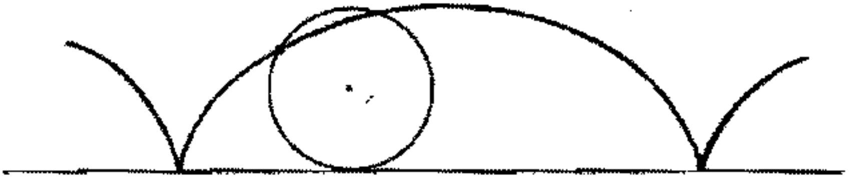
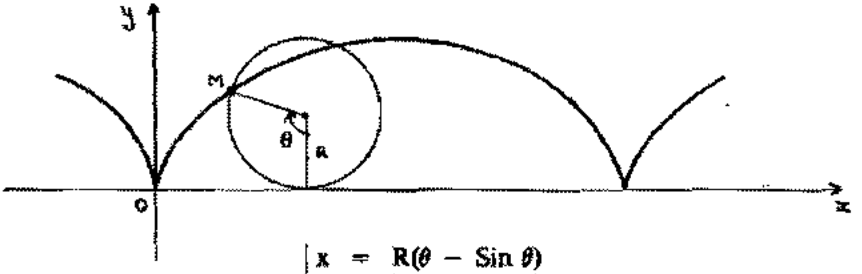
La cycloïde

par Jean de BIASI, Université Paul Sabatier, Toulouse *



(Le repère considéré est orthonormé; de plus, dans les applications à la physique il est supposé galiléen et le champ de gravitation $\vec{G}$ est confondu avec le champ de pesanteur $\vec{g}$).



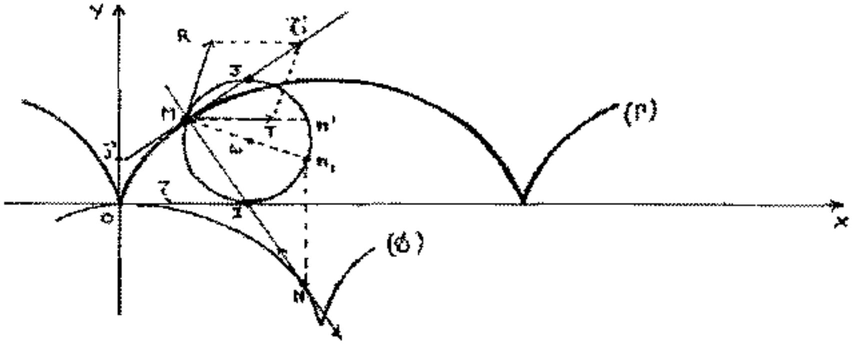
$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Cette courbe, engendrée par un point d'un cercle, qui roule sans glisser sur une droite, semble être mentionnée pour la première fois par Bouvelles (1500). Galilée, vers 1590, s'y intéresse, lui trouvant une forme idéale pour la construction des ponts, et il signale que l'aire d'une arche devrait être égale à trois fois celle du cercle générateur. Mais c'est surtout Roberval qui dans son *Traité sur les indivisibles* l'étudie en détail (il l'appelle "roulette") et donne en particulier la démonstration du résultat pressenti par Galilée. Enfin Huygens, puis Euler et Lagrange, lui découvrent des propriétés mécaniques remarquables illustrées par les noms qu'ils lui donnent, l'appelant respectivement "tautochrone" et "brachystochrone".

---

* Une première version de cet article figure dans le Bulletin de l'IREM de Toulouse, n° 1, janvier 1981, pp. 50 à 58.

I. Tangente en un point



Roberval donne la construction suivante :

Le mouvement du point M sur la cycloïde Γ peut être considéré comme le composé d'une translation parallèle à $0x$ et d'une rotation du cercle générateur $\mathcal{R}$ autour de son centre ω, ces deux mouvements étant évidemment tels que les vitesses arithmétiques correspondantes de M soient égales. Il en résulte que la tangente en M à Γ est définie par le vecteur $\overrightarrow{M\mathcal{G}} = \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MR}$ où $\overrightarrow{MT}$ et $\overrightarrow{MR}$ sont deux vecteurs de même norme avec $\overrightarrow{MT}$ parallèle à $0x$, $\overrightarrow{MR}$ tangent à $\mathcal{R}$ en M, tous les deux étant orientés dans le sens du mouvement.

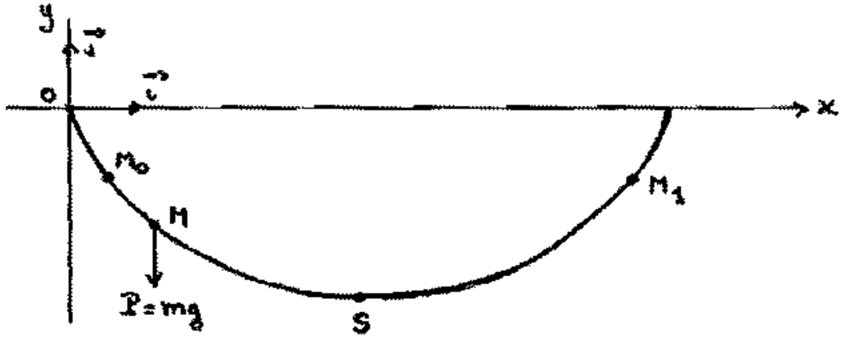
Remarque 1 : Si I est le point de contact de $\mathcal{R}$ avec $0x$, J le point diamétralement opposé à I sur $\mathcal{R}$, M' le point où MT recoupe $\mathcal{R}$, I et J sont les milieux de l'arc $\widehat{MM'}$ et par suite $M\mathcal{G}$, bissectrice de (MT,MR), passe par J. Il en découle que la normale en M à Γ est MI, ce qui résulte d'ailleurs directement du fait que I est le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan où la base est $0x$ et la roulante $\mathcal{R}$.

Remarque 2 : Développée (En utilisant la théorie du mouvement plan sur plan).

Le point M_1 diamétralement opposé à M sur $\mathcal{R}$ décrit la cycloïde Γ_1 déduite de Γ dans la translation de vecteur $\pi R\vec{i}$. Comme la base et la roulante sont les mêmes que dans le mouvement précédent, la tangente à Γ_1 en M_1 est M_1J. Or la normale MI en M à Γ se déduit de M_1J dans la translation de vecteur $-2R\vec{j}$; il en résulte que MI enveloppe la cycloïde transformée de Γ par la translation de vecteur $\pi R\vec{i} - 2R\vec{j}$ et cette cycloïde, $\mathcal{D}$, est la développée de Γ.

(C'est Huygens qui le premier établit ce résultat en utilisant la construction de la tangente donnée par Roberval, et il est conduit à cette remarque en étudiant le mouvement d'un point pesant sur une arche de cycloïde placée dans un plan vertical, puis les oscillations d'un pendule cycloïdal. Il étudie ensuite le problème de la développée et des développantes pour une courbe quelconque et il est le fondateur de cette théorie).

II. Mouvement d'un point pesant sur une arche de cycloïde



Soit M un point de masse m soumis à l'action de la pesanteur g et mobile sans frottement sur l'arche de cycloïde

$$\left|\begin{array}{l} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{array}\right. \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

(axe $0y$ dirigé suivant la verticale descendante).

A l'instant $t=0$, il est abandonné avec une vitesse nulle en un point M_0 ($\theta = \theta_0$). L'énergie mécanique E de M étant constante, on a, notant $\dot{x}$ la dérivée $\frac{dx}{dt}$, etc.

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = E$$

d'où

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\,\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{1 - \cos\theta}$$

Lorsque θ varie de θ_0 à π l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique (et la vitesse est donc maximum en S point le plus bas de l'arche) puis l'inverse se produit jusqu'à la valeur $\theta_1 = 2\pi - \theta_0$ (point M_1 symétrique de M_0 par rapport à la verticale de S) puis le mouvement recommence dans l'autre sens, etc. Le mouvement est donc périodique de période

$$T = 4\int_{\theta_0}^{\pi} dt = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\,d\theta$$

Posant $u^2 = \cos\theta_0 - \cos\theta$ d'où $\sin\theta\,d\theta = 2u\,du$, il vient :

$$T = 8\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\sqrt{1+\cos\theta_0}}\frac{du}{\sqrt{1+\cos\theta_0 - u^2}}$$

$$= 8\sqrt{\frac{R}{g}}\left[\text{Arc Sin}\,\frac{u}{\sqrt{1+\cos\theta_0}}\right]_0^{\sqrt{1+\cos\theta_0}} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

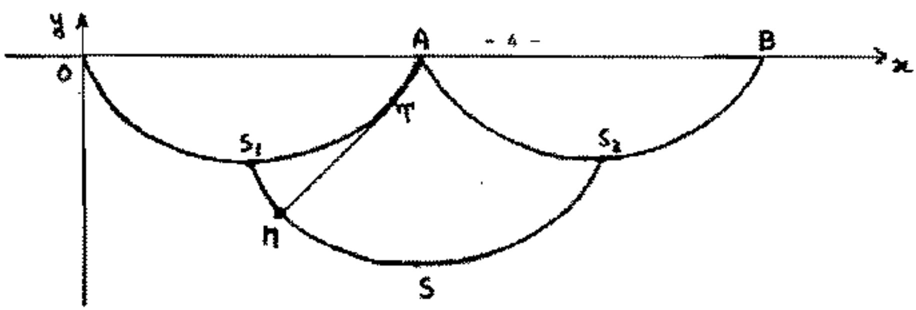
Ainsi $$\boxed{T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

et T est indépendante de la position initiale de M définie par la valeur θ_0.

Cette propriété explique pourquoi Huygens appelait la cycloïde courbe *tautochrone*.

Le pendule cycloïdal

Soient deux arches consécutives d'une cycloïde, OS_1A, AS_2B, situées comme l'indique la figure avec Ox horizontal et Oy vertical ascendant.



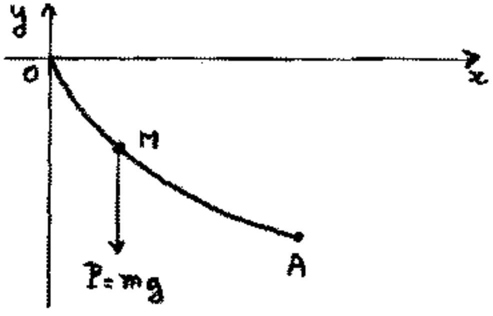
Considérons un point matériel M, soumis à l'action de la pesanteur, suspendu en A par un fil de masse négligeable et de longueur $\widehat{AS_1}$. Si l'on tend le fil, une partie suivant l'arc $\widehat{AT}$ de l'arche OS_1A, l'autre, TM, étant rectiligne et si l'on lâche alors M, ce point va décrire (sans frottements) une arche de cycloïde S_1SS_2 dont S_1AS_2 est la développée (S_1SS_2 est donc une développante de S_1AS_2). Ce point va alors osciller avec une période indépendante de sa position initiale et le pendule ainsi réalisé est donc *isochrone*.

III. La brachystochrone

Il s'agit de la courbe solution du problème suivant :

"Etant donnés dans le champ de la pesanteur deux points O et A plus bas que O, déterminer la courbe Γ joignant O à A telle qu'un point matériel M soumis à son seul poids et décrivant Γ sans frottement, abandonné en O avec une vitesse nulle, arrive en un temps minimum en A".

C'est J. Bernoulli qui le premier (1696) montre que Γ est un arc de cycloïde ayant un point de rebroussement à tangente verticale en O mais c'est sans conteste Euler (1744) puis Lagrange (1760) qui, en fondant le calcul des variations, donnent la bonne méthode pour étudier ce type de questions.



Dans ce cas particulier, on obtient ainsi, en notant :

x,y les coordonnées de M dans le repère orthonormé O*x*,O*y* situé dans le plan vertical contenant O et A avec O*x* horizontal et O*y* vertical ascendant,

a,a' les coordonnées de A dans ce même repère,

s l'abscisse curviligne sur Γ, *t* le temps, t_O^A le temps de parcours de O à A, g l'accélération de la pesanteur,

$$-gy = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad \text{(conservation de l'énergie mécanique)}$$

d'où

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\ \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y}}\,dx \qquad \text{et} \qquad t_O^A = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y}}\,dx$$

L'équation d'Euler traduisant le minimum de cette intégrale s'écrit, si l'on note $f(y,y')$ l'expression $\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y}}$,

$$\frac{\partial f(y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'}\right) = 0$$

qui s'intègre immédiatement en :

$$f(y,y') - y'\,\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} = K \qquad \text{(constante)}$$

c'est-à-dire en

$$\sqrt{-y}\ \sqrt{1+y'^2} = C \qquad \text{(constante)}$$

Posant $y' = -\mathrm{cotg}\,\theta$, on obtient après intégration, en tenant compte à la fois de l'égalité précédente et des conditions initiales, et en posant $2\theta = \varphi$,

$$x = \frac{C^2}{2}(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = -\frac{C^2}{2}(1 - \cos\varphi)$$

c'est-à-dire un arc de cycloïde, unique, la constante positive C étant déterminée par la condition de passage par A.

Remarque : Nous venons de voir que dans le champ de la pesanteur, champ uniforme, la courbe brachystochrone est en même temps tautochrone. Qu'en est-il dans un champ quelconque ?

La loi du mouvement peut être prise sous la forme

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2U + h$$

où U est une fonction des coordonnées x,y (cas bidimensionnel).

La durée du trajet entre les points $M_0(x_0,y_0)$ et $M_1(x_1,y_1)$ est

$$t = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{2U + h}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2U+h}}\,dx$$

La courbe ayant des extrémités données et réalisant le minimum de cette intégrale (Brachystochrone) est définie par y, solution de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{(2U+h)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{2U+h}}\right) = 0$$

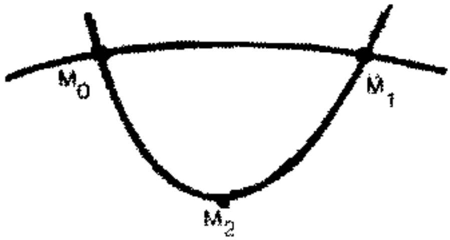
et satisfaisant aux conditions aux limites.

Si l'on prend par exemple $2U + h = \frac{y^2}{a^2}$, on obtient

$$\begin{cases} x = x_0 - ka\cos\varphi \\ y = ka\sin\varphi \end{cases}$$

et la brachystochrone est un cercle.

$2U + h$ étant fonction de s sur une courbe donnée, soient deux points M_0 et M_1 correspondant à une même valeur de $2U + h$ séparés par un maximum de U (correspondant à M_2).



$2U + h = c^{te}$

La période des oscillations est

$$T = 2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{2U(s) - 2U(s_0)}}$$

valeur qui dépend manifestement en général de la valeur s_0.

Avec $2U + h = \dfrac{y^2}{a^2}$ on a $s = ka\,\varphi$ et l'intégrale est de la forme :

$$K \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\,\varphi}{\sqrt{\mathrm{Sin}^2\varphi - \mathrm{Sin}^2\varphi_0}}$$

Il s'agit d'une intégrale elliptique que l'on pourrait calculer avec les fonctions de même nom et dont on sait que la valeur dépend effectivement de φ_0 et de φ_1, c'est-à-dire de l'amplitude des oscillations.

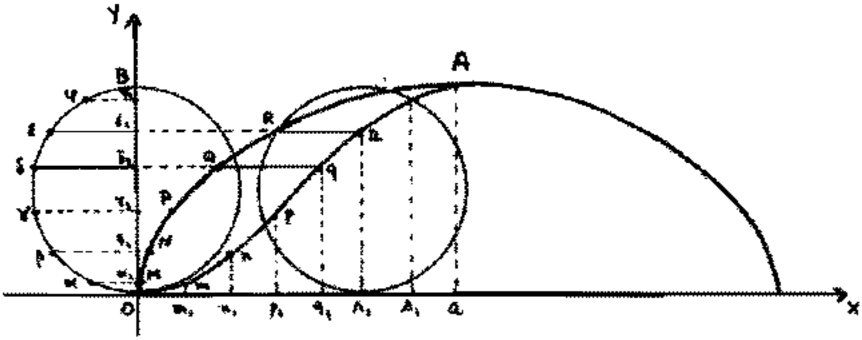
Ainsi le fait que la courbe brachystochrone soit aussi tautochrone est vrai dans le cas d'un champ uniforme, mais n'est pas une propriété générale.

(Dans le cas de la cycloïde et du champ uniforme, $U(s)$ est de la forme $U(s) = \lambda s^2 + c^{te}$. Le dénominateur de l'intégrale est $\sqrt{2\lambda}\,\sqrt{s_0^2 - s_1^2}$ et en posant $s_2 = 0$, $s = s_0 \sin\alpha$, on obtient :

$$T = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{2\lambda}} = \pi \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$$ qui est bien indépendant de s_0).

IV. Aire d'une arche de cycloïde

Elle est égale à trois fois celle du cercle générateur et ce résultat est établi à peu près comme suit par Roberval (le calcul intégral n'est pas encore inventé à cette époque) :



Considérons le cercle générateur $\mathcal{R}$ dans sa position initiale, c'est-à-dire tangent à Ox en O, point de rebroussement de la cycloïde. Si A est le sommet de la première arche et a la projection de A sur Ox, la longueur du segment Oa est égale au demi-périmètre πR de $\mathcal{R}$. Partageons alors le demi-cercle de gauche OB en arcs isométriques par les points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et reportons sur Oa les longueurs $Om_1 = \widehat{O\alpha}$, $m_1n_1 = \widehat{\alpha\beta}$ ... Soient enfin $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ... les projections de α, β, γ ... sur OB et m, n, p les points dont les projections sur OX et OY sont respectivement m_1, α_1 ; n_1, β_1 ; p_1, γ_1 ; ...

Quand le cercle générateur $\mathcal{R}$ est, par roulement sans glissement, devenu tangent à Ox en m_1, le point de $\mathcal{R}$ qui était au départ en O est en M sur la cycloïde, M ayant même ordonnée que m ; quand $\mathcal{R}$ est tangent en n_1 à Ox, ce point est en N sur la cycloïde, N ayant même ordonnée que n ... et l'on a $\alpha\alpha_1 = Mm$, $\beta\beta_1 = Nn$ ...

Les points O, m, n, ..., s, A sont situés sur une courbe que Roberval a appelé "Compagnon de la cycloïde" (et qui est d'ailleurs une sinusoïde d'équation $y = R(1 - \cos x)$).

Si l'on suppose que la longueur commune des arcs $O\alpha$, $\alpha\beta$ ... est très petite, les quadrilatères curvilignes $\alpha\alpha_1\beta_1\beta$ et $MmnN$, puis $\beta\beta_1\gamma_1\gamma$ et $MnpP$, ... sont assimilables à des rectangles respectivement de même longueur et de même hauteur et donc de même aire. Il en résulte que l'aire de la surface limitée par la demi-arche de cycloïde OMA et par l'arc OmA de son compagnon est égale à celle du demi-cercle générateur, c'est-à-dire à $\dfrac{\pi R^2}{2}$. Mais le compagnon de la cycloïde, admettant le centre du rectangle $OaAB$ comme centre de symétrie, partage ce rectangle en deux parties de même aire πR^2. Par suite l'aire de la demi-arche de cycloïde vaut $\dfrac{\pi R^2}{2} + \pi R^2 = \dfrac{3\pi R^2}{2}$ et donc celle de l'arche complète $3\pi R^2$.

(Cette étude de la cycloïde n'est évidemment pas exhaustive. En particulier pour la partie historique, il faudrait signaler que Carcavi, Torricelli, Pascal, Fermat, Descartes, Mersenne, Leibniz, Newton se sont également intéressés à cette courbe, ces deux derniers ayant résolu le problème de la brachystochrone à la même époque que Jacques Bernouilli).

Bibliographie

1. BERNOULLI (J.): Opera omnia. (1742)
2. EULER: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sine solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. (1744)
3. GALILÉE: Opere (Edizione nazionale: Barbera-Firenze). (1890-1909)
4. HUYGENS: Horologium oscillatorium (Paris 1673) ou sa traduction. OEuvres complètes de Christian Huygens.
5. LAGRANGE: Miscellanea Taurinensia 2. (1867)
6. ROBERVAL: Traité des Indivisibles. (1634)
7. STRUIK: A source book in mathematics (Harvard University Press - Cambridge - Massachussets). (1969)
8. THIBAULT (R.): Communication personnelle à l'Université Paul Sabatier. (1980)
9. VALIRON: Equations fonctionnelles, tome 2 (Masson). (1950)
10. WHITMAN: Some historical notes on the cycloïd (American mathematical monthly 50 (1943) 309-315.