

Mise à l'essai en géométrie

par une équipe du Lycée Jean Moulin, à LYON*

I — Introduction

Nous avons choisi de mettre à l'essai les paragraphes V (produit scalaire dans le plan) et VII (Géométrie dans l'espace) dans quatre classes de seconde :

- une Seconde A de 30 élèves ;
- trois Secondes C de respectivement 33, 34, 35 élèves.

En décalé, on trouvera quelques observations faites en classe.

II — Méthodes

Les élèves travaillent sur des fiches rédigées par nous. Nous les refondons à la lumière de la mise à l'essai ; nous en citons des extraits plus loin.

Ces fiches sont étudiées en classe (sauf parfois quelques exercices que nous donnons à préparer à la maison) ; les élèves travaillent par groupes (constitués selon leurs vœux) de deux ou de quatre. Le professeur circule entre les groupes, et s'adresse quand il le juge utile à l'ensemble de la classe. Certains sujets sont l'objet d'une recherche menée collectivement, de préférence lors des séances de Travaux Dirigés (par demi-classes).

Le contrôle écrit s'effectue essentiellement grâce à un devoir hebdomadaire, alternativement un devoir surveillé (de 1 heure sans document, ou de 2 heures avec documents) et un devoir à faire à la maison. Les premiers sujets de devoirs étaient communs aux quatre classes, les suivants aux seules classes de Seconde C du fait de la différence de rythme entre elles et la Seconde A (voir plus loin).

III — Produit scalaire dans le plan (chapitre V du programme)

1. - Il n'est pas question de l'introduire par les formes bilinéaires symétriques (le programme exclut, sagement, une telle introduction). Il nous a semblé bon d'éviter une introduction par l'analytique.

* Serge Betton, Jean Clerjon, Louis Duvert, Jean-Paul Gulchard.

Le programme suggère la « formule $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H... » ; mais nous estimons que la « notion \vec{AB} » est mal comprise des élèves — encore plus mal que la notion de vecteur — et qu'elle n'a qu'une importance secondaire. De plus, la dite formule rompt la « symétrie » du produit scalaire.

D'autre part, nous avons cherché une définition qui n'apparaisse pas aux élèves comme trop arbitraire, qui découle — ou au moins qui prenne prétexte — d'un problème préalablement résolu. Nous avons choisi l'égalité

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

C'est l'un des thèmes suggérés par le programme ; il joue pour nous le rôle de thème introductif. De plus, il fournit des exercices, aussi bien avant qu'après l'introduction du produit scalaire.

2. - Il fallait d'abord faire l'inventaire des propriétés dont nous aurions besoin, revoir celles d'entre elles qui en principe sont vues dans le premier cycle, établir les autres.

Nous avons donc commencé par revoir — entre autres choses —, surtout à l'occasion d'exercices appropriés :

a) le théorème de Pythagore et sa réciproque, le projeté orthogonal d'un point sur une droite, la distance d'un point à une droite, le théorème

$$AB + BC = AC \quad \text{équivalent à} \quad B \in [AC]$$

- Ces faits sont, en Seconde C, bien connus des élèves, ou du moins « reviennent » rapidement.
- Il manque aux élèves une réflexion approfondie sur l'énoncé de Pythagore lui-même, sur la façon de l'utiliser, sur l'existence éventuelle de plusieurs « cas de figure ». En voici deux exemples :

Exercice : MNP est un triangle rectangle. On sait que $MN=5$ et $NP=12$. Calcule MP.

La plupart des élèves « pensent à Pythagore », sans toujours distinguer entre les deux théorèmes réciproques. Seule une petite minorité pense spontanément aux deux éventualités ; le fait que certains groupes trouvent 13, et d'autres $\sqrt{119}$, les force à revenir sur la question.

Exercice : SKI est un triangle équilatéral de côté 10. O est milieu de (K ; I). SOJA est un carré. Trouve, par le calcul, les valeurs exactes des distances du point S à chacune des droites suivantes : KS, KI, AJ, AO. Calcule chacun des angles du triangle JIS.

Ici encore, seule une minorité met en évidence les deux éventualités (autrement dit, sait qu'il existe deux carrés ayant un

segment donné comme côté) ; elles intervenaient dans le calcul des angles.

- * Une mauvaise habitude, très fréquente dans le premier cycle, se retrouve parfois en Seconde : celle qui consiste à dessiner une figure répondant, certes, à l'énoncé, mais trop particulière (par exemple à dessiner un rectangle, voire un carré, dès que l'énoncé introduit un quadrilatère...) ; l'usage du papier quadrillé n'en est qu'en partie responsable ; en fait, plus que d'une mauvaise habitude, c'est sans doute d'un malentendu profond entre l'élève et le professeur qu'il s'agit : quand le professeur dit « ABCD est un quadrilatère », il sous-entend : « (quadrilatère) quelconque » ; alors que l'élève, même quand le mot « quelconque » (qu'il ne comprend pas) est écrit ou prononcé, se croit autorisé, en toute bonne foi, à choisir son quadrilatère comme il l'entend.

Ainsi, en Seconde, en présence de l'exercice suivant :

Les points A, B, C, D, et E sont tels que E appartient à la médiatrice de [AC], à la médiatrice de [BC] et aussi à celle de [BD].

- a) Est-il vrai que E appartient à la médiatrice de [AD] ?
- b) Le quadrilatère ABCD est-il un rectangle ?

beaucoup d'élèves n'envisagent pas d'autres possibilités pour ABCD que le rectangle.

- * Signalons enfin que personne ne sait d'emblée que « le triangle 3 ; 4 ; 5 » est rectangle. Bonne occasion de signaler aux élèves que ce résultat était connu, empiriquement, dans diverses civilisations très anciennes (bien antérieures à Pythagore).

b) la trigonométrie du triangle rectangle, le cosinus d'un angle compris entre 0° et 180° (en particulier son signe), le fait que deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés.

Comme d'habitude, la trigonométrie a été étudiée en Troisième trop vite, ou trop tard, ou pas du tout. Pour enseigner, ou avoir enseigné récemment, en Troisième, nous savons que la faute en incombe, plus qu'aux enseignants, à la lourdeur extrême des programmes de Quatrième et Troisième. Les nouveaux programmes de ces deux classes permettront-ils une étude plus sérieuse de la trigonométrie ?

c) les vecteurs, la signification des égalités $\vec{AB} = \vec{CD}$ et $\vec{AB} = k \vec{CD}$ (k réel), le théorème de Chasles.

C'est à propos des vecteurs que les carences sont les plus nombreuses. Par exemple, nous avons demandé, dans un devoir surveillé, si les phrases suivantes étaient vraies :

« Si le triangle ABC est équilatéral, alors $\vec{CA} = \vec{CB}$ »

« Si $\vec{GE} + \vec{EB} = \vec{GB}$, alors G, E, B sont alignés »

22 élèves de Seconde A sur 28, environ un tiers des élèves de Seconde C, ont répondu que la première était vraie.

18 élèves de Seconde A sur 28 ont répondu que la seconde était vraie, ainsi qu'environ une moitié des élèves de Seconde C avec des réticences diverses... Très peu d'élèves, finalement, savent le théorème de Chasles (« Quels que soient les points A, B, C, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ») ; la plupart se sont contentés de mémoriser l'égalité de Chasles ($\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$) sans trop bien savoir dans quelles conditions elle s'applique.

Entre autres causes de ces carences figurent, à notre avis, outre une fois de plus la surcharge des programmes de Quatrième et Troisième :

- une mauvaise assimilation des notions de droite, de segment, de couple de points, de longueur, de mesure d'une longueur, et des notations correspondantes (en sont la preuve des expressions fréquentes comme « milieu d'une droite », « longueur d'une droite »,...)
- une fausse interprétation des figures ; on surprend beaucoup les élèves — mais à notre avis on les aide beaucoup — en leur déclarant qu'un vecteur ne peut pas se dessiner (pas plus qu'une longueur, qu'une direction, qu'un angle), mais peut se représenter par un ou plusieurs de ses... représentants, qui sont des couples de points.
- une mauvaise compréhension du signe =, due en partie au vocabulaire traditionnel selon lequel

« $\vec{AB} = \vec{CD}$ signifie

que les deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux »

alors que, justement, cette égalité ne met en jeu qu'un seul vecteur, par deux de ses désignations.

- une approche, en Quatrième, trop ambitieuse, trop axiomatique, de la notion de vecteur. Il est certes bon que les élèves sachent ce qu'est un vecteur (« ensemble de couples de points équipollents », à condition de ne pas confondre l'équipollence et l'égalité ; ou encore « graphe d'une translation », à condition de connaître le sens de « graphe » et le sens de « translation »). Mais il est plus important qu'ils sachent comprendre et utiliser le langage vectoriel, en particulier qu'ils sachent que l'égalité

$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

leur apporte d'un seul coup trois renseignements : direction, sens (présenté comme une notion intuitive, sans statut mathématique), longueur.

3. - Etude d'un problème

« P, Q, R étant trois points ⁽¹⁾, on connaît les longueurs de $[PQ]$ et de $[QR]$ et l'angle \widehat{PQR} ; calculer la longueur de $[PR]$ ».

Ce problème gagne à être posé tel quel, la fiche le traitant n'étant distribuée qu'après résolution collective en classe, ou mieux en demi-classe lors d'une séance de Travaux Dirigés. (Nous déplorons à ce sujet le trop petit nombre de telles séances, et le refus opposé par le ministère à l'A.P.M.E.P. qui demandait 2 heures hebdomadaires de Travaux Dirigés en Seconde de détermination, au lieu de l'heure unique qui a fini par être accordée).

On peut, en préambule, faire discuter des diverses façons de déterminer un triangle à une isométrie près (en employant un langage plus concret, naturellement), et faire construire effectivement, avec règle, compas et rapporteur, un triangle PQR tel que $PQ = 5$ cm, $PR = 7$ cm et $\widehat{PQR} = 37^\circ$; dès lors, la longueur QR est bien déterminée. On doit donc pouvoir résoudre plus généralement le problème posé plus haut.

Mais avant de le résoudre dans toute sa généralité, il est de bonne tactique de le tâter sur quelques cas particuliers faciles à élucider (cette tactique « expérimentale » ne vient pas spontanément à l'esprit de tous les élèves; beaucoup restent paralysés devant un problème au lieu d'essayer de le grignoter; cela s'apprend — devrait s'apprendre ? — très tôt dans nos classes du premier cycle).

En général, le cas où \widehat{PQR} est l'angle droit est vite évoqué, et résolu sans peine grâce au théorème de Pythagore (Personne ne pense au cas où le triangle PQR serait rectangle en P ou en Q).

Viennent aussi, parfois, les cas où P, Q, R sont alignés (parler initialement du « triangle PQR », au lieu des trois points P, Q, R , éloigne les élèves des cas d'alignement) et où l'ordre des trois points a une importance.

Puis, pour profiter du théorème de Pythagore même dans le cas général, un élève au moins suggère d'introduire le point H , projeté orthogonal de P sur la droite QR .

Les élèves dessinent à peu près tous un triangle PQR acutangle (probablement parce que trop d'instituteurs et de professeurs ne dessinent jamais eux-mêmes au tableau le moindre triangle obtus-angle...); de ce fait, H « tombe » entre Q et R . Cependant, au moment de remplacer RH par $QR - QH$, la question se pose : et si H était tel que $R \in [QH]$? D'où la subdivision du cas « \widehat{PQR} est aigu » en deux sous-cas.

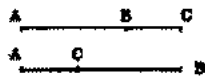
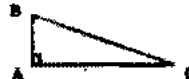
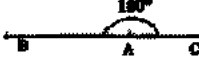
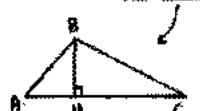
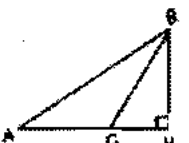
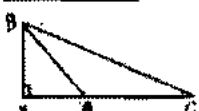
Un élève suggère, si H n'est pas élément de $[QR]$, d'abandonner H au profit du projeté orthogonal de R sur la droite PQ , projeté qui, lui, sera dans ce sous-cas élément de $[PQ]$; idée judicieuse, du fait de la « symétrie » des rôles joués dans cette affaire par

(1) ce qui, pour nous, signifie « trois points distincts »

les points P et R, mais qui serait inopérante dans le cas où \widehat{PQR} est obtus.

Ce cas est ensuite abordé.

On peut reprendre tout le problème en une sorte de tableau où

Des cas déjà connus:		
<p>$\widehat{A} = 0^\circ$</p>  <p>$BC = AC - AB$ $BC = b - c$ $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ N.B. : $\cos 0^\circ = 1$</p>	<p>$\widehat{A} = 90^\circ$</p>  <p>$BC^2 = AC^2 + AB^2$ $BC^2 = b^2 + c^2$ N.B. : $\cos 90^\circ = 0$</p>	<p>$\widehat{A} = 180^\circ$</p>  <p>$BC = AC + AB$ $BC = b + c$ $BC^2 = b^2 + c^2 + 2bc$ N.B. : $\cos 180^\circ = -1$</p>
Trois cas de figures possibles:		
<p>$0 < \widehat{A} < 90^\circ$</p> 		<p>$90^\circ < \widehat{A} < 180^\circ$</p> 
<p>Dans ces trois cas:</p> <p>$BC^2 = BH^2 + HC^2$; $BH = AB \sin \widehat{BAH} = c \sin \widehat{BAH}$; $HA = AB \cos \widehat{BAH} = c \cos \widehat{BAH}$</p>		
<p>$HU = AC - AH$ $\widehat{BAH} = \widehat{A}$ donc $\sin \widehat{BAH} = \sin \widehat{A}$ et $\cos \widehat{BAH} = \cos \widehat{A}$</p>	<p>$HU = AH - AC$ $\widehat{BAH} = \widehat{A}$ donc $\sin \widehat{BAH} = \sin \widehat{A}$ et $\cos \widehat{BAH} = \cos \widehat{A}$</p>	<p>$HU = AH + AC$ $\widehat{BAH} = 180^\circ - \widehat{A}$ donc $\sin \widehat{BAH} = \sin \widehat{A}$ et $\cos \widehat{BAH} = -\cos \widehat{A}$</p>
<p>$BC^2 = c^2 \sin^2 \widehat{A} + (c \cos \widehat{A} - b)^2$</p>		<p>$BC^2 = c^2 \sin^2 \widehat{A} + (b - c \cos \widehat{A})^2$</p>
<p>Puisque deux réels opposés ont même carré, dans ces trois cas</p> <p>$BC^2 = c^2 \sin^2 \widehat{A} + (c \cos \widehat{A} - b)^2$ $BC^2 = c^2 (\sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A}) + b^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ $BC^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \widehat{A}$</p> <p>On contrôle que ce résultat est valable dans les trois cas déjà connus.</p>		
<p>Conclusion: Pour trois points (distincts) A, B et C</p> <p style="text-align: center;">$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$</p>		

chaque cas de figure occupe une colonne, mais où certaines égalités sont valables dans plusieurs colonnes ; et surtout, l'égalité finale

$$PR^2 = QP^2 + QR^2 - 2 QP \times QR \times \cos \widehat{PQR} \quad (1)$$

est valable dans tous les cas, ce qui semble soulager pas mal d'élèves...

Il a fallu, chemin faisant, utiliser — et rappeler à certains — :

$$\cos 0^\circ = 1 ; \cos 180^\circ = -1 ; \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

Lors des exercices d'application, sont apparues d'autres difficultés dues à une mauvaise acquisition du calcul numérique et littéral ; en voici deux exemples relevés en Seconde A :

- Dans une application numérique de l'égalité (1), 8 des 28 élèves qui ont pensé à l'utiliser font des erreurs de calcul parce qu'ils ne respectent pas la priorité de la multiplication sur l'addition (par exemple, $36 - 144 \times \frac{1}{2}$ devient chez eux $-108 \times \frac{1}{2}$)
- 5 des élèves qui ont pensé à (1) pour calculer $\cos A$ en fonction de a, b, c n'arrivent pas à résoudre cette équation d'inconnue $\cos \hat{A}$.

Ce genre d'obstacles se rencontre aussi en Seconde C, mais il est vite surmonté et ne se reproduit pas.

4. - Définition du produit scalaire. Après essai en classe, nous avons refondu nos fiches à ce sujet. Il nous semble maintenant qu'il serait bon de procéder de la façon suivante :

a) Le produit scalaire n'est ni imposé ni interdit par le nouveau programme de Troisième (pas plus que par l'ancien). Certains des élèves qui arrivent donc cette année — et arriveront à l'avenir — en Seconde ont (auront) entendu parler en Troisième de « produit scalaire » ; par exemple, c'est pour eux « $xx' + yy'$ » en repère orthonormé, et sa nullité exprime analytiquement une orthogonalité.

Si on veut — c'était notre cas — leur présenter un produit scalaire intrinsèque (indépendant de tout choix de repère dans le plan), il est important de leur demander d'oublier (provisoirement ; on y reviendra plus tard) ce qu'ils ont pu apprendre en Troisième sous ce vocable.

b) *Avant* de passer à la définition du produit scalaire, il faut :

- introduire ou rappeler la notion de norme d'un vecteur (mesure d'une longueur — une unité étant choisie — donnée par le double décimètre, sans préoccupation axiomatique) ;
- introduire la notion d'angle de deux vecteurs non nuls (angle de paires ; autrement dit, angle non orienté), en admettant que « la translation conserve les angles » (sous cette formulation ou sous une autre équivalente), et proposer quelques exercices simples où voisinent \widehat{KMV} , l'angle de \vec{MK} et de \vec{MV} , l'angle de \vec{KM} et de \vec{MV} , etc. ; l'idée directrice — en un premier temps au moins — est de mettre en évidence, sur le dessin, l'angle de \vec{u} et \vec{v} en choisissant un point A (point jouant un rôle dans la figure ou point pris en dehors d'elle) et en construisant le point B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$ et le point C tel que $\vec{AC} = \vec{v}$ (en bref, en dessinant deux représentants de même origine, un pour chacun des deux vecteurs en cause) ; l'angle cherché est alors \widehat{BAC} .

Les élèves qui n'ont pas bien compris la différence entre un couple de points et un vecteur, ni l'égalité $\vec{AB} = \vec{CD}$ (voir plus haut) ont du mal à comprendre et à pratiquer ces changements de représentants.

De plus, nous avons constaté que certains élèves n'avaient pas, dans le premier cycle, assimilé concrètement la notion de sens d'un vecteur, ou si on préfère de sens comparés de deux vecteurs de même direction. S'y ajoute la divergence entre les significations mathématiques de « direction » et de « sens », et leurs significations courantes ; elles coïncident quand il est question d'une rue « à sens unique », mais non plus quand dans les gares on écrit « direction de Paris », « direction de Marseille ».

c) Une fois « norme » et « angle de deux vecteurs » mis en place, on peut donner comme définition du produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} \cdot \vec{u}$, défini comme suit :

Si l'un (au moins) des vecteurs est nul, c'est le réel 0 :

$$\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{Si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$$

(Il est clair que si $\vec{v} = \vec{0}$, il n'y a plus d'angle de \vec{u} et \vec{v} , encore moins de cosinus ; et $|\vec{v}|$ a beau alors être le réel 0, le produit de 0 et de... quelque chose qui n'existe pas n'existe pas lui non plus).

d) On retourne immédiatement au plan, par des exercices du type : « ABC est un triangle ; calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$, $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$,... »

A cette occasion, on constate à nouveau la difficulté pour certains élèves de comprendre ce qu'est l'angle de deux vecteurs.

On introduit le carré scalaire de \vec{u} , qu'on peut noter \vec{u}^2 ; il est égal à $|\vec{u}|^2$; donc, quels que soient les points A et B,

$$\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2 = AB^2 ;$$

le produit scalaire pourra donc servir pour calculer des distances.

Dès lors, l'égalité (1) (voir plus haut, paragraphe 3) peut s'écrire

$$\overline{PR}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QP} \cdot \overline{QR}$$

et, en remarquant que $\overline{PR} = \overline{QR} - \overline{QP}$, on « pense » à

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Mais on y reviendra plus tard.

e) On peut établir :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

c'est-à-dire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$$

ce qui pourrait fournir une autre définition possible du produit scalaire ; elle aurait le mérite d'« absorber » le cas où l'un des vecteurs est nul.

f) Nullité du produit scalaire ; vecteurs orthogonaux.

La difficulté, ici, est de distinguer entre

d'une part $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, ou $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$

et d'autre part droite $AB \perp$ droite CD

c'est-à-dire de penser au cas où $A=B$ et au cas où $C=D$.

Autrement dit, certains élèves ne voient pas facilement la différence entre « vecteurs orthogonaux » et « vecteurs directeurs de droites perpendiculaires » (La même difficulté se rencontre, pour le parallélisme, avec la différence entre « vecteurs colinéaires » et « vecteurs directeurs de droites parallèles »).

La confusion est encore plus tentante si on accepte l'écriture $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour signifier l'orthogonalité de deux vecteurs ; mieux vaut sans doute la traduire par l'écriture $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, aussi brève et commode, finalement, que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Plus généralement, même quand les vecteurs ne sont pas en jeu, peu d'élèves ont le scrupule de ne parler de « droite AB » qu'après s'être assurés que A et B désignent deux points, et non pas le même point.

Ainsi, le produit scalaire pourra servir lorsqu'il s'agira de droites perpendiculaires, d'angle droit,...

5. - Propriétés du produit scalaire

$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ découle de la définition directement ; le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ aussi.

$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ peut se démontrer en distinguant trois cas : $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$.

Nous avons admis la « pseudo-distributivité ».

L'inégalité de Cauchy-Schwarz — qui revient à dire que le cosinus de tout angle de vecteurs est élément de $[-1 ; 1]$ — nous semble jouer un rôle négligeable dans la progression que nous avons choisie pour le produit scalaire. On peut à la rigueur soulever le problème, après avoir étudié un exercice du type suivant :

« \vec{i} et \vec{j} sont deux vecteurs tels que $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 2$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1,3$; $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$. Calcule $\vec{a} \cdot \vec{i}$, $\vec{a} \cdot (2\vec{i})$, $\vec{a} \cdot (5\vec{j})$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, \vec{a}^2 , \vec{b}^2 »

en remplaçant $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1,3$ par $\vec{i} \cdot \vec{j} = 3$: on arrive alors à des résultats curieux : un cosinus plus grand que 1, une norme plus petite que 0, ... (ce qui laisse impavides certains élèves, d'ailleurs !).

Les propriétés du produit scalaire ne surprennent pas les élèves ; certains les ont pressenties auparavant ; mais leur assimilation complète demande cependant un temps assez long. Elles évoquent des propriétés familières des réels (certains élèves, très peu nombreux, se laissent emporter par l'élan jusqu'à écrire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3, \text{ d'où } \vec{u} = \frac{3}{\vec{v}}$$

ou demandent si c'est légitime)

6. - Utilisation du produit scalaire. — L'introduction au programme de Seconde dit excellemment : « ... on ne peut imaginer de parler du produit scalaire sans s'en servir abondamment ».

On peut discuter sur l'intérêt du produit scalaire en Seconde ; il est certain qu'on peut faire de la bonne géométrie sans lui ; par contre, on peut chercher à préparer les programmes de Première si le produit scalaire y est développé. Cette discussion a été tranchée par le programme officiel en Seconde.

Il s'est trouvé des élèves, bien sûr, pour demander : « le produit scalaire, à quoi ça sert ? ». Nous pensons qu'on peut, très peu de temps après la définition, faire prévoir (Cf. plus haut) qu'il servira à propos de distances et d'orthogonalités. Les utilisations du produit scalaire en Seconde ne manquent pas ; le programme en suggère plusieurs.

Il nous a paru important d'en donner d'abord quelques-unes en dehors de l'analytique ; elles sont de deux sortes :

1) Retrouver des théorèmes connus :

- le théorème de Pythagore et sa réciproque, à partir de l'identité

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- des propriétés du losange, du rectangle, du triangle rectangle, de la médiatrice, à partir de l'équivalence entre :

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| \quad \text{et} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

ou (ce qui revient au même) de l'équivalence entre

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad |\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$$

- l'égalité (1) (cf. paragraphe 3).

Ces « retrouvailles », et principalement la dernière, posent un problème de logique : on ne peut prétendre démontrer (1) à partir du produit scalaire alors que le produit scalaire est « sorti » de (1). Les cercles vicieux nous menacent...

Nous nous sommes contentés de soulever le problème, et de dire qu'on peut définir le produit scalaire et présenter ses principales propriétés de façon à éviter tout recours au théorème de Pythagore, à l'égalité (1), etc. ; dès lors, on peut effectivement démontrer ces derniers à partir du produit scalaire.

Nous n'avons pas suscité d'écho de la part des élèves, ce qui ne nous a ni étonnés, ni déçus. Il est encore trop tôt en Seconde pour aborder vraiment la question de l'axiomatisation de la géométrie.

Exercice : (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan. Voici deux points : $A(-5 ; 1)$; $B(2 ; 2)$. Trouve de deux façons différentes une équation de la médiatrice de $[AB]$.

Tous les élèves sont partis du fait que cette médiatrice est la droite perpendiculaire au segment en son milieu (la deuxième façon n'était qu'une variante de la première dans leurs réponses) ; personne n'est parti de l'égalité $MA = MB$.

2) Démontrer de nouveaux théorèmes, relatifs à $MA^2 + MB^2$, à $MA^2 - MB^2$, à l'orthocentre d'un triangle, et leurs conséquences.

En Seconde A, le problème relatif à l'ensemble des points M du plan tels que, les deux points A et B et le réel positif k étant donnés, $MA^2 + MB^2 = k$, a été introduit de la façon suivante (après avoir établi que $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$) : A et B sont

deux points donnés tels que $AB = 12$; I est le milieu de $[AB]$. Un point M est tel que $IM = 4$. Calculer $MA^2 + MB^2$. Trouver d'autres points P, Q, R, ... tels que $PA^2 + PB^2$, $QA^2 + QB^2$, $RA^2 + RB^2$, ... soient égaux au résultat trouvé pour $MA^2 + MB^2$.

7. - Produit scalaire et coordonnées

C'est la première fois que nous introduisons explicitement une base et un repère. Mais des exercices préparatoires ont été déjà traités.

On donne une base (\vec{i}, \vec{j}) en considérant comme connus les nombres $|\vec{i}|$, $|\vec{j}|$ et $\vec{i} \cdot \vec{j}$, et on cherche les expressions analytiques du produit scalaire de deux vecteurs quelconques et de la norme d'un vecteur quelconque. Dans un exercice d'application numérique ($|\vec{i}|=2$, $|\vec{j}|=1$, $\vec{i} \cdot \vec{j}=1$), on fait chercher des produits scalaires, des distances, des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné, les deux vecteurs unitaires d'une direction donnée, des angles,... Le dessin permet de contrôler approximativement les résultats en utilisant l'équerre et le double décimètre.

On recommence le tout avec une base orthonormée ($|\vec{i}|=1$, $|\vec{j}|=1$, $\vec{i} \cdot \vec{j}=0$). On conclut que les problèmes où interviennent des angles, des distances, l'orthogonalité,... se règlent, en analytique, plus facilement en repère orthonormé qu'en repère non orthonormé.

Les élèves retrouvent avec plaisir « leur » produit scalaire de Troisième. La nouveauté pour eux, c'est qu'on puisse traiter des problèmes métriques en repère non orthonormé (moyennant des calculs plus compliqués qu'en repère orthonormé), et surtout que le produit scalaire tel que nous l'avons défini existe indépendamment de tout choix de repère.

Nous n'avons pas tenté, bien entendu, de montrer l'existence, dans un \mathbb{R} -vectoriel de dimension 2, d'une infinité d'applications - produits-scalaires. Pour nous, distance et angle sont des notions concrètes de dessin, mesurées au double décimètre et au rapporteur ; elles ne sont pas liées à une structure euclidienne de ce \mathbb{R} -vectoriel.

8. - La caractérisation analytique du cercle et du disque en repère orthonormé n'a pas posé de problème.

Les élèves ont été amenés à remplacer par exemple $x^2 - 2x$ par $(x-1)^2 - 1$, ce qui est une préparation à la résolution d'équations et inéquations du second degré (bien que la théorie générale du second degré ne figure pas dans le nouveau programme de seconde).

Nous avons ensuite établi la « formule $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ » (voir le programme) ; nous avons constaté — une fois de plus — que la notation \overline{AB} ne fait qu'embrouiller les idées des élèves ; on peut fort bien s'en passer, ici comme ailleurs, n'en déplaise aux programmes.

IV. — Géométrie dans l'espace (chapitre VII du programme)

(Cette partie n'a été mise à l'essai, pour l'instant, que dans les trois Secondes C).

1. - Avant de commencer, nous avons posé en classe, oralement, la question suivante :

« Qu'est-ce que vous savez de la géométrie dans l'espace ?
Qu'est-ce que vous vous rappelez avoir vu en classe à ce sujet les années antérieures ? »

Les trois ou quatre premières réponses spontanées parlent de « trois vecteurs unitaires au lieu de deux », de « trois dimensions au lieu de deux ; par exemple le carré a deux dimensions, le cube en a trois », de « calculs de volumes au lieu de calculs d'aires ».

Après un temps de silence, la question suivante est posée :
« Quelles figures de l'espace connaissez-vous ? »

Quelques élèves évoquent la sphère, le cube, le parallélépipède ; dans une classe le cône, le cylindre, la pyramide ; dans une autre, et bon dernier, le plan.

Il s'agit donc de souvenirs très clairsemés...

2. - La première fiche commence par préciser les quelques souvenirs en question, et par introduire les mots *plan*, *droite*, *point* (que presque personne n'a utilisés lors de la rapide enquête qui précède), sans aucune définition.

Elle suggère quelques conventions pour représenter, sur une feuille de papier ou un tableau, un plan.

Elle propose quelques exercices d'observation, à propos de relations d'incidence, concernant un cube dessiné (des boîtes de craie vides sont aussi fournies aux groupes) et un tétraèdre dont le patron avait été fourni et que les élèves avaient été invités à fabriquer chez eux et à apporter en classe.

- D'emblée, le vocabulaire utilisé spontanément par les élèves pose quelques problèmes : ils disent : « la droite et le plan sont confondus » pour exprimer que la droite est contenue dans le plan. Pour certains, « plans superposables » ou « plans superposés » signifie : plans parallèles distincts (ils pensent sans doute à des étagères superposées ?).

- Très vite aussi, la « vision dans l'espace », préalable à toute mathématisation, s'avère fort inégale d'un élève à l'autre ; dans l'exercice suivant :

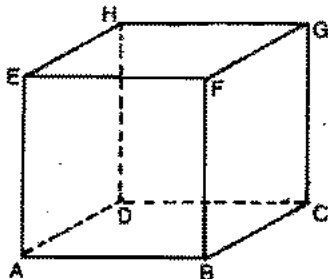
Voici un cube :

le plan EFH contient-il un autre sommet du cube ?

le plan EGC contient-il un autre sommet du cube ?

le plan EDF contient-il un autre sommet du cube ?

le plan EDG contient-il un autre sommet du cube ?



la dernière question fait une sorte de tri entre ceux qui répondent sans hésitation et les autres, qui ont du mal à répondre.

- La notion de droite, son caractère illimité, le fait qu'on ne puisse jamais dessiner qu'un morceau de la droite, la confusion entre une droite et un segment de droite, gênent considérablement et durablement un nombre appréciable d'élèves de 6ème, 5ème et même 4ème. De même ici, la notion de plan, son caractère illimité dans toutes ses directions, le fait qu'on ne puisse jamais dessiner qu'un morceau de plan, la confusion entre un plan et un parallélogramme, gênent certains élèves de Seconde (il serait intéressant de savoir si ce sont les mêmes que les premiers cités, deux ou trois ans plus tard).

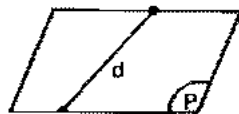
Exemples :

- plusieurs dessinent un parallélogramme pour suggérer un plan, comme il leur était indiqué dans la fiche, mais dénomment les 4 sommets ; pour eux, le plan ABCD se distingue-t-il, ou non, du plan déterminé par ces quatre points ?
- deux ou trois élèves ne voient pas pourquoi deux plans ne pourraient pas avoir un seul point commun ; à l'appui de leurs dires, ils mettent un cahier fermé en contact avec leur table par un des « coins » du cahier, et concluent : le plan de la table et le plan du cahier n'ont qu'un point commun.
- l'intersection des plans de deux faces d'un cube ou d'un tétraèdre est souvent une arête (un segment) à leurs yeux, et non pas une droite.

- Par contre, certains élèves trouvent par eux-mêmes des conventions de dessin pour représenter « en plan » des éléments spatiaux :
- le plan déterminé par trois points A, B, C non alignés est représenté par le triangle ABC, ce qui est tout aussi légitime que le traditionnel parallélogramme, éventuellement amputé d'un ou de deux côtés, et même plus logique puisque trois points suffisent à déterminer un plan ;



- le dessin ci-contre a pour but d'indiquer que la droite d est contenue dans le plan P ;



- les pointillés sont utilisés, souvent avant même que le professeur en ait parlé ;
- plusieurs élèves tentent de faire des dessins « en perspective ».

On conclut de ces tentatives qu'il faut souvent, à côté d'une figure, écrire (en français ou en langage mathématique) certaines hypothèses difficiles à traduire conventionnellement sur le dessin.

- Des élèves demandent pourquoi un plan ne serait pas un ensemble de droites, et non pas de points ; on ne peut que leur répondre que ce ne serait pas absurde, mais que la convention habituelle — et commode — consiste à considérer les plans et les droites comme des ensembles de points, et les droites du plan comme des sous-ensembles de ce plan.

La fiche suivante aborde les positions relatives de deux plans, d'une droite et d'un plan, de deux droites. Le fait — nouveau par rapport à la géométrie plane — que deux droites peuvent n'avoir aucun point commun sans être parallèles est assez rapidement acquis.

On conclut en dressant une liste de propriétés, dégagées par l'expérience, et que l'on admet. Il est entendu qu'elles serviront dans la suite à démontrer d'autres propriétés.

3. - Ces premières démonstrations (à partir d'« axiomes » — mais le mot n'est pas employé — surabondants) semblent intéresser les élèves.

• Par exemple :

P et Q sont deux plans disjoints.

R est un plan qui coupe P selon la droite d.

Démontre que Q et R sont sécants et que leur droite d'intersection est parallèle à d.

Deux méthodes « sortent » pour démontrer ce parallélisme :

• une méthode « par l'absurde », employée spontanément par un élève : si les deux droites se coupaient, leur point commun serait commun aux deux plans, etc.

• une méthode par contraposition ; le principe en a été déjà rencontré ailleurs qu'en géométrie ; et le mot « contraposition » a été prononcé par une élève, avant qu'un autre n'utilise le raisonnement par l'absurde. (En fait, la contraposition est une mise en forme de la méthode par l'absurde, de deux points de vue :

- elle choque moins les débutants, à qui on a seriné qu'il ne fallait surtout pas utiliser la conclusion, sous peine de cercle vicieux, et qui maintenant sont invités à partir de la négation de la conclusion ;

- elle oblige à préciser le raisonnement : dans le présent exemple, il y a lieu de considérer comme « référentiel » trois plans P, Q, R, P et R se coupant selon la droite d, Q et R selon la droite d', comme hypothèse ; $P \parallel Q$ et comme conclusion $d \parallel d'$; l'énoncé contraposé est : « Si d n'est pas parallèle à d', alors P n'est pas parallèle à Q ». Le classique « raisonnement par l'absurde » escamote allègrement ce genre de précisions...).

• L'exercice suivant :

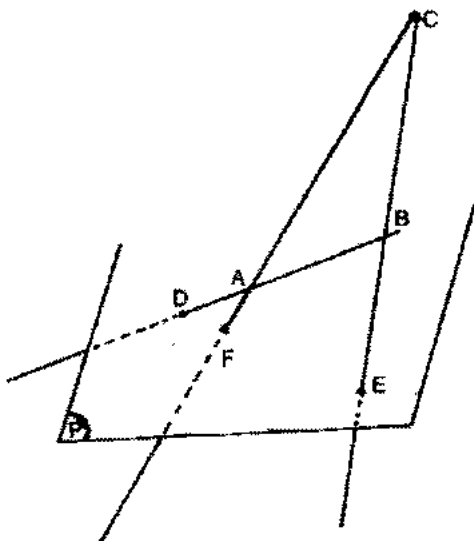
a) *P est un plan. A et B sont deux points distincts de P. C est un point n'appartenant pas à P. P' est le plan déterminé par les points A, B, C. Démontre que P et P' ne sont pas parallèles. Que peux-tu dire de $P \cap P'$?*

b) *Q est un plan ; E est un point de Q ; F et G sont deux points non situés dans Q. E, F, G ne sont pas alignés. La droite FG coupe Q en H. Quelle est l'intersection des plans Q et EFG ? Même question en supposant que la droite FG est parallèle à Q.*

c) *S est un plan ; S' est un plan déterminé par trois points L, M, R non situés dans S ; S et S' sont sécants. Comment trouver des points de leur droite commune ?*

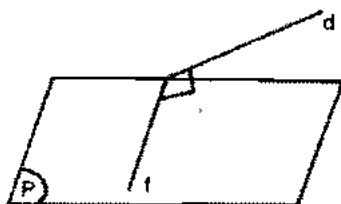
est assez bien résolu.

Il montre que les figures (planes) de géométrie dans l'espace ne sont pas totalement arbitraires; par exemple, les points A, B, C étant tous trois en dehors du plan P, les droites AB, BC et CA coupent P en trois points, respectivement D, E et F, qui doivent être alignés. Certains élèves semblent d'ailleurs étonnés, après la démonstration, que le dessin qu'ils avaient fait soit faux; quelques-uns même doutent de la validité de la démonstration tant ils "croient" à leur premier dessin...



4. - Orthogonalité

La notion de droite perpendiculaire à un plan n'est pas immédiate pour tous les élèves. Certains, plaçant une règle obliquement par rapport au plan horizontal, disent : « Cette droite d est perpendiculaire au plan P de la table, puisque cet angle (ils montrent d et la droite f de P perpendiculaire à d) est droit ». Autrement dit, ils croient qu'il suffit de trouver une droite de P qui soit perpendiculaire à d pour que d soit perpendiculaire à P.



Autre erreur : des élèves croient que deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles, sans doute parce qu'ils généralisent indûment aux plans la propriété des droites du plan : « Deux droites d'un plan perpendiculaires à une même droite de ce plan sont parallèles ».

Quelques démonstrations étaient demandées, après avoir dressé — comme auparavant pour le parallélisme — une liste, pourtant surabondante, de propriétés admises. Par exemple :

a) Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

b) Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Ces deux démonstrations arrêtent la presque totalité des élèves. Même lorsqu'on leur en a donné le principe et le début, très peu nombreux sont ceux qui peuvent les terminer.

Nous pensons qu'il faut admettre un grand nombre des propriétés premières avant de se lancer dans des démonstrations, lesquelles d'ailleurs n'intervenant que dans les exercices simples, et non pas en vue d'un exposé rigoureux des fondements de la géométrie dans l'espace.

C'est ainsi que nous avons eu l'impression que l'intérêt renaissait, que des démonstrations étaient trouvées plus facilement, à propos du plan médiateur d'un segment, de la symétrie orthogonale par rapport à un plan, des diverses projections.

(Il reste à faire le repérage d'un point dans l'espace et des exercices de calculs d'aires et de volumes).

V. — Quelques réflexions

Nous avons noté le temps consacré à la partie dont il est question dans les paragraphes 1 à 7 du III précédent :

Dans chacune des trois Secondes C, il a fallu 20 heures environ en classe, auxquelles s'ajoute la durée des devoirs surveillés et de la correction en classe des devoirs (surveillés et à la maison).

En Seconde A, la vingtaine d'heures a été consacrée à la même progression, mais seulement jusqu'à la définition du produit scalaire (inclusive) ; cette première tranche n'a occupé dans les Secondes C que 7 heures environ.

L'un des traits marquants de notre travail est donc cette différence de rythme entre les deux types de classe. Elle était, certes, prévisible...

Dans un projet de programme de Seconde, un découpage en temps global (qui a heureusement disparu dans le texte définitif) attribuait à ce paragraphe V 12 % du temps global de l'année scolaire. Un calcul grossier montre que nous avons consacré 18 % de ce temps global à une partie de ce paragraphe : les trois quarts en Seconde C, le quart en Seconde A.

Nous avons essayé de faire travailler nos élèves dans l'esprit préconisé par l'« introduction au programme de Seconde ». Un exposé magistral, une définition donnée abruptement et des exercices d'application à

faire à la maison, voilà qui aurait bien diminué le temps passé à cette tranche du programme ; mais nous doutons fort de l'efficacité réelle d'une telle méthode. Nous avons constaté, une fois de plus, que l'appel à l'activité de recherche des élèves était fécond, mais prenait beaucoup de temps. A voir les difficultés qu'ils rencontrent, la lenteur de leur progression, même en Seconde C, nous regrettons plutôt que les exigences du programme actuel nous aient obligés à presser le pas plus qu'il n'aurait fallu.

Nous répétons, d'autre part, que les séances de Travaux Dirigés à effectif réduit sont précieuses (en attendant que les classes de Seconde aient toutes moins de 24 élèves...), surtout avec des classes hétérogènes, et qu'une telle séance de 1 heure par semaine est très insuffisante.

VI. — Conclusion provisoire

Nous attendons d'avoir terminé, dans les quatre classes si possible, la mise à l'essai des paragraphes V et VII, pour donner d'éventuelles conclusions, en particulier sur ce qui concerne la répartition du programme en niveaux d'approfondissement, qui a été refusée par le ministère à l'A.P.M.E.P., mais qui a cependant été étudiée par certaines de ses Régionales (voir par exemple une proposition de la Commission Second Cycle de la Régionale de Lyon, Bulletin A.P.M.E.P. Numéro 325, pages 710-711).

Dès à présent, nous exprimons nos craintes à l'égard de la Seconde qui se profile à l'horizon de 1981. Alors que le principe d'une Seconde qui aurait permis de repousser d'un an l'orientation vers les divers baccalauréats nous avait paru prometteur, nous pensons maintenant que le programme de Mathématiques de Seconde risque fort d'être interprété de telle manière que l'accès à la Seconde soit refusé, en fin de Troisième, à des élèves qui actuellement aurait trouvé leur voie en Seconde A ou AB, donc que le rôle sélectif des mathématiques à ce niveau soit encore accru.