Une définition intuitive, avantageuse et oubliée, de la notion d'ensemble fini.

par Marcel GUILLAUME, Université de Clermont II

Introduction

Lors du 7[e] Colloque National des Professeurs d'Ecoles Normales, qui s'est tenu à Confolant, des 2 au 4 mai dernier, un groupe "Approche du Nombre" s'est préoccupé de la pédagogie de l'introduction des nombres entiers naturels.

La pierre d'achoppement est dans la définition des ensembles finis que l'on adopte. Nous discutons ci-après quelques-unes des définitions qui ont été proposées par divers auteurs, et quelques-uns de leurs inconvénients et avantages.

1. Sur cinq définitions des ensembles finis.

Pendant le Colloque de Confolant, le groupe "Approche du Nombre" s'en est tenu (implicitement) à la définition du nombre entier naturel comme nombre des éléments d'un ensemble fini, et, en ce qui concerne les rudiments sur les ensembles finis, à deux possibilités :

— ou bien, partir de la traditionnelle

Définition 1. (Dedekind, [5]) : Un ensemble est dit *fini* s'il n'est équipotent à aucune de ses parties propres :

c'est une voie que nombre de collègues ont bien en mains ;

— ou bien partir de la

Définition 2. Un ensemble est dit *fini* s'il admet un ordre pour lequel chacune de ses parties non vides admet un premier et un dernier élément.

Lors d'un échange de correspondance sur la mise au point du rapport du groupe, m'étant livré à quelques vérifications de nos assertions, il m'est apparu que l'emploi des définitions 3 et 4 ci-après rend vraiment facile l'étude des propriétés fondamentales des ensembles finis.

Définition 3 : Etant donné un ensemble E, on dit d'une partie X de E qu'elle est *finiment énumérable* si et seulement si elle est vide ou telle qu'il existe une partie Y de E, préalablement reconnue comme finiment énumérable, et un élément a de E, tels que $X = Y \cup \{a\}$.

Commentaire : les parties finiment énumérables de E sont ainsi définies comme constituant une famille $\mathcal{F}_E$ de parties de E, telle que

(i) $\phi \in \mathcal{F}_E$

(ii) $\forall Y \in \mathcal{F}_E \quad \forall a \in E \quad Y \cup \{a\} \in \mathcal{F}_E$

(iii) ("condition de clôture") $\mathcal{F}_E$ est incluse dans toute famille $\mathcal{F}$ de parties de E satisfaisant aux conditions

(i) $\phi \in \mathcal{F}$

(ii) $\forall Y \in \mathcal{F} \quad \forall a \in E \quad Y \cup \{a\} \in \mathcal{F}$

Les conditions (i) et (ii) traduisent le "si" de la définition 3, la "condition de clôture" (iii) est la seule expression possible, à l'aide des concepts de théorie des ensembles, du "seulement si" : si $\mathcal{F}$ est une famille de parties de E satisfaisant aux conditions (i) et (ii), les parties finiment énumérables appartiennent à $\mathcal{F}$, mais une éventuelle partie Z de E, non finiment énumérable, appartenant à $\mathcal{F}$, devra ne pas appartenir à $\mathcal{F}_E$.

Définition 4 : Un ensemble E est dit *fini* s'il appartient à la famille de ses parties finiment énumérables.

Un fort bref retour à la bibliographie m'a fait constater qu'une idée aussi simple que celle qui sous-tend la définition 3 se trouve déjà dans le chapitre 120 du 2ème volume des *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead [9] (le 2ème volume est paru en 1912).

Il est fort curieux qu'elle soit tombée dans l'oubli.

Sans doute est-ce dû, pour une part, aux défauts de cet ouvrage : traité en système formel, il est agaçant à lire, en raison de la lenteur avec laquelle il procède (les logiciens d'aujourd'hui, dieu merci, s'occupent d'autre chose que de la production "pas à pas" de démonstrations formelles) ; il souffre aussi d'un excès de symboles définis (certains sont redondants) ; et puis, la façon dont il use des intuitions sur lesquelles repose la "théorie des types" de B. Russell (nous esquisserons plus loin une explication de l'objet de celle-ci) s'est avérée inappropriée au développement des mathématiques, auquel elle donne trop de complexité.

Il n'en reste pas moins que Tarski, dans son mémoire de 1924 *Sur les ensembles finis* [11], mentionne l'idée, tout en attribuant à Russell et Whitehead la

Définition 5 : Un ensemble E est dit *fini* s'il appartient à tout ensemble F tel que

$$(\mathrm{i}') \quad \phi \in F \quad \text{et} \quad (\mathrm{ii}') \quad \forall X \in F \quad \forall a \in E \quad X \cup \{a\} \in F,$$

en bonne place parmi les dix-sept dont il fait état.

Peut-être Tarski lui-même a-t-il involontairement contribué à en détourner l'attention, en mettant l'accent — ce qui est bien naturel ! — sur sa propre définition (6 ci-après), "nœthérienne", et par là plus à même de frapper l'esprit des mathématiciens de l'époque ?

Définition 6 : (Tarski [11]) : Un ensemble E est dit *fini* si toute famille non vide de parties de E admet un élément minimal pour l'inclusion.

La contribution de Tarski dans ce mémoire était importante, au moment de sa présentation ; sa rigueur dépassait les usages antérieurs, et c'était la première élaboration *complète* du fondement de la théorie des ensembles finis sur la théorie des ensembles (celle de Zermelo), à partir d'une définition ne recourant ni au bon ordre (comme la définition 2), ni à l'équipotence (comme la définition 1).

2. Sur l'emploi des ordinaux.

Avec le recul du temps, les spécialistes de théorie des ensembles sont revenus à une démarche inverse, qui consiste à définir le nombre entier naturel comme *un ordinal de Von Neumann fini,* et l'ensemble fini, comme équipotent à un tel ordinal.

Il existe en effet, parmi les ensembles engendrés à partir de l'ensemble vide par formation des singletons et réunion, des ensembles "qui comptent", transfiniment ; Zermelo les connaissait déjà en 1915 [2], et c'est en 1925 que Von Neumann [12] acheva d'en élaborer la théorie : ce sont les *ordinaux* dits de *Von Neumann.* Entre leurs éléments, l'appartenance est un bon ordre, et, afin de les caractériser, il faut conjoindre à cette propriété la "transitivité" (de l'appartenance) : un ensemble est dit *transitif* s'il admet aussi pour éléments les éléments de ses éléments.

Ces ordinaux constituent un outil agréable pour les théoriciens des ensembles ; leurs particularités en raccourcissent et en simplifient l'étude (voir, par exemple, [7]), et fournissent des moyens d'expression commodes. On dit *finis* ceux qui, parmi eux, n'ont aucune section initiale sans dernier élément. On n'a aucune peine à voir que les *ordinaux finis constituent un modèle des axiomes de Peano, et ceci, indépendamment des axiomes du choix, de l'infini, et des parties :* ainsi, les théoriciens des ensembles les assimilent-ils aux nombres entiers naturels (un des exemples des particularités auxquelles je fais allusion plus haut est que, selon cette conception, chaque nombre entier naturel *n* est un ensemble à *n* éléments).

3. Des mérites comparés des définitions précédentes.

Cependant, le groupe "Approches du Nombre" de Confolant préconise de *ne pas recourir* aux ordinaux de Von Neumann pour former les instituteurs, parce que ce sont des outils "élaborés", très éloignés des intuitions qui guident les débuts de l'apprentissage des mathématiques ; il faut déjà connaître pas mal de théorie des ensembles pour admettre comme "naturelle" la notion d'ensemble transitif.

Je conjecture, pour ma part, qu'il y a une corrélation entre le type d'une notion (au sens de la théorie des types de B. Russell) et l'effort de contention nécessaire pour l'acquérir. On peut donner une idée de ce dont il s'agit, sans entreprendre de longs développements théoriques, en rappelant cette pratique courante : partant d'un ensemble E, on en note (pas toujours, mais souvent) les éléments par des minuscules $x,y,z...$, les parties par des majuscules latines X,Y,Z,..., les familles de parties par des majuscules de rondes, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$,... L'"échelle des types" [3] dont E est l'"univers" en range les éléments dans le type de base (zéro), les parties dans le type aussitôt au-dessus (un), et les familles de parties dans le type encore juste au-dessus (deux).

La conjecture ci-dessus conduit à ranger dans le même ordre les degrés de difficulté d'étude des identités vérifiées par telle ou telle structure algébrique, des propriétés de leurs quotients, et des propriétés des structures topologiques.

Or, on bute sur une complication supplémentaire dans le cas d'un ensemble transitif : dans quel type en ranger les éléments, qui en sont aussi des parties ? Et l'échelle des types dont l'univers est l'ensemble vide assigne à chaque élément d'un ordinal de Von Neumann un type qui lui est propre !

La définition 5 souffre d'un flou analogue quant au type des familles d'ensembles en jeu. Les autres définitions ci-dessus sont nettes quant aux types : les définitions 1 et 2 renvoient aux parties, la définition 6 aux familles de parties, la définition 3 aux familles de parties satisfaisant à certaines conditions.

Un des intérêts théoriques du détour par les ordinaux de Von Neumann est de faire voir que les *propriétés reconnues aux ensembles finis par les mathématiciens ont des démonstrations indépendantes, entre autres, de l'axiome de choix* (mieux, on établit le principe de choix pour les familles finies : on montre que toute famille finie $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles non vides admet une fonction de choix

$$\varphi : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} E_i$$

telle que $\forall i \in I \quad \varphi(i) \in E_i$). *Le gros défaut de la définition de Dedekind est qu'elle contraint à faire usage de l'axiome de choix* pour établir certaines des propriétés fondamentales des ensembles finis ; telles, par exemple, la finitude de l'image d'un ensemble fini par une application, ou encore, celle d'une réunion finie d'ensembles finis.

La définition 2 a le mérite d'être intuitive et de permettre d'établir que les nombres entiers naturels satisfont aux axiomes de Peano, puis de reproduire les mêmes raisonnements qu'à partir de la notion d'ordinal fini (elle se prête aussi à des démonstrations directes des propriétés des ensembles finis, dont certaines sont simples ou assez simples), mais, en vue d'établir que les axiomes de Peano sont satisfaits, elle exige un détour par l'étude des sections initiales des bons ordres et de leurs isomorphismes.

La définition 6 n'est pas aussi proche de l'intuition ; elle ne peut être bien admise, c'est-à-dire opérationnellement comprise, par des débutants, qu'au prix d'une justification prenant quelque temps. De plus, elle souffre d'un défaut analogue à celui de la définition 1 : les propriétés des ensembles finis ne s'en déduisent toutes qu'en utilisant l'axiome des parties.

Il nous reste le groupe des définitions 3 et 4, qui ne sont pas moins intuitives que la définition 2, et rendent sans longs détours les mêmes services que celle-ci : pour le faire voir, nous produisons, ci-après, une esquisse de l'étude des ensembles finis reposant sur ces définitions.

4. Sur l'emploi du groupe des définitions 3 et 4.

Proposition 1. Si E et F sont des ensembles, de $F \subset E$ résulte $\mathcal{F}_F \subset \mathcal{F}_E$

Démonstration : $\mathcal{F} =_{DF} \{X \in \mathcal{F}_E / X \subset F\}$ satisfait (i) et (ii) pour F.

Proposition 2. $\mathcal{F}_\phi = \{\phi\}$.

Corollaire. ϕ est un ensemble fini.

Proposition 3. Si E est un ensemble fini, tout ensemble de la forme $E \cup \{x\}$ est fini.

Démonstration : d'une part, on a $E \in \mathcal{F}_{E \cup \{x\}}$ (définition 4 et proposition 1). Il résulte donc de $x \in E \cup \{x\}$ et de (ii) que

$$E \cup \{x\} \in \mathcal{F}_{E \cup \{x\}}$$

Corollaire. Toute paire $\{a,b\}$ est un ensemble fini.

Proposition 4. Soient E un ensemble et F une partie de E. Pour que F soit une partie finiment énumérable de E, il faut et il suffit qu'elle soit un ensemble fini.

Démonstration : par la proposition 1, si $F \in \mathcal{F}_F$, on a $F \in \mathcal{F}_E$: si F est finie, elle est finiment énumérable.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des $F \in \mathcal{F}_E$ qui sont finies ; par le corollaire de la proposition 2, et la proposition 3, $\mathcal{F}$ satisfait (i) et (ii) pour E ; par (iii) on a donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}_E$: toute partie finiment énumérable est finie.

Remarque : le même schéma de démonstration établit toute proposition de la forme :

Toute partie finiment énumérable d'un ensemble E est finie au sens de..., quelle que soit la définition à laquelle renvoie la locution "finie au sens de..." (par exemple, Dedekind, Tarski,...), car, quelle que soit cette définition, elle se doit d'être telle que

(a) ϕ est *fini au sens de...*,

(b) Si E est un ensemble *fini au sens de...*, il en va de même de tout ensemble de la forme $E \cup \{x\}$.

Ainsi, tout ensemble fini admet un ordre dont toute partie non vide admet un premier et un dernier élément ; tout ensemble fini n'est équipotent à aucune de ses parties propres, etc., et ces propriétés peuvent, à loisir, être utilisées pour simplifier, par rapport au schéma général que nous indiquons plus loin, les démonstrations, non produites, de certaines des propositions énumérées : en effet, ce schéma général est celui qui, une fois établi que **N** est un modèle des axiomes de Peano, consiste à déduire toutes les propriétés des ensembles finis de cette seule circonstance ; le théorème le plus difficile selon cette progression est celui qui affirme l'existence et l'unicité d'un "ordre naturel" sur un modèle des axiomes de Peano.

Corollaire : Si E est un ensemble, $\mathcal{F}_E$ est la famille de ses parties finies au sens de la définition 4.

Commentaire : Si, dans la définition 3, nous avions appelé $\mathcal{F}_E$ la famille des parties finies de E, la proposition 4, qu'il n'aurait pas été moins nécessaire de démontrer, aurait dû s'énoncer : "Pour que F soit une partie finie de E, il faut et il suffit qu'elle soit un ensemble fini". A première vue, un tel énoncé pose problème ! Problème qui n'est nullement sans solution, et même tout à fait intéressante par ce que nous y apprenons sur le langage mathématique. Mais ce problème ne se situe pas dans le droit fil de l'initiation d'un débutant à la théorie de la finitude ; il ne me semble pas que ce soit à ce moment-là qu'il convienne de le poser et de le discuter. Ainsi, adopter dans la définition 3 une qualification différente de "finie" repose avant tout sur une démarche pédagogique permettant d'évacuer ce problème avant que l'on s'adresse à des esprits assez mûrs pour l'aborder. Le choix de "finiment énumérable" a aussi une arrière-pensée pédagogique : montrer au lecteur que nous ne sommes pas si loin de la définition 2 ; et, s'il renonce à celle-ci pour introduire la finitude, au profit du groupe des définitions 3 et 4, mettre en évidence qu'il reste, dans ces dernières, quelque chose de l'idée qui sous-tend la définition 2.

Définition 7 : On appelle nombre entier naturel tout nombre d'éléments d'un ensemble fini.

Commentaire : Ce qui suit s'adapte à tout point de vue sur la notion de "nombre nb(E) des éléments d'un ensemble E" dans lequel vaille la

Proposition 5. Des ensembles ont le même nombre d'éléments si et seulement s'ils sont équipotents.

Toutefois, nous rappelons au lecteur que nous situons cette étude de la finitude *en dehors* du cheminement de pensée qui consiste à expliquer les axiomes de Peano, à en fixer un modèle, et à appeler "nombres entiers naturels" les éléments de ce modèle (cette démarche est déroutante pour le débutant générique à qui on "explique" que ce choix peut être "arbitraire" — et *a fortiori* pour celui à qui cet arbitraire est balancé sans explication — notamment, sans que soit explicitée la démarche par laquelle le modèle appelé **N** est fixé) : nous cherchons, au contraire, à procéder sans avoir à expliciter d'axiomes (ceux de la théorie des ensembles peuvent en la matière être utilisés sans explicitation, bref être tacitement admis comme évidents, et d'autant plus que nous savons pouvoir nous passer de tous ceux dont l'"évidence" a été discutée).

Définition 8. (Frege, [6], 1884) : $0 = \mathrm{nb}\,(\phi)$.

Définition 9. (Frege, ibid) : si n et p sont deux nombres, nous dirons que ***p vient juste après n*** s'il existe un ensemble E et un élément x de E tels que $\mathrm{nb}(E) = p$ et $\mathrm{nb}(E \setminus \{x\}) = n$.

Nous noterons cela $p\ S\ n$.

Proposition 6. 0 ne vient juste après aucun nombre.

Proposition 7. La propriété S est univoque en chacun de ses arguments.

Les démonstrations reposent sur des propriétés simples et bien connues des bijections.

Proposition 8. La propriété S est fonctionnelle en son second argument : chaque nombre en admet un et un seul autre qui "vient juste après" lui, et qu'on appelle son successeur ; l'application s qui, à chaque nombre, associe son successeur, est une injection, à l'image de laquelle 0 n'appartient pas.

La démonstration requiert d'établir qu'étant donné un ensemble E, il existe un objet x qui n'appartient pas à E ! Ou, la même chose, pour un ensemble de même nombre d'éléments que E.

On peut remarquer que dans le cas contraire E contiendrait, comme éléments, tous les ensembles, et notamment ceux qui n'appartiennent pas à eux-mêmes ; et donc, comme partie, l'ensemble R des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes, qui donne lieu au paradoxe de Russell [8] : $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

Ce type de raisonnement s'avérant souvent déroutant pour les débutants, nous en suggérons un autre : une fois établi que $\phi \neq \{\phi\}$, pour tout $y \in E$, on a $x = (y, \{\phi\}) \notin E \times \{\phi\}$; or, $E \times \{\phi\}$ est équipotent à E.

Proposition 9. Les nombres entiers naturels satisfont au principe de récurrence :

si $P(x)$ est une propriété d'un argument x, satisfaisant aux conditions

(1) on a $P(0)$,

et (2) pour tout nombre entier naturel n, de $P(n)$ il résulte $P(s(n))$,

alors, tout nombre entier naturel possède la propriété P [on remarquera qu'on écrit aussi $n + 1$ au lieu de $s(n)$, et $P(n+1)$ au lieu de $P(s(n))$].

Démonstration. Soient E un ensemble et

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{F}_E \mid P(\mathrm{nb}(X))\}$$

la famille des parties finies de E dont le nombre d'éléments possède la propriété P. Par (1), $\mathcal{F}$ satisfait à (i), et par (2), à (ii) ; ainsi, par (iii), a-ton $\mathcal{F} = \mathcal{F}_E$. En particulier, cela s'applique si E est fini ; ainsi, tout ensemble fini a-t-il pour nombre d'éléments un nombre possédant la propriété P ; mais il n'y a de nombres entiers naturels que ceux des ensembles finis.

Corollaire. Les nombres entiers naturels constituent un modèle des axiomes de Peano.

Partant de là, on démontre :

— que pour tout nombre entier naturel n, les nombres $s(n)$ et n sont distincts (récurrence) ;

— qu'il existe un unique ordre sur les nombres entiers naturels (en fait, sur tout modèle des axiomes de Peano), *l'ordre naturel*, tel que pour tout nombre entier naturel n on ait $n < s(n) \not< n$;

— que, pour tout nombre entier naturel n, les ensembles à n éléments sont les ensembles équipotents à l'ensemble $\mathbf{N}_n$ des nombres entiers naturels $p \not< n$;

— que toute image d'un ensemble fini par une application (en particulier, une partie de cet ensemble) est un ensemble fini ;

— que la réunion de deux ensembles finis est un ensemble fini ;

— que toute réunion finie d'ensembles finis est un ensemble fini ;

— que le produit de deux ensembles finis est un ensemble fini ;

— que le produit d'une famille finie d'ensembles finis existe et est un ensemble fini ;

— que l'ensemble des applications d'un ensemble fini vers un autre existe et est un ensemble fini ;

— que l'ensemble des parties d'un ensemble fini existe et est un ensemble fini,

etc. (bien entendu, les assertions d'existence sont à admettre tacitement lorsqu'on s'adresse à des débutants, et inutiles si l'on se place d'emblée dans une axiomatique où il est admis que tout ensemble admet un ensemble de parties).

Certaines de ces propositions ont des démonstrations directes relativement simples (mais n'établissant pas divers compléments sur les décomptes de nombres d'éléments, qui ont aussi leur intérêt). Nous en esquissons quelques exemples pour les amateurs :

Proposition 10. Soient E un ensemble, et f une application définie sur E : les parties finiment énumérables de $\mathrm{Im}(f)$ sont les images par f des parties finiment énumérables de E.

Démonstration : la famille $\mathcal{F}$ des parties de $\mathrm{Im}(f)$ images par f des éléments de $\mathcal{F}_E$ satisfait à (i) et (ii) pour $\mathrm{Im}(f)$; ainsi $\mathcal{F}_{\mathrm{Im}(f)} \subset \mathcal{F}$. La famille $\mathcal{G} = \{P \in \mathcal{F}_E \mid f(P) \in \mathcal{F}_{\mathrm{Im}(f)}\}$ des parties finies de E dont l'image par f est une partie finie de $\mathrm{Im}(f)$ satisfait à ces conditions pour E ; ainsi $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\mathrm{E}}$, ce qui entraîne $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{Im}(f)}$.

Corollaire. Si E est fini, toute image de E par une application (en particulier, toute partie de E) est finie.

Proposition 11. Soient E et F des ensembles ; les parties finiment énumérables de E $\cup$ F sont les réunions d'une partie finiment énumérable de E et d'une partie finiment énumérable de F.

La démonstration passe par la constatation que pour toute $\mathrm{P} \in {}_{\mathrm{E}}$, la famille $\mathcal{F} =_{\mathrm{Df}} \{\mathrm{Q} \in \mathcal{F}_{\mathrm{F}} \mid \mathrm{P} \cup \mathrm{Q} \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}\cup\mathrm{F}}\}$ satisfait aux conditions (i) et (ii) pour F, donc est égale à $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}$.

Corollaire. La réunion de deux ensembles finis est un ensemble fini.

Proposition 12. Soient E et F des ensembles ; les parties finiment énumérables de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ sont celles dont les deux projections sont finiment énumérables.

Démonstration : dans un sens, on applique la proposition 10, dans l'autre : si $\mathrm{P} \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}$, l'ensemble $\mathcal{F} = \{\mathrm{Q} \in \mathcal{F}_{\mathrm{F}} \mid \mathrm{P} \times \mathrm{Q} \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}\times\mathrm{F}}\}$ satisfait (i) et (ii) pour F ; car si $\mathrm{Q} \in \mathcal{F}$ et si $y \in \mathrm{F}$, on a

$$\mathrm{P} \times (\mathrm{Q} \cup \{y\}) = (\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) \cup (\mathrm{P} \times \{y\}) ;$$

or on a $\mathrm{P} \times \{y\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}\times\{y\}}$ par la proposition 10, donc

$$\mathrm{P} \times (\mathrm{Q} \cup \{y\}) \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}\times\mathrm{F}}$$

par les propositions 1 et 11. Ainsi, si $\mathrm{R} \subset \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est telle que $\mathrm{pr}_1(\mathrm{R}) \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{pr}_2(\mathrm{R}) \in \mathcal{F}_{\mathrm{F}}$, on a $\mathrm{R} \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}\times\mathrm{F}}$, parce qu'on a $\mathrm{R} \subset \mathrm{pr}_1(\mathrm{R}) \times \mathrm{pr}_2(\mathrm{R})$, et en utilisant le corollaire de la proposition 10 et la proposition 4.

Corollaire : Le produit de deux ensembles finis est un ensemble fini.

Remarque : Le lecteur aura peut-être pris garde que les familles de parties d'un ensemble considérées ici sont incluses dans celle des parties finiment énumérables de cet ensemble, ou obtenues à partir d'une telle famille par application du schéma de remplacement. Mais même l'hypothèse qu'une telle famille existe pour tout ensemble n'est pas nécessaire ; il suffit de modifier la définition 3 en disant que l'ensemble E *sépare* ses parties finiment énumérables, lorsqu'il existe une famille $\mathcal{F}_{\mathrm{E}}$ de parties de E satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii), famille dont les éléments sont alors appelées les parties finiment énumérables de E, et la définition 4 en disant qu'un ensemble est fini s'il sépare ses parties finiment énumérables et est l'une d'entre elles. Les énoncés et démonstrations des propositions 1 à 4 et 9 ci-dessus s'adaptent aisément à cette modification (la proposition 1 vaut alors sous l'hypothèse que E et F séparent leurs parties finiment énumérables, la proposition 4 sous la même hypothèse pour F).

Commentaire : Ce que Russell et Whitehead définissent de façon analogue à la définition 3 est l'ensemble des classes finies d'éléments d'un type, et ils définissent une telle classe comme finie si et seulement si elle appartient à toute famille de classes d'éléments de ce type à laquelle appartient la classe vide, et, en même temps qu'une classe Y et un élément *a* du type, la classe Y $\cup$ {*a*}. La définition 5 remplace les familles d'éléments du type par les familles de toutes espèces (satisfaisant aux conditions (i') et (ii'). La définition 3 interprète le "type" par n'importe quel ensemble et les "classes d'éléments de ce type" par les parties de cet ensemble.

Un autre motif pour lequel il est souhaitable d'user, à un certain niveau, de définitions qui permettent d'obtenir les propriétés des nombres entiers naturels sans faire référence aux axiomes des parties, de l'infini et du choix, est que la théorie des ensembles dont les axiomes sont les axiomes d'extension, d'existence de l'ensemble vide, des paires et des réunions, et le schéma de remplacement, est "équivalente" à l'arithmétique de Peano "du premier ordre", en ce sens qu'un modèle de chacune de ces théories peut être construit à partir d'un modèle de l'autre : elles sont donc, ou toutes deux exemptes de contradiction, ou toutes deux contradictoires (Nous avons abondamment parlé des modèles des axiomes de Peano. L. Schwartz, dans un article de ce *Bulletin* [10], a présenté le modèle imaginé par W. Ackermann ([1], 1937) de la théorie des ensembles reposant sur ces axiomes, et construit à partir d'un modèle des axiomes de Peano).

BIBLIOGRAPHIE

1. **Ackermann,** Wilhelm. *Der Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre.* Mathematische Annalen 114 (1937), pp. 305-315.
2. **Bernays,** Paul. *A system of axiomatic set theory II.* Journal of symbolic Logic 6 (1941), pp. 1-17.
3. **Bourbaki,** Nicolas. Eléments de Mathématiques. Théorie des Ensembles, chapitre IV, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1966.
4. Comptes rendus des discussions du Colloque de Confolant, à paraître.
5. **Dedekind,** Richard. Was sind und was sollen die Zahlen ? Vieweg, Braunschweig 1888. [Il en existe une traduction anglaise par W.W. Beman. Dover, New-York, 1963].
6. **Frege,** Gottlob. Die Grungdlagen der Arithmetik, eine logisch - mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau, 1884.
7. **Krivine,** Jean-Louis. Théorie axiomatique des ensembles. Presses Universitaires de France, Paris, 1969.

8. **Russell**, Bertrand. The principles of mathematics, vol. 1. University Press, Cambridge (Angleterre). 1903.
9. **Russell**, Bertrand, et **Whitehead**, Alfred North. Principia Mathematica. University Press, Cambridge (Angleterre), Vol. 1, 1910, vol. 2, 1912, vol. 3, 1913.
10. **Schwartz,** Laurent, *Le modèle d'une théorie des ensembles*. Bulletin de l'APMEP 261 (1968) pp. 87-94.
11. **Tarski**, Alfred. *Sur les ensembles finis*. Fundamenta Mathematicae 6 (1924) pp. 45-95.
12. **Von Neumann,** John. *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.* Journal für reine and angewandte Mathematik 154 (1925) pp. 199-240.