Pour connaître une expression écrite des représentations que se font les étudiants de la convergence des suites, nous avons posé les questions suivantes (à 788 d'entre eux — les autres ayant eu à répondre à un texte très légèrement différent non évoqué ici) :

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous ?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune ?

Nous avions en effet constaté l'efficacité de ces questions dans des entretiens individuels préalables. Nous ne nous appesantirons pas ici sur la description exhaustive des réponses. Nous avons centré notre analyse sur les *verbes* utilisés pour exprimer la convergence ; nous avons distingué en particulier les verbes de mouvement, de temps ou d'état. Cela nous a permis de "classer" les discours obtenus ; et voici, en résumé, les catégories auxquelles nous sommes arrivés (cette analyse porte sur 788 copies).

1) Les "modèles" monotone et dynamique monotone

Ces "modèles" sont caractérisés respectivement par des commentaires du type :

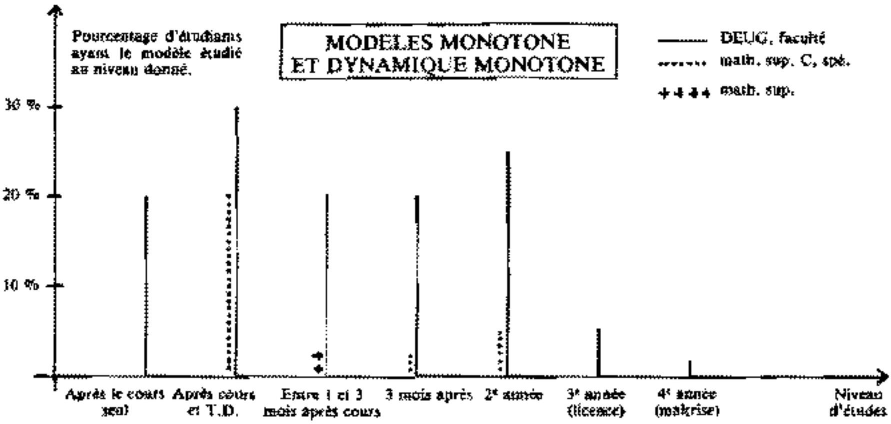
- une suite convergente est une suite croissante majorée (ou décroissante minorée) ;
- une suite convergente est une suite qui s'approche de sa limite en croissant (ou en décroissant).

Ces "modèles" disparaissent presque complètement des copies dès la troisième année d'enseignement supérieur mais concernent plus du cinquième des étudiants de DEUG 1 et de Math. Sup. C [10] lorsque ces der-

(9) MM. Azra, Balacheff, Berdot, Mmes Boschet, Bom, Nguyen, Mazet, Milhas, Wirth.

(10) Ce sont les classes de "Agro" où les étudiants ne sont pas sélectionnés comme dans les Math-Sup. "ordinaires". On utilisera par la suite l'abréviation "SUPC".

niers sont interrogés juste après le cours et les premiers exercices sur les suites. Ces modèles ont été exprimés dans 12 % des copies étudiées ; voici l'évolution de leur répartition :



On remarque que c'est toujours tout de suite après le cours et les premiers exercices d'application que le pourcentage de ces modèles est le plus élevé (30 % en DEUG 1, 21 % en SUPC) — mais les progrès (11) enregistrés en DEUG 1 sont plus faibles que ceux qui sont enregistrés en SUPC [de 30 % à 19 % plus de 3 mois après le cours en DEUG ; de 21 % à 2 % plus de 3 mois après le cours en SUPC]. De plus, il est frappant de constater qu'on revient en DEUG 1 à un pourcentage proche de celui qu'on notait juste après le cours sans exercices du tout ; tout se passe comme si les exercices n'avaient servi qu'à renforcer momentanément une représentation erronée et que, par la suite, leur "influence" se soit effacée sans avoir réussi à faire diminuer la représentation monotone initiale. Il est essentiel de remarquer que cette représentation monotone de la convergence — qui est certes erronée — constitue néanmoins une approche simplifiée du phénomène. De toute suite convergente non stationnaire, on peut extraire une sous-suite strictement monotone convergeant vers la limite de la suite ! De plus, cette représentation s'avère efficace pour résoudre un certain nombre de problèmes posés sur les suites — tous ceux où la convergence s'obtient par application du théorème sur les suites monotones bornées. Si on admet que l'apprentissage est une adaptation à des situations problèmes (12) et s'il suffit de cette représentation erronée pour résoudre la majorité des problèmes posés, on ne voit pas pourquoi les étudiants changeraient leur représentation monotone — si c'est celle qu'ils ont adoptée.

(11) On entend par là l'élimination (constatée au cours d'une étude synchronique) d'un modèle erroné.

(12) Cf. Brousseau : *Recherche en didactique des mathématiques* n° 1, pp. 51-52.

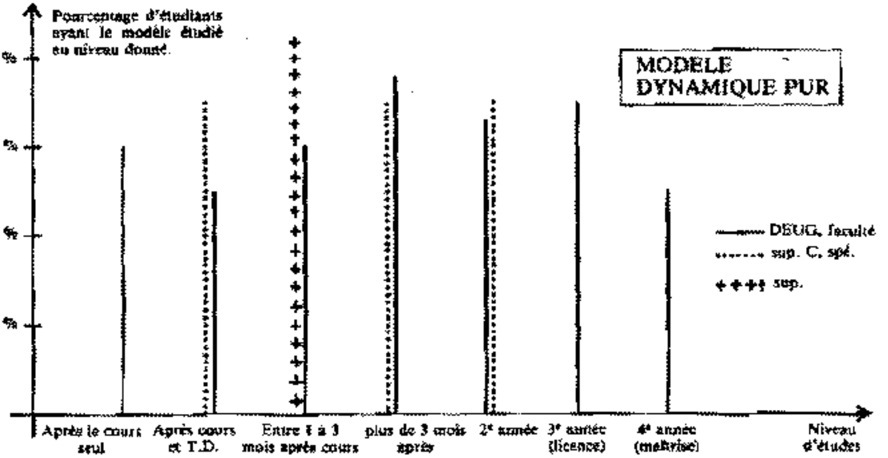
Il y a peut-être là une des origines de la différence entre DEUG 1 et SUPC : il est possible que les textes proposés en SUPC présentent une plus grande diversité qui amène la représentation monotone à des échecs pouvant la faire disparaître. En DEUG 1, on peut penser soit qu'il y a eu oubli et retour aux représentations issues du cours — existerait-il des "seuils" au-dessous desquels rien ne se passe ? — soit que les progrès sont insuffisants à cause du manque de diversité des situations-problèmes (sans exclusivité de ces causes).

2) Le modèle dynamique

Ce modèle est caractérisé par des expressions du type [13] :

- "u_n tend vers ℓ"
- "u_n se rapproche de ℓ", "les termes de la suite se rassemblent autour de de leur limite", "la distance de u_n à ℓ devient petite"... et les expressions identiques avec des verbes synonymes. On a cependant classé à part l'expression "u_n tend vers ℓ" car on s'est demandé si l'usage massif et conventionnel de cette expression ne lui a pas fait perdre son sens dynamique et si elle n'est pas énoncée comme une tautologie par les étudiants ; 4 % en font usage.

Ainsi a-t-on qualifié de "modèle dynamique pur" tous les modèles où les seuls verbes utilisés pour qualifier le comportement du terme général de la suite (des termes de la suite, de la suite) évoquent un mouvement (local ou global) ou une transformation temporelle (devenir petit) — à l'exclusion de "tend vers" [14]. Ces descriptions ont été données par 35 % des étudiants ; voici l'évolution de leur répartition :



(13) u_n désigne le terme général d'une suite convergente, ℓ sa limite.

(14) Le mot "converge" n'est pas utilisé ici car il intervient dans l'énoncé de la question.

Une remarque s'impose sur la "création" de cette représentation : tout ce qui est écrit sur la convergence ne contient que rarement les verbes utilisés par les étudiants exprimant ce modèle — l'étude sur les manuels du premier cycle entreprise par F. Boschet le confirme. Autrement dit, la première représentation non erronée (et très utilisée) de la convergence s'appuie sur un discours de l'enseignement exclusivement oral et sur une concrétisation assez locale, ponctuelle du concept ; ou se ramène au mouvement d'un point ("u_n se rapproche de..") ou à la projection dans le temps du phénomène ("la distance devient petite"). Il faut enfin remarquer la stabilité de cette expression de la convergence — même la légère baisse en 4[e] année n'est pas nécessairement significative car 17 % des étudiants de maîtrise n'ont pas abordé cette question, très vraisemblablement faute de temps. Le temps des études n'a donc pas beaucoup d'effets sur cette représentation — cela peut indiquer que les problèmes rencontrés par les étudiants ne l'ébranlent ni dans un sens ni dans un autre.

3) Le modèle statique [15]

Il est caractérisé par des phrases du type :

"les u_n sont dans une bande autour de ℓ..."

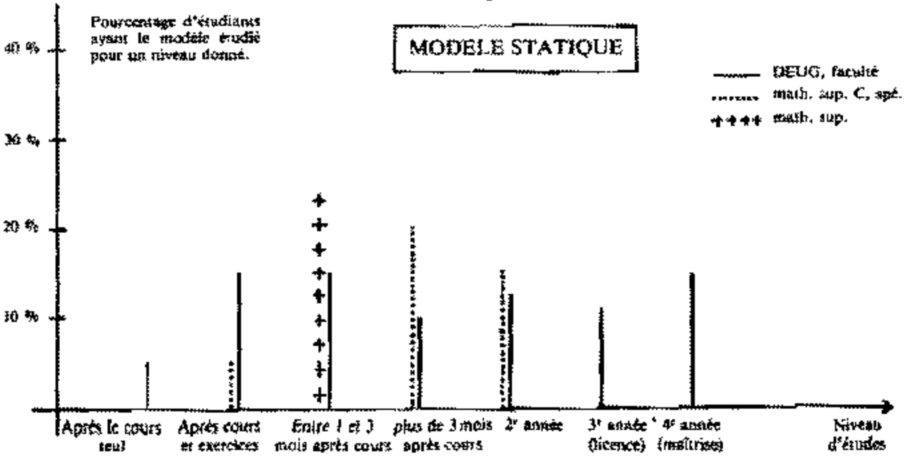
"les u_n sont regroupés autour de ℓ..."

"u_n est aussi près que l'on veut de ℓ..."

A un verbe d'état est associée une idée de voisinage.

Toutes ces descriptions correspondent à une représentation sans mouvement ou au résultat d'un mouvement terminé — à l'exclusion d'autres descriptions. Ce sont des traductions plus ou moins proches de la définition.

Nous considérons à part ceux qui se sont contentés de redonner la définition : ils représentent 4 % des étudiants et ne sont pas considérés comme ayant un modèle statique. Ce modèle est exprimé par 13 % des étudiants et voici l'évolution de sa répartition :



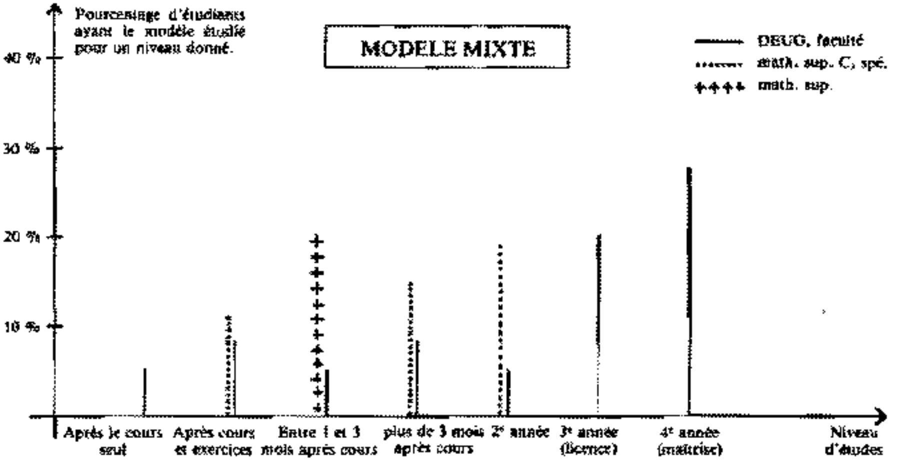
(15) Nous avons, pour résumer, regroupé ici les modèles statiques et préstatiques (phrases citées en troisième lieu ici).

On constate que si "l'installation" du modèle n'est pas immédiate, par la suite ce modèle s'avère assez stable.

4) Le modèle mixte

C'est ainsi qu'on a qualifié le modèle résultant de la juxtaposition du modèle dynamique et du modèle statique, y compris sous une forme proche de la définition pour ce dernier. Tous les collègues interrogés donnent une expression mixte.

Il faut souligner que c'est le seul modèle qui augmente sensiblement — phénomène qui s'oppose à la disparition du modèle monotone. Le modèle mixte est exprimé par 14 % des étudiants et voici l'évolution de sa répartition :



Il est à noter que c'est bien en quatrième année que ce modèle est le plus exprimé : la "mise en place" en est assez lente et même les élèves des classes préparatoires ne dominent peut-être pas encore assez le concept pour "spontanément" en donner une représentation où deux aspects de la convergence sont pris en compte.

5) Signalons enfin que 4 % des étudiants écrivent une tautologie, 9 % donnent des expressions incomplètes ou fausses [16] et 5 % n'abordent pas cette question.

(16) C'est dans cette catégorie que je mets le "modèle" archaïque caractérisé par "u_n ne dépasse pas ℓ" ou "u_n reste inférieur à ℓ".

III. Relation entre modèles et procédures : un exemple

Nous allons maintenant présenter brièvement la relation qu'on a pu mettre en évidence entre les modèles exprimés et les résultats obtenus à l'exercice suivant :

5) Vrai ou faux : toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

Il s'agit donc de réaliser que, si les termes d'une suite convergente sont supérieurs à leur limite, cela n'entraîne pas que la suite est décroissante ; pour justifier la réponse "faux", il suffit d'exhiber un contre-exemple. Cet exercice a été réussi (17) par moins de 25 % des étudiants de DEUG 1, par 35 % des étudiants de DEUG 2 et a donné lieu à de nombreuses erreurs (18). Très succinctement, il apparaît que les erreurs dues à des lacunes dans les connaissances antérieures (ordre sur **R**, croissance des fonctions...) disparaissent le plus rapidement ; subsistent un peu plus longtemps des erreurs explicitement liées aux modèles monotones et, surtout, des erreurs correspondant à l'idée que la suite en question n'est décroissante qu'à partir d'un certain rang.

Cela étant, on constate que, globalement, sur les 788 copies analysées, le modèle mixte est associé à 63 % des réussites (17) ; attention ! il s'agit du pourcentage des étudiants ayant réussi l'exercice parmi ceux qui ont exprimé le modèle mixte. Le modèle statique est associé à 58 % de réussites et le modèle dynamique à 50 % de réussites — alors que c'est 48 % des étudiants qui réussissent à l'exercice. Autrement dit, les représentations mixte et statique se retrouvent plus dans les copies des étudiants qui réussissent à l'exercice 5 que dans les copies de ceux qui échouent (résultat faux ou résultat juste avec démonstration fausse) ; la représentation dynamique n'est pas plus associée à la réussite qu'à l'échec ; par contre les modèles monotone et dynamique monotone sont associés à 14 % et 19 % respectivement de réussites — ceci montre à quel point ces représentations (si tant est qu'elles fonctionnent comme modèles) sont peu efficaces ici.

On peut lire autrement les résultats globaux, on obtient les mêmes tendances : parmi les 362 étudiants ayant donné une réponse juste à l'exercice 5 (avec ou sans justification), 19 % ont exprimé un modèle mixte, [alors que 14 % des 788 étudiants ont exprimé ce modèle] ; toujours parmi les étudiants ayant réussi, 16 % ont exprimé un modèle statique et 36 % un modèle dynamique [alors que 14 % des étudiants ont exprimé un modèle statique et 34 % un modèle dynamique] ; le modèle mixte est donc le plus associé à des réussites, les modèles statique et dynamique sont peu "discriminants". Quant aux modèles monotone et dyna-

(17) *Réussir* veut dire : annoncer la réponse correcte *avec ou sans* justification (correcte).

(18) A paraître.

mique monotone, ils sont exprimés respectivement par 7 % et 4 % de tous les étudiants et seulement par 2 % des étudiants ayant réussi l'exercice, ce qui confirme les résultats précédents.

Pour préciser ces résultats globaux, on peut étudier l'évolution de ces relations. Sans entrer dans les détails, on remarque que, de la 1re à la 2e année, le pourcentage de réussite parmi les étudiants ayant exprimé un modèle monotone décroît de 11 % à 3 %. On vérifie aussi que le modèle dynamique présente à tous les niveaux le caractère non discriminant déjà signalé — le pourcentage de réussite parmi les étudiants d'un niveau ayant exprimé ce modèle est à peu près identique au pourcentage de réussite global au niveau considéré. Néanmoins, en maîtrise le modèle dynamique est davantage associé à des échecs. Peut-on penser qu'en fin d'études les étudiants ayant "acquis" le concept fournissent plutôt un modèle statique ou mixte ? En DEUG 2, c'est le contraire — le modèle dynamique est légèrement plus associé à des réussites (phase intermédiaire entre l'abandon du modèle monotone et l'expression d'un modèle statique ou mixte ?)

Signalons enfin que l'étude de la relation entre les modèles exprimés et les résultats aux autres exercices confirme pleinement l'augmentation simultanée du nombre de modèles mixtes ou statiques et du nombre de réussites aux exercices — y compris parmi les étudiants ayant exprimé ces modèles.

IV. Conclusions et perspectives

a) Nous ne pouvons pas comparer les représentations exprimées par les étudiants de DEUG 1 à celles des étudiants de licence : il y a trop d'élimination parmi les premiers, trop d'étudiants qui viennent des classes préparatoires parmi les seconds. Par contre, il nous semble justifié de considérer comme significative une évolution au sein du groupe constitué par les math. sup., les math. spé (19), les étudiants de licence et de maîtrise. Or nous constatons dans ce groupe qu'il y a, de la première à la quatrième année, aussi bien un enrichissement des modèles exprimés (accroissement de l'expression du modèle mixte) qu'une amélioration des procédures. On observe, par exemple, une augmentation des changements de stratégie en cours de résolution d'exercices (20). Cela nous semble confirmer notre hypothèse implicite : l'acquisition du concept n'est pas "terminée" en première année, même si les étudiants ont de bonnes performances.

---

(19) Les spéciales comprennent des M, M', P, P'.

(20) Cela se vérifie particulièrement bien dans l'exercice 7.

Les résultats sur le groupe des étudiants de DEUG nous autorisent à nous demander si on peut même parler d'acquisition pour un certain nombre d'entre eux.

b) On constate par ailleurs que les représentations et les performances des étudiants de Math. sup. C présentent sans exception une amélioration entre le moment qui suit le cours et les exercices et le passage plus de 3 mois après le cours. Ceci n'est pas vérifié en général en DEUG 1. Or, initialement, sans entrer dans les détails, tous les enseignements présentent des contenus peu différents [21] ; le temps de l'exposition du cours est à peu près le même ; la définition figure en bonne place avec plus ou moins de commentaires et d'exemples. L'installation du modèle dynamique chez beaucoup d'étudiants, la (relativement) faible part initiale du modèle statique nous font penser que les commentaires heuristiques du début du cours impressionnent plus une partie des étudiants que tout ce qui est écrit — sans doute est-ce accentué par le caractère peu oral de la définition "en ε et N". En tout cas, ce n'est visiblement pas la simple exposition du cours qui permet une intériorisation de la définition pour un certain nombre d'étudiants ; l'exemple des math sup C conduit à penser qu'une certaine diversité et une certaine quantité d'exercices proposés peuvent jouer un rôle déterminant ; on favorise l'installation de nouveaux "modèles" en les rendant nécessaires à la résolution de problèmes où les modèles initiaux, eux, ne conduisent pas au succès. Autrement dit, c'est peut-être parce qu'elles deviennent à un certain degré de pratique indispensables — car plus économiques et plus efficaces — que les représentations mixte ou statique se mettent en place ; et ceci quelle que soit l'excellence du cours entendu ! Cette hypothèse nous semble renforcée par le fait que les étudiants savent que la définition en ε,N (par exemple) est importante — il y a dans la plupart des cours une validation importante des paragraphes intitulés "définition" ou "théorèmes" — à tel point que ces mêmes étudiants connaissent éventuellement par cœur la dite définition et même l'appliquent — mais avec des pertes de sens complètes dans certains cas (par exemple on peut trouver une limite ℓ valant $\frac{1}{n}$...). Dans le même ordre d'idées, nous nous demandons si on ne doit pas se poser le problème de la validité des "exercices d'application immédiate du cours" dont est fait un certain usage en faculté sous prétexte du faible niveau des étudiants [22]. Suivant la partie du cours utilisée et donc renforcée par ces exercices, il se peut qu'on rende de mauvais services aux étudiants, précisément parce qu'ils sont moins "forts" (exemple : ne traiter que des suites monotones pendant la première séance de travaux dirigés sur les suites).

Faciliter l'acquisition d'un concept n'est pas nécessairement en simplifier l'enseignement !

(21) *En tous cas, jugés tels par leurs auteurs.*

(22) Et parce qu'ils n'apprennent pas leurs cours.

c) Si donc l'acquisition du concept de convergence des suites n'a peut-être pas vraiment lieu pour les uns, n'est pas tout à fait complète instantanément pour les autres, qu'est-ce qui est donc précisément difficile dans ce concept ?

Il y a vraisemblablement une part relevant de "lois générales" de l'acquisition des connaissances et qui resterait vraie pour d'autres concepts. Il y a aussi vraisemblablement des difficultés propres au concept étudié. On a déjà vu que, pour certains, la création d'un "modèle" efficace est précédée de plusieurs étapes où les représentations de la convergence sont incorrectes ou insuffisantes :

— modèle spontané où le mot "limite" évoque une barrière infranchissable [23]
— modèle monotone permettant de résoudre une partie des problèmes
— modèle dynamique n'intervenant pas efficacement dans un bon nombre d'exercices...

d) L'étude complète qui est en cours sur l'ensemble des copies [24] permettra de cerner plus précisément encore la relation entre les modèles exprimés et les tâches à exécuter — en vue de dégager ultérieurement une typologie des modèles des étudiants tels qu'ils fonctionnent et pas seulement tels qu'ils sont exprimés. Simultanément, l'analyse du contenu des réponses aux différents exercices permettra d'étudier d'autres éléments spécifiques de l'utilisation du concept par les étudiants (utilisation des ε, jeux des différents formalismes — en particulier de l'écriture "algébrique", lim u_n,...). Il semble particulièrement intéressant de regarder quand et comment se met en place la possibilité de passer d'une représentation à une autre ou d'une stratégie à une autre — il y a là un des indices les plus fiables de l'acquisition du concept.

(23) Cf. B. Cornu, déjà cité.

(24) Comprenant les analyses factorielles sur les copies (codées) effectuées par Mme J. Mac Aleese.

Annexe I
Le questionnaire

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous ?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune ? Ensuite définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Vrai ou faux : toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

6) Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n > 0$.

7) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$$

est convergente.

8) Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

9) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction réelle f_n par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$$

pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbf{R}^+$ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{2}{3}$ et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

10) Est-ce que, si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge ?

11) Soit f une application continue de $[0 ; 1]$ dans $[0 ; 1]$, dérivable et telle que $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1]$. Etudier la suite définie par

$$u_0 \in \,]0 ; 1[\qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{pour } n > 0.$$

12) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est stationnaire.

Annexe II

LÉGENDE : M. : modèle (nombre d'étudiants du niveau ayant le modèle)
R. : réussite (nombre d'étudiants du niveau ayant le modèle ayant réussi)

CONTINGENCE (effectifs)		Modèle Monotone	Modèle Dynamique Monotone	Modèle Dynamique	Modèle Statique	Modèle Mixte	Total (avec les autres modèles)
DEUG tout de suite après le cours	M.	13	4	26	4	4	85
	R.	1	0	5	1	2	16
DEUG de 1 à 3 mois après le cours	M.	14	3	23	14	4	79
	R.	2	0	7	6	1	20
DEUG plus de 3 mois après le cours	M.	11	3	32	8	7	84
	R.	1	0	10	2	2	21
Sup C moins d'1 mois après le cours	M.	2	8	13	3	7	45
	R.	0	1	1	0	1	7
Sup (entre 1 et 3 mois après le cours)	M.	2	1	43	25	24	102
	R.	1	0	23	18	19	69
Sup C plus d'1 mois après le cours	M.	1	0	16	8	8	45
	R.	0	0	8	2	4	20
DEUG 2ème année	M.	13	3	30	10	6	95
	R.	1	2	13	4	2	32
Spéciales	M.	2	6	47	19	26	131
	R.	1	3	33	13	20	92
Licence = 3ème année	M.	0	3	20	5	11	52
	R.	0	0	12	3	6	29
Maîtrise = 4ème année	M.	1	0	16	13	16	68
	R.	1	0	12	11	13	56
Total	M.	59	31	268	109	113	788
	R.	8	6	129	60	70	362

Tableau de contingence : modèles / réussites à l'exercice 5
[SEULS les modèles "importants" ont été cités].

Annexe III

par F. Boschet.
Université Paris VI.

Recherche des modèles de convergence des suites numériques dans les manuels d'Analyse destinés aux étudiants du premier cycle des Universités ou aux étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques.

Liste des manuels étudiés.

Auteurs (et abréviation)	Titre	Editeur	Année de dépôt légal
PISOT, ZAMANSKY PZ	Mathématiques Générales	Dunod	1959
CAGNAC, RAMIS CR	Nouveau cours de Mathématiques Spéciales : Analyse	Masson	1961
DIEUDONNÉ Dé	Fondements de l'Analyse	Gauthier-Villars	1965
CHAMBADAL, OVAERT CO	Cours de Mathématiques	Gauthier-Villars	1966
DIXMIER Dr	Cours de Mathématiques du premier cycle	Gauthier-Villars	1967
COUTY, EZRA CE	Analyse 1	Armand Colin	1967
EXBRAYAT, MAZET EM	Analyse I	Hatier	1971
LELONG-FERRAND, ARNAUDIÈS LA	Cours de Mathématiques Analyse	Dunod	1972
CALVO, DOYEN, BOSCHET CDB	Cours d'Analyse I	Armand Colin	1976
DONEDDU Du	Nouveau cours de Mathématiques	Vuibert	1976
RAMIS, ODOUX, DESCHAMPS ROD	Cours de Mathématiques Spéciales	Masson	1976

Introduction

Cette étude présente une recherche des "images" que les manuels cités ci-dessus véhiculent à propos du concept de convergence des suites numériques.

Elle fait partie d'un travail que j'ai entrepris sur le langage des manuels, travail dont quelques objectifs sont les suivants :

- regarder si les enseignants de mathématiques, d'abord dans leur discours écrit dans les manuels, emploient tous le même langage,
- voir à l'intérieur du discours tenu par un même auteur s'il y a des changements,
- essayer de dégager si ces différences sont les indices de quelques difficultés ou de quelques particularités en liaison avec l'apprentissage des connaissances.

Ce travail ayant été entrepris en liaison avec celui d'Aline Robert présenté ci-avant, j'appellerai, comme elle, "modèles" des représentations ou images mentales associées au concept de convergence des suites numériques.

Les manuels considérés ont été publiés entre les années 1959 et 1976. Ils sont donc plus ou moins récents, ce qui m'intéresse pour étudier l'évolution du langage mathématique. D'autre part, ils sont encore utilisés dans les universités et les classes préparatoires aussi bien par les étudiants que par les enseignants. La plupart des livres étudiés ont été cités dans une enquête que j'ai menée auprès des étudiants de licence de ma section, sont dans les bibliothèques de Jussieu et dans celles des enseignants de mathématiques de mon environnement.

Ces manuels sont tous des livres destinés aux étudiants du premier cycle de l'enseignement supérieur des universités et aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques. La plupart des étudiants abordant leur lecture connaissent donc partiellement les notions de suite, de convergence de suites, de limites de suites et ont au moins étudié quelques exemples classiques de suites numériques comme les suites géométriques ou les suites arithmétiques. Cependant, on peut noter que parmi les lecteurs, certains étudiants étrangers ou certains adultes reprenant des études interrompues depuis longtemps peuvent ne pas connaître ces notions.

D'autre part, les mots : *suite, limite, convergence, converge vers, tend vers* sont des mots du langage courant que les mathématiciens ont peu à peu employés, au cours du développement de leurs théories, vraisemblablement à cause d'un lien sémantique entre le sens de ces mots dans la pratique de tous les jours et les concepts mathématiques à décrire. Des études ont été faites à Grenoble par B. Cornu en particulier, pour déterminer l'influence du sens courant des mots *limite, tend vers* dans l'apprentissage du concept mathématique correspondant, chez les lycéens de seconde.

Donc, de toutes façons, les lecteurs de ces manuels abordent leur lecture avec, en tête, une certaine représentation associée aux mots de *convergence,* de *limite,* représentation que j'appellerai "modèle antérieur" et qui a été forgée à la fois par les études précédentes et par le sens usuel des mots employés.

Pour la formation des images mentales chez les étudiants, le cours oral suivi par ceux-ci peut paraître prépondérant. Cependant, il me semble que l'influence des manuels n'est pas à négliger. En effet, les enseignants lisent ou ont lu des manuels, et les étudiants en mathématiques gardent souvent les manuels du premier cycle comme référence et les consultent tout au long de leur cursus universitaire, en particulier sur des sujets comme celui des suites qui interviennent souvent dans leurs études.

L'enquête dont j'ai déjà parlé montre que beaucoup d'étudiants achètent leurs livres et qu'ils les consultent d'abord pour résoudre des exercices et problèmes. On peut remarquer à ce propos un statut ambigu du manuel. Il présente un cours "mort", figé, statique, lu et non entendu, mais il intervient dans la pratique en réalité comme substitut du cours. Au moment où il l'utilise, en particulier en situation de recherche d'exercices, l'étudiant est fortement motivé, peut-être plus fortement que lorsqu'il assiste à un cours. Dans l'hypothèse où schématiquement on peut dire que "la connaissance passe par l'action", on peut penser que l'une des raisons essentielles de l'influence des manuels se situe là.

Donc, pour essager de cerner le contenu des manuels sur les images mentales qu'ils transmettent à propos de la convergence des suites numériques, je vais :

1°) présenter la grille d'Analyse que j'ai utilisée,

2°) donner quelques tableaux de résultats,

3°) donner des exemples d'application de la grille à certains manuels,

4°) dégager quelques résultats et conclusions.

Je précise que, n'ayant pas encore étudié de manière comparative les textes d'exercices figurant dans ces différents manuels, le travail présenté ici tient essentiellement compte du contenu du cours diffusé par ces livres.

1°) Grille d'Analyse

1.1. Etude des mots utilisés pour désigner la convergence.

En effet, certaines de ces expressions étant plus souvent utilisées dans le langage courant *(limite, tend vers)* que d'autres *(converge),* certaines ayant dans la pratique usuelle une connotation dynamique *(converge vers, tend vers)* et d'autres statique *(a pour limite, admet la limite),* on peut penser que leur utilisation influence la représentation implicite que le lecteur d'un manuel se fait de la convergence des suites.

1.1.1. J'ai commencé par relever les mots utilisés dans les énoncés des définitions de la convergence et de la limite d'une suite. Nous remarquerons d'abord que tous les auteurs utilisent la même notation pour désigner une suite (une lettre avec un indice lettre, le tout entouré de parenthèses) même si éventuellement ils citent d'autres notations possibles. Si j'appelle (u_n) la suite et ℓ la limite, on trouve les expressions suivantes, que j'ai classées en 5 groupes :

- (u_n) converge, (u_n) est convergente, (u_n) converge vers ℓ (avec ou sans "lorsque n tend vers ∞ ")
- (u_n) tend vers ℓ (avec ou sans "lorsque n tend vers $+\infty$ ").
- (u_n) admet pour limite ℓ, (u_n) a pour limite ℓ, ℓ est la limite de (u_n) (avec ou sans "lorsque n tend vers $+\infty$").
- $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = \ell$, $\lim (u_n) = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim u_n = \ell$.
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $u_n \to \ell$.

Le cas des limites infinies pour les suites réelles est considéré à part.

J'ai regroupé les résultats dans le tableau 1.

1.1.2. J'ai ensuite cherché les mots ou expressions utilisés pour désigner la convergence dans les énoncés des propositions et théorèmes sur les suites et j'ai compté leurs occurrences (résultats dans le tableau n° 2). J'ai pensé que les mots utilisés dans les énoncés sont ceux qui frappent le plus les lecteurs, surtout quand ils consultent les manuels de manière non linéaire à propos d'exercices et problèmes par exemple.

J'ai noté les incohérences éventuelles entre les lignes des tableaux 1 et 2. D'autre part, j'ai regardé si les auteurs emploient de manière privilégiée certaines expressions dans les énoncés de certains théorèmes pour déterminer ce que je pourrais appeler "l'environnement" de ces expressions. J'ai noté, dans le tableau n° 3, les expressions utilisées dans les énoncés des propriétés algébriques des suites (somme et produit de suites convergentes...), dans les théorèmes sur les suites réelles monotones, dans le critère de Cauchy et le théorème des segments emboîtés.

1.2. Recherche des modèles de convergence.

1.2.1. Dans les manuels, j'ai trouvé essentiellement la présence de deux modèles, un modèle dynamique et un modèle statique, modèles également relevés dans les réponses au questionnaire d'Aline Robert.

Le modèle dynamique est caractérisé par des représentations donnant une idée de temps ou de mouvement, par exemple lorsqu'il est dit que "(u_n) converge vers ℓ, lorsque (u_n) devient de plus en plus proche de ℓ".

Le modèle statique est associé à des représentations faisant intervenir de manière statique un voisinage de la limite et est en fait une traduction en langage courant de la définition du type : "*tout voisinage de la limite contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini*".

Je dirai que ce modèle est exprimé de manière *explicite* lorsque les auteurs accompagnent les définitions de représentations imagées, du type de celles que j'ai citées ci-dessus. Lorsque c'est le cas, j'ai relevé la phrase ou les phrases donnant explicitement le modèle. Le tableau n° 4 indique la présence ou non d'un modèle explicite de convergence dans chaque manuel.

1.2.2. Lorsque les définitions ne sont accompagnées d'aucune image, j'ai souvent pu relever, au cours des démonstrations et commentaires, des mots donnant une idée de temps, de mouvement ou de voisinage de la limite ; j'ai alors dit qu'il y a présence d'un modèle implicite de convergence. J'ai relevé ces mots, qui sont en général des mots du langage courant utilisés dans le discours mathématique sans avoir reçu une définition mathématique précise. J'ai d'autre part essayé de déterminer si ces mots apparaissent à des moments privilégiés du discours.

1.2.3. Le questionnaire d'Aline Robert a mis en évidence, entre autres, que pour beaucoup d'étudiants débutants la notion de convergence est asssociée à une notion de monotonie. On ne retrouve évidemment pas cette représentation dans les manuels. J'ai toutefois regardé si les manuels mettent les étudiants en garde contre cette erreur ou si au contraire, ils peuvent en un certain sens la favoriser par les exemples et les dessins qu'ils fournissent. Pour chaque manuel, j'ai donc relevé s'il y a lieu les premiers exemples de suites et les dessins qui de toutes façons donnent une représentation de la convergence.

2°) Tableaux de résultats.

Tableau 1. Expressions employées dans les définitions.

expressions / auteurs	converge vers	tend vers	est la limite a pour limite admet pour limite	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$	$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$
PZ* 59	x	x		x	x
CR 61	x	x	x	x	x
Dé 65	x		x	x	
CO 66	x	x		x	x
Dr 67		x		x	x
CE 67	x		x	x	
BM 71	x	x	x		x
LA 72	x	x	x	x	
CDB 76	x		x	x	x
Du 76	x		x	x	
ROD 76	x		x	x	

* Voir abréviations, page 664.

Tableau 2. Expressions employées dans les énoncés des propositions et théorèmes.

expressions / auteurs	converge converge vers est convergente	tend vers	est la limite a pour limite admet pour limite	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$	$u_n \to \ell$
PZ 59	36	1	1	1	
CR 61	4	2	34		
Dé 65	2		1	8	
CO 66	58	2	4		
Dr 67		4	7	12	4
CE 67	13	1	14	3	
EM 71	35	16	4	20	2
LA 72	19	15	7		
CDB 76	19	1	2	6	
Du 76	4	1	5	16	
ROD 76	19		9	4	

Tableau 3. Expressions ou notations employées dans certains théorèmes.

théorèmes / auteurs	propriétés algébriques des suites numériques	théorèmes sur les suites réelles monotones	critère de Cauchy	théorème des segments emboîtés
PZ	converge vers	est convergente	converge	
CR	admet la limite	est convergente		tend vers 0
Dé		$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ f(x) \in E}} f(x)$ existe	est convergente	
CO	converge et sa limite est	converge	converge	tend vers 0
Dr	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$	a une limite	a une limite	
CE	converge et a pour limite	a une limite	convergente	tend vers 0
EM	converge vers, tend vers $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$	converge	converge	tend vers 0
LA	tend vers	a une limite finie	convergente	tend vers 0
CDB	converge vers $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$	est convergente	converge	tend vers 0
Du	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$	admet une limite	converge	tend vers 0
ROD	énoncés en utilisant le concept de morphisme	converge	$\mathbb{R}$ est complet	$\lim \partial (F_n) = 0$

Tableau 4. Modèles Explicités.

Auteurs \ Modèles	Modèle dynamique	Modèle statique
PZ 59		x
CR 61		x
Dé 65		x
CO 66		x
Dr 67		x
CE 67	x	x
EM 71		
LA 72		
CDB 76		
Du 76		
ROD 76		

3°) Commentaires

3.1. Résultats concernant les expressions utilisées.

3.1.1. De manière générale, les expressions du premier groupe *converge, converge vers, est convergente* sont les plus utilisées. Un seul auteur (Dixmier) ne les utilise jamais dans un énoncé. Ces expressions sont assez peu employées dans le langage usuel ; on peut donc penser qu'elles font moins appel au "modèle antérieur".

3.1.2. On peut remarquer que beaucoup d'auteurs ont une préférence marquée dans leurs énoncés pour un certain type d'expressions et on peut alors vérifier que ces expressions se retrouvent de manière majoritaire dans les démonstrations, commentaires et exemples.

3.1.3. L'expression *tend vers* est assez peu utilisée pour désigner la convergence sauf dans deux manuels. Elle n'est même pas donnée dans les définitions des trois manuels les plus récents, ce qui entraîne des incohérences pour deux d'entre eux qui l'utilisent néanmoins. Cette expression semble le plus souvent réservée pour désigner un certain type de divergence des suites réelles. On trouve dans tous les manuels, sauf celui de Dieudonné, les expressions *tend vers* $+\infty$, *tend vers* $-\infty$, associées aux notations $u_n \to +\infty$, $u_n \to -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$.

3.1.4. Pour les notations entièrement symboliques

$$\text{“}u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell\text{”} \quad , \quad \text{“}\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \ell\text{”}$$

on peut remarquer que la notation “$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$” est très peu employée (seulement dans deux manuels), et trois manuels n'utilisent aucune de ces expressions.

3.1.5. En ce qui concerne “l'environnement” de ces différentes expressions, il ne semble pas y avoir de régularités sauf en ce qui concerne *tend vers* et $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$.

Dans tous les manuels qui énoncent le théorème dit “des intervalles emboîtés” sauf un (Ramis-Odoux-Deschamps), on trouve l'expression *dont la longueur tend vers 0*. Dans ces manuels, on retrouve également *tends vers 0* lorsque ce théorème est utilisé par exemple pour des suites adjacentes ou pour la démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

L'expression *tend vers* semble donc plus particulièrement attachée aux limites infinies des suites réelles et au théorème des intervalles (ou segments) emboîtés.

Quant à l'expression “$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$”, lorsqu'elle est employée, elle l'est plus particulièrement dans les énoncés des propriétés algébriques des suites convergentes (théorème sur la somme, le produit des suites convergentes...) qu'elle permet d'écrire de manière commode. On peut remarquer cependant que parmi toutes les expressions qui sont associées au concept de convergence, c'est celle qui présuppose le plus l'existence de la limite.

3.2. Résultats concernant les modèles.

3.2.1. Le modèle dynamique ne se trouve explicitement que dans un seul manuel (celui de Couty-Ezra) sous la forme : “Lorsque n prend des valeurs entières successives, u_n prend des valeurs de plus en plus voisines de 0”. Par contre, le modèle statique accompagne les définitions des manuels les plus anciens mais aucun modèle ne figure de manière explicite dans les manuels les plus récents.

3.2.2. Dans la plupart des livres, sauf un (celui de Dieudonné), nous avons trouvé des traces du modèle dynamique dans des expressions comme :
— “à partir d'un certain rang” (dans la plupart des manuels).
— “au-delà d'un certain rang” (Exbrayat-Mazet).
— “quand n devient infini” (Pisot - Zamansky).
— “quand n dépasse un certain entier n_0” (Dixmier).
— “approcher par des nombres décimaux” (Lelong-Ferrand).

— "la distance peut être rendue arbitrairement petite pour des valeurs de n assez grandes (Calvo).
— "valeurs approchées de mieux en mieux" (Doneddu).
— "suite oscillante" (Ramis-Odoux-Deschamps).

Les verbes *devenir*, *dépasser*, *approcher*, *osciller*, *rendre petit* donnent clairement une idée de temps ou de mouvement.

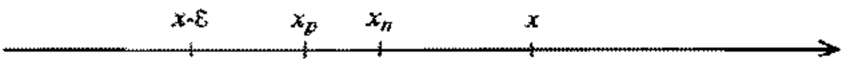
Le mot *rang*, en particulier dans l'expression *à partir d'un certain rang*, se retrouve dans beaucoup de manuels sans jamais être défini. On peut l'associer à une idée de déroulement et par suite à une idée de temps donc au modèle dynamique, bien que cela soit moins clair que pour les verbes précédemment cités.

Dans les manuels où le verbe *tend vers* est peu employé et même quelquefois pas défini, on peut penser qu'il garde une connotation dynamique, alors que le verbe *converge vers*, qui fait partie intégrante du langage spécialisé, l'a perdue.

De manière générale, on peut remarquer que ce type d'expressions apparaît le plus souvent :
— soit dans les exemples,
— soit lorsque les auteurs utilisent les suites, en particulier pour la construction des nombres réels,
— soit lorsqu'ils abordent des théorèmes ou des notions jugées plus difficiles. La présence d'une difficulté semble donc favoriser un langage qui fasse plus appel à l'intuition.

3.2.3. Pratiquement, aucun manuel ne se préoccupe de l'image monotone des suites chez certains étudiants.

Par ailleurs, on peut être frappé par le peu de dessins. Un seul livre assez ancien (Cagnac-Ramis) donne des représentations graphiques assez nombreuses ; trois autres donnent une représentation graphique assez succincte qui figure les éléments d'une suite sur une droite par exemple (Lelong-Arnaudiès).



Conclusion

Les auteurs des manuels ont de plus en plus tendance à présenter les mathématiques sous une forme achevée, en les débarrassant de toutes les images ou de tous les mots qui peuvent servir d'ancrage dans le domaine de la pratique.

On peut se demander, justement dans la mesure où on peut penser que cet ancrage est nécessaire à la pensée à l'œuvre, si le fait de présenter les mathématiques de plus en plus sous une forme déductive n'est pas en contradiction avec un usage courant des manuels à l'occasion de la recherche de problèmes.

Les manuels, en ne présentant que la phase finale de mise en forme déductive, ne présentent qu'une des facettes de l'activité mathématique.

D'autre part, ce travail pose le problème de l'équivalence des différents formalismes utilisés pour représenter le même concept. En utilisant les méthodes linguistiques de l'analyse distributionnelle dans la suite de mon travail, j'espère trouver des éclaircissements à cette question.

Enfin, la présence de mots non définis mathématiquement et leur apparition fréquente dans certain contexte posent le problème des présupposés dans un texte mathématique et de leur rôle.