2
ÉTUDES DIDACTIQUES

L'enseignement des fractions à l'école élémentaire

par Roger MAURIN, IREM de Clermont-Ferrand

Le présent texte a été préparé pour le IVème Congrès international sur l'Enseignement des mathématiques de Berkeley. Il s'adresse, non seulement aux maîtres du premier degré, mais à l'ensemble des enseignants de mathématiques.

Le point de vue développé dans cet article sur l'enseignement des fractions à l'école élémentaire n'est pas celui d'un mathématicien ni d'un psychologue. C'est le fait d'un instituteur, d'un praticien de l'école élémentaire. On ne devra donc pas s'étonner de ne pas y trouver une réflexion mathématique sur des nombres ou une étude portant sur les obstacles didactiques à la construction des fractions. Il s'agit plutôt d'une analyse, à travers des manuels, des instructions officielles, à travers des pratiques, une analyse d'une part de ce qu'a été l'enseignement des fractions, et d'autre part de ce que perçoit un enseignant du premier degré des travaux de recherches en cours dans son pays.

L'enseignement des fractions débute au Cours Moyen de l'école primaire et s'adresse à des enfants de 9 à 11 ans. Les méthodes de présentation ont évolué depuis un siècle. J'ai cru distinguer trois grandes périodes qu'il est difficile de dater très exactement, car, quelles que soient les instructions officielles édictées et les directions de travail imposées ou suggérées aux maîtres, des pratiques antérieures persistent dans le même temps que s'installent progressivement des pratiques nouvelles. Grossièrement, ces trois périodes sont les suivantes : Après 1887 — Après 1945 — Après 1970.

Après 1887

La notion de fraction sert en premier lieu de support à la présentation des nombres décimaux. Cette présentation est faite à partir de définitions dont les auteurs de manuels de cette époque sont très friands.

"Une fraction est une ou plusieurs parties égales d'un objet.

Une fraction décimale est une fraction d'un objet divisé en dix, cent, mille parties égales.

Un nombre décimal est un nombre entier accompagné de fractions décimales".

Le croquis d'une orange découpée en morceaux "égaux" illustre le nombre décimal : 2 oranges,5 , c'est-à-dire 2 oranges, 5 dixièmes d'orange. Les techniques opératoires sur les décimaux sont traitées à partir d'exemples numériques accompagnés de récitatifs et des règles sont énoncées, par exemple : "On fait la multiplication des nombres décimaux comme si ces nombres étaient entiers ; sur la droite du produit, on sépare autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les 2 facteurs".

Cette présentation de la notion de fraction est reprise dans un chapitre spécifique. Une distinction est faite entre les fractions décimales et les autres qui seront dites ordinaires. "Un dixième de la barre est une fraction décimale, un sixième, un douzième, trois vingtièmes (sic) sont des fractions ordinaires".

L'on dispose déjà d'une écriture pour les fractions décimales ; dénominateur et numérateur sont indiqués par le même chiffre ; en effet, dans 0,2 (deux dixièmes), 2, par sa place, annonce des dixièmes et par lui-même apprend qu'il y en a 2. Mais il est indispensable d'introduire une nouvelle écriture pour les fractions ordinaires. "Une fraction ordinaire est désignée comme une division à faire : deux sixièmes de galette s'écriront $\frac{2}{6}$ ou deux galettes à diviser par 6".

Dans ce chapitre, on enseigne, à travers des exemples numériques, des règles pour comparer des fractions, les réduire au même dénominateur, les simplifier, pour les additionner, les soustraire, pour les multiplier et les diviser.

Dans certains ouvrages, surtout après que les instructions officielles de 1923 aient recommandé : "C'est sur les faits qu'il faut appuyer les calculs, les idées", un énoncé qui se veut concret précède généralement le traitement de l'exemple numérique et la règle qu'il conviendra d'appliquer dans de nombreux exercices similaires.

Après 1945

Après 1945, décimaux et fractions deviennent deux sortes de nombres distincts.

Les décimaux sont des nombres concrets, c'est-à-dire que l'expression numérique est toujours suivie d'un nom d'objet ou d'unité. Ils sont exclusivement présentés à partir du système métrique.

"Il importe de faire comprendre l'équivalence des deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule :
2 mètres et 15 centimètres = 2,15 mètres".

Les techniques opératoires sont faciles à expliquer puisqu'il est toujours possible de se ramener à une technique connue sur les entiers par un simple ou double changement d'unité.

Les fractions prennent le statut de nombres abstraits indépendants des unités. Ces nombres abstraits opèrent sur des objets ou sur des grandeurs. Dans le manuel cité, un gâteau est partagé en 5 parties égales. Paul en a 2 parts, c'est-à-dire 2 cinquièmes de gâteau. On s'intéresse aussi à différentes grandeurs associées à la tarte, par exemple au prix des 2/3 de la tarte, le prix de la tarte entière étant connu. On s'intéresse aussi au problème inverse qui consiste à chercher une grandeur, connaissant l'une de ses fractions. Comparaisons, réductions au même dénominateur, addition et soustraction des fractions sont étudiées à travers des problèmes pratiques. Multiplication et division ne sont plus au programme.

Dans presque tous les manuels de l'époque est cependant insérée une leçon au cours de laquelle on s'efforce de montrer qu'un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale et inversement, ou, si l'on préfère, qu'un nombre dit concret 0,5 m peut prendre l'aspect d'un nombre abstrait 5/10 opérant sur une grandeur, le mètre. Cette séance se réduit à une leçon de choses sur des écritures. Nulle part, on ne cherche à montrer que ces écritures pourraient remplir la même fonction opératoire.

Après 1970

La réforme de 1970 a fait l'effet d'une bombe éclatant dans le ciel jusqu'alors serein de l'enseignement du calcul à l'école élémentaire. Des manuels, le plus souvent édités en toute hâte, inondent le marché et plongent les maîtres dans la perplexité. En effet, si certains ouvrages se veulent résolument novateurs, d'autres, vaguement rétros, se teintent seulement d'un zeste de modernisme.

La mise en place d'activités de groupements en différentes bases influence la présentation des nombres décimaux.

Dans la plupart des manuels, ce sont d'abord les nombres à virgule en différentes bases qui sont introduits. La virgule indique la place du groupement que l'on a choisi comme unité. L'expression "nombre décimal" est réservée au cas où les groupements sont effectués en base *dix*.

Les commentaires s'étendent longuement sur une nouvelle introduction des fractions présentées comme opérateurs. La notion d'opérateur est construite à partir de listes de nombres naturels. L'opérateur permet de faire correspondre, à chaque nombre de la première liste, un nombre de la seconde. Ces opérateurs sont de quatre types : "additionner, soustraire, multiplier par, diviser par". Ils peuvent être composés et on recherche, quand il existe, un opérateur unique permettant de remplacer une chaîne d'opérateurs. La fraction est une notation permettant de remplacer par un seul symbole

$\longrightarrow \left(\times \dfrac{x}{y}\right) \longrightarrow$ une chaîne d'opérateurs :

$\longrightarrow (\times x) \longrightarrow$ suivi de $\longrightarrow (: y) \longrightarrow$

ou $\longrightarrow (: y) \longrightarrow$ suivi de $\longrightarrow (\times x) \longrightarrow$

au choix, x n'étant pas multiple de y. Cette présentation manque de cohérence interne, car lorsque les deux opérateurs de base ne sont pas premiers entre eux, c'est par l'intermédiaire d'une véritable mystification que l'on peut décréter que les deux chaînes d'opérateurs

$(\times a)$ suivi de $(: b)$ et $(: b)$ suivi de $(\times a)$ sont équivalentes et peuvent être remplacées par un symbole unique.

Avec une telle présentation, il est exclu qu'on puisse définir la somme de deux fractions. Par contre, on peut à nouveau multiplier deux fractions. Il suffit de se ramener à la chaîne initiale dont elles sont issues et de composer les opérateurs "multiplier par" et "diviser par". Par l'intermédiaire de l'opérateur neutre : "la machine à ne rien faire", il est commode de mettre en évidence le fait que tout opérateur fractionnaire a un inverse.

La plupart du temps, ces fractions sont présentées uniquement comme opérant sur des nombres naturels sans aucune référence à une quelconque situation. Les problèmes traités plus tard le seront pas l'intermédiaire de ce modèle unique préalablement construit.

La rupture est consommée entre le nombre décimal-mesure et la fraction-opérateur. Ces deux écritures recouvrent désormais des champs notionnels très différents.

Travaux de recherche des IREM

Depuis plusieurs années, dans de nombreux IREM, des équipes d'enseignants étudient les problèmes posés par l'enseignement des décimaux et des fractions.

Si, à l'origine, certaines équipes de recherche ont exploré des voies divergentes et conçu des présentations parfois très différentes, il me semble qu'aujourd'hui une problématique commune se dégage :

Les enfants de 9-10 ans ont à leur disposition des nombres qui sont des naturels. Ils sont confrontés à des situations-problèmes pour lesquelles les nombres qu'ils maîtrisent sont insuffisants. Ces problèmes peuvent se situer dans le domaine physique et concerner notamment la mesure des grandeurs. Il peut également s'agir de problèmes de type mathématique portant sur des relations entre des nombres connus. Ces problèmes peuvent aussi avoir pour objet le traitement d'informations où interviennent parallèlement nombres et grandeurs physiques. Dans tous les cas, les enfants sont amenés à construire de nouveaux nombres qui ne sont pas des naturels, mais des rationnels, voire des réels.

Une telle problématique, qui peut apparaître comme triviale pour des mathématiciens, fournit pourtant un cadre de référence extrêmement fécond pour des praticiens de l'école élémentaire. Elle permet de lever la confusion que font les maîtres entre les êtres mathématiques et leurs écritures, confusion largement entretenue par un siècle d'enseignement codifié.

Pour désigner ces êtres mathématiques que sont les rationnels, on dispose de différentes écritures, par exemple :

— écritures fractionnaires : 3/4 ; 6/8 ; 75/100 ; 12/7 ...
— écritures virgulées. Il est toujours possible, en choisissant une base convenable, d'écrire un rationnel à l'aide d'une écriture virgulée dont la partie non entière est finie.
— écritures décimales qui privilégient la base *dix*. Ces écritures ne permettent pas d'écrire tous les rationnels.

L'écriture décimale a acquis droit de cité dans notre civilisation.

— Dans la société, c'est elle qui sert de support aux échanges. Elle a rendu les calculs accessibles à tous. La technologie actuelle l'utilise largement. En un mot, elle est omniprésente dans notre environnement quotidien.

— Dans nos classes, elle constitue dans de nombreux cas une approximation suffisante pour répondre de manière efficace aux problèmes dans lesquels interviennent des rationnels non décimaux. Elle permet également d'approcher les nombres réels. Mais elle présente un inconvénient majeur : l'ensemble des décimaux muni de la multiplication n'est pas une structure de groupe et l'inverse d'un décimal n'est pas toujours un décimal.

La notation décimale n'est donc pas capable, à elle seule, de rendre compte, de manière satisfaisante, de la structure des nombres rationnels.

Par ailleurs, le langage usuel utilise couramment des expressions comportant des demi, tiers, quart, etc. Ces expressions recouvrent certes des concepts très différents, mais certaines d'entre elles (il y a un tri intéressant à effectuer) sont susceptibles de concourir à l'élaboration par l'enfant du concept de nombre rationnel. Cet aspect peut-il être pris en compte ou doit-on l'ignorer superbement, et s'il s'agit d'un obstacle verbal, comment hâter sa rupture ?

Il semblerait que les deux moyens d'expression : écritures décimales et écritures fractionnaires, contribuent tous deux à la construction de nouveaux nombres par l'enfant.

Des analyses d'une grande finesse sont à conduire concernant les performances sémantiques et syntaxiques de ces deux moyens d'expression, eu égard aux problèmes traités et aux procédures mises en œuvre pour les résoudre.

D'autres questions subsistent. Je n'y répondrai pas mais signalerai seulement quelques points qui font l'objet de débats au sein des groupes de recherche :

— Quel temps peut-on raisonnablement investir dans l'étude d'un moyen d'expression sans compromettre les compétences qu'il semble souhaitable de développer dans le second ?
— L'antériorité d'une des deux écritures doit-elle être favorisée ?
— L'état actuel des travaux de psychologie génétique dans ce domaine est-il en mesure d'apporter des éléments suffisants pour permettre une prise de décision concernant tel ou tel cursus proposé ?

Bibliographie

Après 1887

Manuel de référence : M.J. LEFRANC : *Arithmétique Cours Moyen*, Hachette, 1893.

Autres manuels consultés : J. CHOLLET, E. Cornely, 1905 ; DELFAUD et MILLET, Hachette, 1928.

Après 1945

Programme du Cours Moyen du 17.10.1945.
Instructions officielles du 7.12.45.
Manuel de référence : L. et M. VASSORT : *Le Calcul Vivant, Cours Moyen*, Hachette, 1955.

Après 1970

Programmes et commentaires du 2.1.1970.

Travaux de recherches des IREM

Travaux de référence :
Recherches en didactique des mathématiques : 1980, Vol. 1.1.

— Problèmes de l'enseignement des décimaux, Guy BROUSSEAU, IREM de Bordeaux

— Approche des nombres réels, Régine DOUADY, IREM de Paris-Sud.

Autres travaux consultés :

— *Fractions à l'Ecole Elémentaire,* Clermont (1976)

— *Nombres à virgule,* Clermont (1974)

— *Décimaux et fractions,* Lille (1978)

— *Opérateurs numériques,* Limoges (1977)

— *Rationnels et décimaux,* Nice (1976)

— *L'introduction des fractions au cours moyen,* Reims (1978).