Le proximal de *n* points*

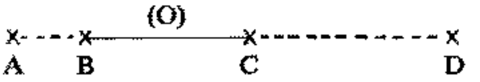
par E. EHRHART, Strasbourg

Quel est le point dont la somme des distances aux sommets d'un triangle est minimale ? Ce problème a déjà été traité par Torricelli, Cavalieri** et Fermat. Récemment une solution a paru dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.***. Elle révèle une curieuse discontinuité :

- si le triangle a un angle d'au moins 120°, son sommet est le point cherché O ;
- sinon il existe un point d'où l'on voit les côtés sous le même angle, et O est ce point.

Nous allons — élémentairement — résoudre le problème pour n points quelconques, distincts ou non, du plan ou de l'espace. Il est important en mathématiques appliquées ; il se pose par exemple quand on cherche la "meilleure" solution pour l'emplacement d'une école intercommunale;

Dans toute la suite *nous écarterons implicitement le cas des points alignés,* qui ne présente aucune difficulté. Retenons seulement que dans ce cas O est souvent indéterminé, sur un segment (O). Pour 4 points par exemple :



Voici d'abord une liste de définitions, un peu ennuyeuse peut-être mais indispensable.

DEFINITIONS. On appelle *proximal de n points* A_i le point tel que sa distance moyenne $\frac{\Sigma r_i}{n}$ aux A_i soit minimale. On appelle *point de Torricelli* des A_i le point T (s'il existe) tel que la résultante des vecteurs unitaires visant de T vers les A_i soit nulle. Un *ovale* ou un *ovoïde* est une courbe ou une surface convexe fermée. Il est *lisse* s'il n'a pas de point anguleux ou

---

* Extrait d'une conférence faite à la Régionale de Strasbourg de l'A.P.M.E.P. en mai 1981.

** Cavalieri, *Exercitationes geometricae* (1647).

*** Jean de Biasi, *Quelques problèmes d'extremum* (décembre 1980). Voir aussi la note de J.M. Chevallier dans ce numéro, page 731.

conique. Dans le plan, nous appelons *focale** la courbe lieu des points dont la somme s des distances à n points fixes est constante. Dans l'espace, on définit de même la *surface focale*. Les points fixes sont ses *foyers*.

On désigne par s_0 *le minimum de* s pour n foyers donnés.

I. Tangente en un point d'une courbe focale.

Théorème 1.

1) La normale en un point d'une focale est la résultante $\vec{R}$ *des vecteurs unitaires visant de ce point vers les foyers.*

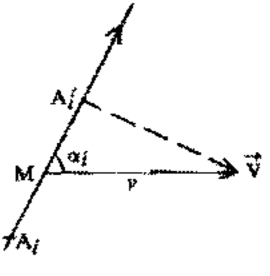
2) Si la focale passe par un foyer F, *ce point est anguleux. La résultante* $\vec{R}'$ *des vecteurs unitaires, visant de* F *vers les autres foyers, bissecte l'angle* 2α *des demi-tangentes en* F *et* $\cos\alpha = \dfrac{1}{R'}$ ($\cos\alpha = \dfrac{k}{R'}$ *pour un* F *multiple d'ordre* k), où $R' = \|\vec{R}'\|$.

3) Pour $s = s_0$ *la focale se réduit à un point. Pour* n *foyers donnés, il existe juste une focale-point* O. *Ou bien* $R'_F \leqslant 1$ *en un des foyers* ($R'_F \leqslant k$ *si* F *est d'ordre k), qui est alors* O ; *ou bien* $\vec{R}'_M = 0$ *pour un point* M *du plan, et alors ce point est* O.

On pourrait démontrer ce théorème avec le gradient. Nous le ferons plus élémentairement par la cinématique.

1) Soit M le point qui décrit la focale de foyers $\underset{1 < i < n}{A_i}$ et $\overrightarrow{MV}$ son vecteur vitesse. Projetons $\overrightarrow{MV}$ en $\overrightarrow{MA_i'}$ sur l'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{A_iM}$.

Alors $$\overline{MA_i'} = \frac{d\overline{A_iM}}{dt} = v\cos\alpha_i .$$



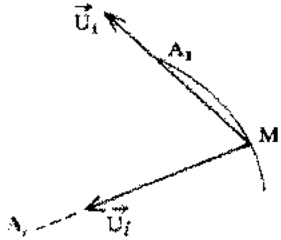
*Ne pas confondre avec les focales de Darboux en optique.

La constance de ΣA_iM entraîne donc

$$\Sigma v\cos\alpha_i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\cos\alpha_i = 0.$$

Cette égalité exprime que la projection de $\vec{R}$ sur $\overrightarrow{MV}$ est nulle : $\vec{R}$ est la normale en M.

2) Soient A_1 et M un foyer et un point quelconque situés sur la focale. Soient $\vec{U}_i$ les vecteurs unitaires visant de M vers les foyers A_i et $\vec{R} = \vec{U}_1 + \sum_{i=2}^{n} \vec{U}_i$ leur résultante, normale à la courbe.



Quand M tend vers A_1, $\vec{U}_1$ tend vers un vecteur unitaire tangent $\vec{U}$ et $\sum_{i=2}^{n} \vec{U}_i$ tend vers $\vec{R}\,'$, de sorte que $\vec{R}$ tend vers le vecteur $\vec{U} + \vec{R}\,'$, normal à la courbe en A_1.

Par suite, $\vec{t}$ désignant la demi-tangente opposée à $\vec{U}$,

$$\vec{U}\,(\vec{U} + \vec{R}\,') = 1 - R'\cos(\vec{t},\vec{R}\,') = 0$$

et

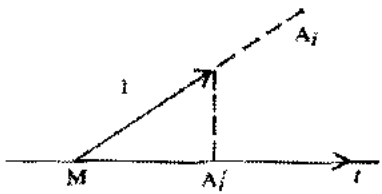
$$\cos(\vec{t},\vec{R}\,') = \frac{1}{R'}\ .$$

Si A_1 est un foyer d'ordre k, k vecteurs unitaires visent de M vers A_1. La démonstration est alors analogue.

3) Par chaque point M du plan passe juste une focale de foyers A_i, car $\Sigma MA_i = s$ donne un s unique. Si cette focale se réduit à un point (on verra que cela arrive pour $s = s_0$), il n'y a en ce point ni tangente ni demi-tangentes. Or, d'après ce qui précède, cela ne peut se faire que si $\overrightarrow{R_M} = \vec{0}$, ou si M est un foyer F et si $R_F' < 1$ ($R_F' < k$ pour un foyer d'ordre k).

Théorème 2. *Toute focale est ovale. Elle est lisse si elle ne porte pas de foyer.*

Il est presque évident que la courbe est fermée. Pour démontrer qu'elle est convexe, il suffit de montrer qu'elle n'a pas de tangente double. Soit M un point quelconque d'une tangente orientée $\vec{t}$ d'une focale lisse de foyers $\underset{1<i<n}{A_i}$. Projetons sur $\vec{t}$ en $\overline{MA_i'}$ le vecteur unitaire qui vise de M vers A_i. Quand M parcourt $\vec{t}$, $\overline{MA_i'}$ décroît de 1 à -1. Par suite $\Sigma\overline{MA_i'}$, mesure algébrique de la projection sur $\vec{t}$ de la résultante $\vec{R}$ des vecteurs unitaires, s'annule pour juste une position de M : $\vec{t}$ est tangente simple. Cela est encore vrai si A_i se trouve sur $\vec{t}$, car alors $\overline{MA_i'}$ est égal à 1 ou à -1 suivant que M précède ou suit A_i. Le $\Sigma\overline{MA_i'}$ ne peut donc s'annuler en deux points de $\vec{t}$.

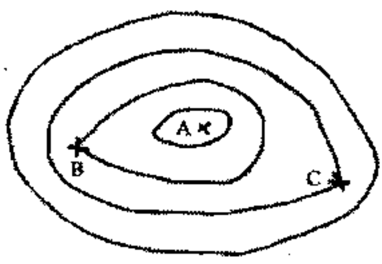


II. Le proximal de n points, du plan ou de l'espace.

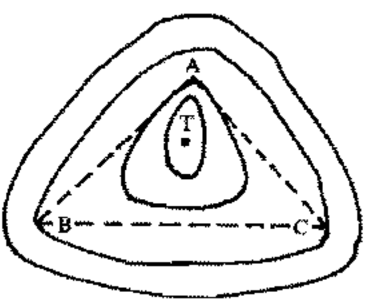
Voici le résultat essentiel de cette note :

Théorème 3. *Il existe toujours juste un proximal* O *pour n points donnés* A_i *(non alignés) du plan ou de l'espace. Désignons par* $\vec{R}_i'$ *la résultante des vecteurs unitaires visant de l'un des* A_i *vers les autres. Ou bien* $R_i' < 1$ *pour l'un des* A_i ($R_i' < k$ *pour un* A_i *multiple d'ordre* k *), qui est alors* O ; *ou bien les* A_i *ont un point de Torricelli, et c'est lui qui est le proximal**.

Remarque. Ce théorème s'applique sans doute quelle que soit la dimension de l'espace.



O = A



O = T

*La construction avec règle et compas du point de Torricelli de n points quelconques du plan est un problème ouvert, probablement impossible.

Soit r_i la distance d'un point M du plan à A_i. Si s varie, les focales de foyers A_i définies par $\Sigma r_i = s$ sont des ovales emboîtés, car deux de ces focales ne peuvent se couper. Quand s tend vers s_0, la focale tend vers la focale-point O. Or on a vu que, ou bien O est un des A_i (si $R_i' < 1$, ou si $R_i' < k$ pour un A_i multiple), ou bien les A_i ont un point de Torricelli, et c'est lui qui est O.

Pour l'espace, le théorème 3 résulte de même de la proposition suivante, qu'on établit comme les théorèmes 1 et 2.

Théorème 4. *La normale en un point d'une surface focale est la résultante des vecteurs unitaires visant de ce point vers les foyers.*

Si la focale passe par un foyer F *, ce point est conique. Le cône tangent en* **F** *est de révolution. Il a pour axe la résultante* $\vec{R}'$ *des vecteurs unitaires visant de* F *vers les autres foyers, et sa demi-ouverture est donnée par* $\cos\alpha = \frac{1}{R'}$ *(ou* $\cos\alpha = \frac{k}{R'}$ *, si* **F** *est multiple d'ordre* k *).*

Toute focale est un ovoïde, qui est lisse s'il ne porte pas de foyer.

III. Remarques de mécanique.

1) *Si le proximal* O *des* A_i *est attiré par ces points avec des forces égales, il reste en équilibre stable.* En effet, en un point d'une focale associée aux A_i, la résultante des forces est normale à l'ovale (ou à l'ovoïde) et dirigée vers l'intérieur. On peut matérialiser les attractions égales à l'aide de poids égaux attachés à un point par des fils (sauf en un A_i, car son attraction par lui-même n'est pas définie).

2) La résultante $\vec{R}$ des attractions unitaires exercées par les A_i sur un point du plan (ou de l'espace) crée un champ de forces. *Ses lignes de forces concourent en* O. *Les focales associées aux* A_i *sont leurs trajectoires orthogonales (ou leurs surfaces orthogonales).*

3) Si un point, astreint à se déplacer sans frottement sur une focale lisse, est soumis uniquement à des attractions unitaires par les foyers, *son mouvement est uniforme, et sa trajectoire est une ligne géodésique si la focale est une surface.*