A bas abébarre !

par une équipe du lycée Jean-Moulin, de Lyon*

1. $\overline{AB}$: qu'est-ce que c'est ?

Soit V l'ensemble des vecteurs géométriques du plan, et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de V. A tout élément $\vec{u}$ de V correspond un couple de réels (a,b), unique, tel que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$; (a,b) est le couple des coordonnées (ou des composantes) de $\vec{u}$ pour la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Dans l'ensemble des vecteurs géométriques de l'espace, on définit de même le triplet des coordonnées d'un vecteur pour une base choisie.

Et dans l'ensemble W des vecteurs géométriques de la droite, il en va de même encore ; une fois choisi un vecteur $\vec{i}$ non nul, le "1-uplet" $(\vec{i})$ est une base (on dit plutôt : "$\vec{i}$ est le vecteur unitaire choisi"), et à tout élément $\vec{z}$ de W correspond un réel unique a tel que $\vec{z} = a\vec{i}$.

Ce réel a est *la* coordonnée (ou *la* composante) de $\vec{z}$ pour la base $(\vec{i})$.

$\overline{AB}$ n'est rien d'autre qu'une désignation de ce réel :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$$

Remarquons déjà que, dans ce qui précède, nous l'avons, sans inconvénient, désigné par la lettre a .

2. Dénomination

$\overline{AB}$ se lit souvent "mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$" (en sous-entendant "pour le vecteur unitaire $\vec{i}$").

Le mot "mesure" ne se justifie guère ici, puisqu'en principe il désigne un réel positif**. C'est sans doute pourquoi on lui accole l'adjectif "algébrique", qui est ainsi mal employé : il survit ici dans l'acception de "positif ou négatif", alors qu'on l'y avait cru supplanté par "relatif" ; ainsi, le réel π, non algébrique, peut très bien être la "mesure algébrique" d'un vecteur...***.

* Serge BETTON, Jean CLERJON, Louis DUVERT, Jean-Paul GUICHARD

** On l'utilise à propos de grandeurs... mesurables, par exemple les longueurs : on définit le produit d'une longueur par un réel positif ; on choisit une longueur u (non nulle) comme longueur-unité ; dès lors, à toute longueur d correspond un nombre positif et un seul, λ, tel que $d = \lambda u$; λ est la mesure de d quand on prend u comme unité.

*** Certains disent "mesure de $\overrightarrow{AB}$" ; ils sous-entendent ainsi "positive ou négative", et ils admettent que le mot "mesure" puisse ne pas toujours désigner un nombre positif.

Nous pensons que la meilleure dénomination est "coordonnée" (ou "composante") ; ou, à la rigueur, si on désire vraiment éviter le préfixe "co" ou "com" (qui évoque une pluralité de nombres), "abscisse". Si on craint que l'emploi simultané de "abscisse d'un vecteur" et "abscisse d'un point" crée la confusion entre "vecteur" et "point", il faut *aussi* renoncer, pour la même raison, à employer simultanément, en géométrie plane, "coordonnées d'un vecteur" et "coordonnées d'un point".

Ainsi, la notation $\overline{AB}$ pose déjà de sérieux problèmes de vocabulaire quand il s'agit de la dénommer. (Dans la suite, nous la dénommerons "abébarre"...)

3. Mais il convient plutôt de se demander si la notation $\overline{AB}$ elle-même — de quelque façon qu'on la dénomme — est utile dans l'enseignement du premier cycle (et peut-être du second ?).

3.1. Notons qu'elle n'a pas d'équivalent en géométrie plane ou spatiale ; personne, à notre connaissance, n'a éprouvé le besoin de noter $(\overline{AB},\overline{\overline{AB}})$, ou $(\overset{1}{\overline{AB}}, \overset{2}{\overline{AB}})$, le couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, élément de V...

Notons encore qu'on utilise peu (semble-t-il) la notation $\overline{u}$ pour désigner la "mesure algébrique" du vecteur $\vec{u}$, élément de W. Autrement dit, on renonce souvent à noter la coordonnée de $\vec{u}$ tant qu'on ne dispose pas d'un représentant (A,B) du vecteur $\vec{u}$ ... Si l'on se passe de $\overline{u}$, pourquoi ne se passerait-on pas de $\overline{AB}$?

3.2. En fait, on peut très bien, sur la droite, désigner par une lettre, par exemple a, la coordonnée de $\vec{z}$ $(\vec{z} = a\vec{i})$, tout comme on mobilise deux lettres (ou trois) pour les coordonnées d'un vecteur du plan (ou de l'espace).

C'est aussi cette attitude qu'on adopte quand on note x (par exemple) l'abscisse d'un point M sur un axe.

3.3. Où pourrait bien se nicher l'utilité de "abébarre" ?

• Dans la "formule de Chasles", $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$? Sûrement pas. Car la "bonne" égalité de Chasles, celle qui est vérifiée quels que soient les points A,B,C (*de la droite, ou du plan, ou de l'espace*), c'est l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

alors que

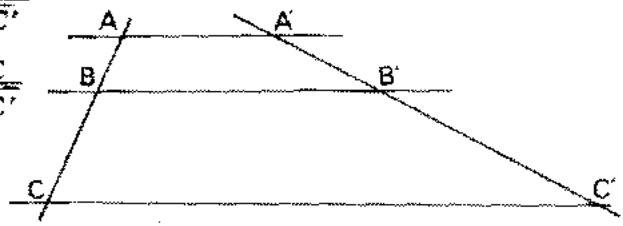
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

n'est vérifiée à coup sûr que si A,B,C sont alignés. On évite de nombreuses erreurs aux élèves en utilisant la seule égalité vectorielle, que les points A,B,C soient alignés ou non.

• Dans "Thalès" ? Elle permet de passer (voir ci-contre la figure classique, où $AA' \parallel BB' \parallel CC'$)

de $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

à $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$



Cette utilité-là nous paraît bien peu convaincante :

— d'une part parce que, si on veut absolument "échanger les moyens ou les extrêmes d'une proportion" (encore des vieilleries...), rien n'empêche de recourir à la notation du 3.2. ; $\vec{AB} = a\vec{i}$, etc.

— d'autre part, parce qu'il nous paraît exceptionnel au premier cycle d'avoir à utiliser le "Thalès raffiné" qui est évoqué plus haut ; le "Thalès des valeurs absolues" ($\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$) n'est-il pas amplement suffisant ? (Si le besoin s'en fait sentir — par exemple pour démontrer que $CC' \parallel BB'$ sachant que $BB' \parallel AA'$ —, on peut toujours utiliser une forme vectorielle du type :

Si $\vec{AC} = k\vec{AB}$, alors $\vec{A'C'} = k\vec{A'B'}$)

De quel(s) Thalès se servent les professeurs de physique, en optique en particulier ?

Alors ? "abébarre" est-il vraiment indispensable au premier cycle ? Ou bien n'est-il qu'un héritage désuet, de la même veine que "partie aliquote", "carré parfait", "arc capable", "triangle (A,B,C)", "sécante" et "cosécante", etc. ?

4. Nous pensons qu'il est inutile. Et déjà, sa disparition allégerait la liste des notations, si proches les unes des autres, à laquelle l'élève est confronté :

$$AB\ ,\ [AB]\ ,\ (A,B)\ ,\ [A,B]\ ,\ \vec{AB}\ ,\ [AB),\ldots$$

Mais, de plus, il nous paraît nuisible :

Nous avons déjà parlé de $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, qui fait des ravages dans le premier cycle, tant les élèves l'appliquent volontiers à trois points non alignés.

Plus profondément, ils savent en général fort mal ce que signifie $\overline{AB}$. Bien peu d'entre eux sont conscients qu'il ne signifie rien tant qu'on *n'a pas choisi* un vecteur unitaire pour la droite AB. La notation $(\overline{AB})_{\vec{i}}$ serait théoriquement plus satisfaisante, mais bien lourde.

On nous rétorquera qu'on n'explicite pas davantage la base choisie quand on note (a,b) ou $\binom{a}{b}$ le couple des coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ de V (ou a la coordonnée d'un vecteur z de W). On pallie facilement cette imprécision en remplaçant :

$\vec{u}$ a pour couple de coordonnées (3;5) par $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\overline{AB} = 3$ par $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$

Seulement, voilà ! Le produit d'un vecteur par un réel n'est pas au programme de quatrième alors que $\overline{AB}$ y figure. Ce qui relève de l'hypocrisie ; car parler de $\overline{AB}$, qu'on le veuille ou non, c'est introduire le produit d'un vecteur par un réel, mais de façon camouflée et finalement nocive.

Il serait préférable, tant du point de vue pédagogique que du point de vue mathématique, de mettre en Quatrième le produit d'un vecteur par un réel, lié à l'abscisse d'un point sur un axe, et d'enlever $\overline{AB}$. On y gagnerait par ailleurs une plus grande souplesse dans le fonctionnement des vecteurs en quatrième.

5. Ne s'agirait-il pas, justement, dans l'esprit des auteurs des programmes et de beaucoup de leurs utilisateurs, d'empêcher que les vecteurs tiennent trop de place en quatrième et plus généralement dans le premier cycle ?

A notre avis, deux attitudes sont cohérentes :

• Ou bien on estime que les vecteurs dépassent les capacités d'abstraction mathématique des élèves du premier cycle ; alors, qu'on les supprime, complètement, des programmes de ce niveau. On peut, certes, faire à ce niveau de la bonne géométrie (bien que parfois moins rigoureuse) sans les vecteurs.

• Ou bien on tient aux vecteurs ; alors, qu'on leur accorde, dès la quatrième, assez d'importance pour que l'effort demandé aux élèves soit payant, pour que les vecteurs soient pour eux un outil d'usage fréquent et efficace.

Actuellement, on reste assis entre deux chaises : un peu de vecteurs (assez pour empoisonner les élèves) mais pas trop (trop peu pour que la notion fonctionne). On "contourne" souvent un vecteur en passant par un couple de réels : $\binom{a}{b}$ plutôt que $a\vec{i}+b\vec{j}$, ou par un réel : $\overline{AB}$ plutôt que $\overrightarrow{AB} = z\vec{i}$, etc.

6. Revenons à "abébarre".

Voilà des années que nous le transmettons — que nous essayons de le transmettre ! — à nos élèves, et qu'il traverse, impavide, les divers changements de programmes.

Qu'en pensent nos collègues ? Y tiennent-ils vraiment ? Réussissent-ils à le "faire passer" ? Y a-t-il des secteurs de l'activité mathématique au premier cycle où il soit indispensable ? N'est-il pas plus nuisible qu'utile ?

A-t-il des défenseurs ?

Sinon, notre position est claire : dé-barr-assons – nous de "abébarre" !