Stratégie optimale des mises en jeu à deux engagements

par J.-B. HIRIART-URRUTY,
Université Paul Sabatier, Toulouse

Dans certains jeux de pelote basque (comme la cesta-punta) ou, plus familièrement, dans le jeu de tennis, les joueurs ont la possibilité de faire la mise en jeu en deux engagements (deux buts en cesta-punta, deux services au tennis, etc.). Tout le monde a remarqué que, par exemple, pratiquement tous les joueurs de tennis engagent le jeu par un premier service différent du second. Le premier service est en général plus *"risqué"* que le second, c'est-à-dire qu'il a plus de chances d'être out. Cela est dû notamment au fait que le serveur frappe plus fort la première balle ou bien qu'il vise davantage les limites de l'aire permise. Par contre, la deuxième balle est plus *"assurée"*. On peut se demander si la stratégie que l'on vient de décrire (notée (1)) est la meilleure ou bien s'il ne serait pas préférable d'adopter une des autres attitudes suivantes :

(2) engager par deux services consécutifs "risqués" ;
(3) essayer deux fois de suite un service "assuré" ;
(4) engager par un premier service "assuré" et, en cas d'échec, tenter un deuxième service "risqué".

Le bon sens indique que la stratégie (1) est meilleure que les autres, du moins pour l'objectif sous-entendu ici et qui est de *faire le point au cours de la mise en jeu.* Nous allons analyser cette question en utilisant un modèle mathématique très simple.

1. Description du modèle.

Dans un jeu donné, un joueur peut faire la mise en jeu en utilisant au plus deux engagements (deux services au tennis). Le joueur considéré sait engager le jeu de plusieurs manières différentes. Appelons S l'ensemble éventuellement infini des types d'engagements possibles. A chaque engagement s élément de S, on associe deux probabilités $p(s)$ et $q(s)$:

$p(s)$ est la probabilité que l'engagement soit "bon", c'est-à-dire acceptable du point de vue des règles du jeu,

$q(s)$ est la probabilité de *faire le point* avec cet engagement quand il est bon (probabilité conditionnelle, donc).

Ainsi la probabilité de faire le point en utilisant l'engagement s est

$$g(s) = p(s)\, q(s).$$

Il est à présumer que plus $p(s)$ est grand, plus faible est $q(s)$. Intuitivement, cela correspond au fait que plus l'engagement est assuré, plus il a de chances d'être retourné et par conséquent moins de chances d'être victorieux. Naturellement, un engagement s avec $p(s)$ et $q(s)$ faibles est à écarter...

La *stratégie* du joueur consistera à choisir un couple (s_1, s_2) élément de S^2 où s_1 et s_2 désignent respectivement le premier et le deuxième engagement et ce, de façon à *maximiser la probabilité de faire le point au cours de la mise en jeu*. Lorsque la stratégie (s_1, s_2) est utilisée, la probabilité $P(s_1,s_2)$ de faire le point est :

$g(s_1)$ pour le premier engagement,

$[1 - p(s_1)]\ g(s_2)$ si le premier engagement a été un échec,
soit en définitive

$$P(s_1, s_2) = g(s_1) + [1 - p(s_1)]\ g(s_2). \qquad (1)$$

Une stratégie optimale (s_1^*, s_2^*) est celle qui maximisera $P\ (s_1,s_2)$ sur S^2. Comment trouver une telle stratégie ? Plaçons-nous dans la situation du joueur dont le premier engagement n'a pas été bon. Il ne lui reste qu'*un* engagement possible. Par conséquent, il choisira s_2^* de façon à maximiser $g(s)$ sur S :

$$g(s_2^*) = \max_{s \in S} g(s) = g^*.$$

Quant à s_1^*, il doit rendre maximum $g(s) + [1 - p(s)]g^*$. Il est clair que la stratégie (s_1^*, s_2^*) ainsi obtenue est optimale. La figure ci-dessous illustre le calcul de (s_1^*, s_2^*) par un procédé graphique simple.

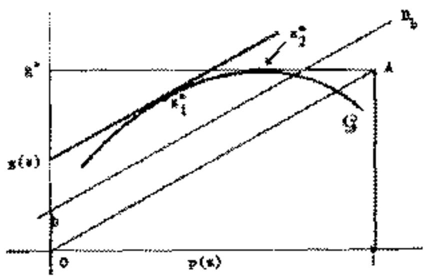

Figure 1

On représente le graphe $\mathcal{G}$ de l'application $s \to (p(s),g(s))$ dessiné ici pour un ensemble S non discret). La visualisation du choix de s_2^* est immédiate. Pour ce qui est du calcul de s_1^*, remarquons que OA a pour pente g^* ; par conséquent, les points qui sont à la fois sur $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire de coordonnées $(p(s),g(s))$) et sur une droite D_b parallèle à OA (d'équation $g = g^*p + b$) ont des coordonnées de la forme :

$$(p(s), g(s) = g^*p(s) + b).$$

Maximiser $g(s) - g^*p(s)$ revient donc à rendre maximum l'ordonnée b ; on arrive ainsi à la situation "tangente" qui permet la détermination de s_1^*.

2. Interprétation

Dans le cas visualisé par la figure 1, le joueur doit en effet utiliser deux engagements s_1^* et s_2^* différents, le premier étant plus risqué $(p(s_1^*) < p(s_2^*))$. Il est tout à fait possible d'avoir $s_1^* = s_2^*$; c'est le cas lorsque, en dehors de l'engagement s^* qui "fait pour le mieux" (c'est-à-dire maximisant $g(s)$), les autres engagements ne sont pas performants (probabilité de faire le point faible même lorsque $p(s)$ est petit).

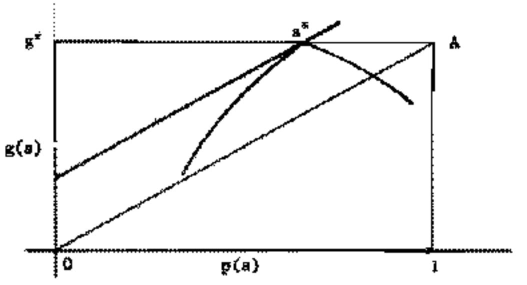

Figure 2

Examinons d'un peu plus près le cas où $S = \{s_1, s_2\}$. Imaginons par exemple qu'il s'agisse du tennis et que le joueur concerné, piètre serveur comme l'auteur, ne sache servir que de deux façons différentes. A s_1 et s_2 sont associées les probabilités (p_1, q_1, g_1) et (p_2, q_2, g_2) définies plus haut. On suppose que $p_1 < p_2$, c'est-à-dire que le service s_1 est plus risqué que s_2. Le service s_2 doit être utilisé à la deuxième balle s'il fait mieux que s_1, autrement dit si $g_2 \geqslant g_1$. Pour la première balle, il faudra utiliser s_1 si $P(s_1,s_2) \geqslant P(s_2,s_2)$. En conséquence, (s_1,s_2) est une stratégie optimale si et seulement si

$$\text{et} \quad \left| \begin{array}{l} g_2 \geqslant g_1 \\ g_1 \geqslant g_2[1-(p_2-p_1)] \end{array} \right. \qquad (2)$$

Si la deuxième inégalité n'est pas vérifiée, la stratégie optimale est (s_2,s_2) (le service assuré pour les deux balles). De même, si la première inégalité n'est pas satisfaite, la stratégie optimale est (s_1, s_1), c'est-à-dire le service risqué pour les deux balles.

Donnons quelques exemples :

Exemple 1 :

$$s_1 : p_1 = 0,4 \qquad q_1 = 0,8 \qquad \Rightarrow g_1 = 0,32$$
$$s_2 : p_2 = 0,9 \qquad q_2 = 0,1 \qquad \Rightarrow g_2 = 0,09$$

Le service s_1, quand il est bon (p_1 est assez faible), est très efficace (q_1 élevé). Le service s_2 est très sûr (p_2 élevé) mais il est peu probable de faire le point avec (q_2 très faible). En conséquence, la stratégie optimale pour l'objectif fixé qui est de faire le point est (s_1,s_1).

Exemple 2 :

$$s_1 : p_1 = 0{,}6 \qquad q_1 = 0{,}15 \qquad \Rightarrow g_1 = 0{,}09$$
$$s_2 : p_2 = 0{,}9 \qquad q_2 = 0{,}12 \qquad \Rightarrow g_2 = 0{,}108$$

Le service s_2 est le meilleur, mais on a quand même intérêt à utiliser le service s_1 à la première balle. La stratégie optimale est ici (s_1, s_2).

Exemple 3 :

$$s_1 : p_1 = 0{,}5 \qquad q_1 = 0{,}55 \qquad \Rightarrow g_1 = 0{,}275$$
$$s_2 : p_2 = 0{,}6 \qquad q_2 = 0{,}52 \qquad \Rightarrow g_2 = 0{,}312$$

Le service s_2 est le meilleur et, bien que moins risqué que s_1, il est préférable de l'utiliser dès la première balle. La stratégie optimale est ici (s_2,s_2).

Les différents exemples numériques que l'on peut imaginer (*) illustrent dans une grande mesure ce que le bon sens indique : c'est-à-dire qu'un joueur préfère prendre un risque plus grand au premier service car la pénalité encourue au deuxième service (perte du point) est trop grande. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue qu'une stratégie se détermine en fonction de l'objectif ou du critère fixé. Ici, il s'agissait de faire le point au service et uniquement dans ce cas. On devrait sans doute tenir compte davantage de la stratégie réelle d'un joueur, à savoir :

1°) un premier service fort et "risqué", l'objectif étant de faire le point ou, à défaut, d'avoir un retour facile à attaquer, ce qui permet encore de conclure ;

2°) en cas d'échec au premier service, on "assure" le second, en travaillant la balle de telle façon que le retour ne soit pas trop difficile à reprendre et un échange plus long s'engage (avec de nouvelles initiatives de part et d'autre).

On doit pouvoir, dans ce dernier cas, envisager une probabilité de faire le point une fois l'échange engagé.

Enfin, on voit aussi que la modification de l'objectif peut changer la stratégie optimale. Ainsi, dans la situation de l'exemple 1, si le but est simplement d'engager le jeu en laissant à plus tard le soin de faire le point, il est clair que le deuxième service doit être s_2.

Commentaire. Ce texte développe quelque peu un modèle qu'avait donné D. GALE ("Optimal strategy for serving in tennis", Math. Gazette, 1956). L'analyse de ce modèle fait appel à des notions et résultats élémentaires tels que la relation $P(A \text{ et } B) = P(A/B)P(B)$ ou la maximisation de fonctions d'une ou deux variables réelles.

Nous avons utilisé cet exemple de modélisation comme exercice dans un cours de Probabilités en D.E.U.G.

(*) S'il dispose de deux services, le lecteur est invité à estimer ses propres p_1,q_1,p_2,q_2, et à en déduire la stratégie optimale...