1

ETUDES

A propos de la suite de Fibonacci

par Roger CUCULIERE (Paris)

La *suite de Fibonacci* n'est certainement pas à présenter aux lecteurs du Bulletin (*).

On sait que cette suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et, pour tout $n \geqslant 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (1). Son terme général est donné par la *formule de Binet* :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad (2),$$

où α et β sont les racines de *l'équation caractéristique* : $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Cette suite jouit de nombreuses propriétés, dont on peut trouver les principales dans la brochure du fondateur de la Fibonacci Association of America, *W.E. Hoggatt* : "Fibonacci and Lucas Numbers" (Houghton Mifflin, 1969). Il est fascinant qu'une définition aussi simple que la relation (1) ait de telles conséquences. On peut penser ici à la suite double C_n^p, régie elle aussi par une relation de récurrence, on ne peut plus simple : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, et qui possède aussi nombre de propriétés de toutes sortes.

La *suite de Lucas* (**) est la petite sœur de la précédente. Elle est définie par : $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, même relation de récurrence que F_n. Une autre formule de Binet donne : $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

Et l'on a notamment les propriétés suivantes :

$$F_{2n} = F_n L_n \qquad (3),$$

$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n \qquad (4).$$

*

* *

(*) Voir notamment l'article de *E. Ehrhart*, Bulletin n° 325, p. 652.

(**) *Edouard Lucas* : né à Amiens en 1842, mort à Paris en 1891, professeur dans divers lycées parisiens, notamment Saint-Louis. Connu pour ses apports à la Théorie des Nombres, à la Combinatoire, aux Récréations Mathématiques.

Certains problèmes relatifs à la suite de Fibonacci sont encore ouverts. Par exemple, quelle est la somme de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$? On peut remarquer que l'on a $|\beta| \simeq 0{,}618 < 1$ et que par suite β^n tend (assez vite) vers 0. D'après la formule (2), la somme A de cette série ne sera pas éloignée de :

$$A' = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha-\beta}{\alpha^n} = \sqrt{5} + 1 = 3{,}236.$$

On peut même montrer que A' est une valeur approchée de A *par défaut* et que l'erreur commise n'est pas supérieure à 0,220. Un programme simple sur calculatrice de poche permet de trouver : A = 3,359 886.

Mais je voudrais montrer maintenant que l'on peut trouver la somme de la série :

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_8} + \frac{1}{F_{16}} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{F_{2^k}} .$$

Soit S cette somme. On a :

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2^k} - \beta^{2^k}}$$

d'après la formule (2).

Rappelons-nous que : $\alpha\beta = -1$, et que par suite :

$$\frac{1}{\alpha^{2^k} - \beta^{2^k}} = \frac{\beta^{2^k}}{1 - \beta^{2^{k+1}}} \text{ pour } k \geqslant 1.$$

On a donc :

$$S = 1 + (\alpha-\beta) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta^{2^k}}{1 - \beta^{2^{k+1}}} .$$

Nous nous ramenons ainsi à la somme de la série :

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^4}{1-z^8} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2^k}}{1-z^{2^{k+1}}} ,$$

Une fois cette somme trouvée, nous aurons :

$$S = 1 + (\alpha-\beta)\left(f(\beta) - \frac{\beta}{1-\beta^2}\right) .$$

Pour déterminer cette somme f(z), on note que $\frac{z^{2^k}}{1-z^{2^{k+1}}}$ peut être considéré comme la somme d'une suite géométrique infinie de premier terme z^{2^k} et de raison $z^{2^{k+1}}$, de sorte que l'on a :

$$\frac{z}{1-z^2} = z(1+z^2+z^4+z^6+\ldots.) = z+z^3+z^5+z^7+\ldots$$

$$\frac{z^2}{1-z^4} = z^2(1+z^4+z^8+z^{12}+\ldots) = z^2+z^6+z^{10}+z^{14}+\ldots$$

$$\frac{z^4}{1-z^8} = z^4(1+z^8+z^{16}+z^{24}+\ldots.) = z^4+z^{12}+z^{20}+z^{28}+\ldots. \quad ,$$

et ainsi de suite. On remarque que, dans la somme de tous ces termes, on trouve une fois et une seule chaque puissance de z à partir de l'exposant 1, c'est-à-dire que :

$$f(z) = z+z^2+z^3+z^4+\ldots = \frac{z}{1-z} \quad si\ |z|<1.$$

En effet, $\frac{z}{1-z^2}$ est la somme des z^n pour *n impair,* $\frac{z^2}{1-z^4}$ est la somme des z^n où n est le *double* d'un nombre impair, $\frac{z^4}{1-z^8}$ est la somme des z^n où n est le *quadruple* d'un nombre impair, etc. En général, on a :

$$\frac{z^{2^k}}{1-z^{2^{k+1}}} = z^{2^k}\sum_{h=0}^{+\infty} z^{h.2^{k+1}} = \sum_{h=0}^{+\infty} z^{2^k(2h+1)}$$

D'où :
$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{h=0}^{+\infty} z^{2^k(2h+1)} \quad .$$

Et le tout se résout dans le fait suivant, trivial mais gros de conséquences :

Tout entier naturel non nul est d'une seule manière produit d'un entier naturel impair par une puissance de 2 d'exposant $\geqslant 0$.

Ainsi donc, on peut affirmer que : $f(z) = \frac{z}{1-z}$ pour $|z|<1$. D'ailleurs, pour $|z|>1$, on voit immédiatement que :

$$\frac{z^{2^k}}{1-z^{2^{k+1}}} = \frac{\frac{z^{2^k}}{z^{2^{k+1}}}}{\frac{1}{z^{2^{k+1}}}-1} = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2^k}}{\left(\frac{1}{z}\right)^{2^{k+1}}-1}$$

ce qui implique : $f(z) = -f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{1-z}$.

Mais cela ne concerne pas notre actuel propos, lequel est de déterminer :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{F_{2k}} = 1 + (\alpha-\beta)\left(f(\beta) - \frac{\beta}{1-\beta^2}\right).$$

Puisque l'on a $|\beta| < 1$, la valeur de $f(\beta)$ est $\dfrac{\beta}{1-\beta}$, et il vient :

$$S = 1 + (\alpha-\beta)\left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta^2}\right).$$

Après calculs, on voit que : $S = 3+\beta = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \simeq 2{,}381\,966.$

*

* *

Adressons-nous pour finir aux hommes de peu de foi qui ne croiraient pas à la valeur de S que nous venons de trouver. Pour cela, remarquons que les formules (3) et (4) ci-dessus permettent de calculer de proche en proche F_2, F_4, F_8, etc. Car pour n pair, ces formules deviennent :

$$F_{2n} = F_n L_n \quad ,$$
$$L_{2n} = L_n^2 - 2 \quad .$$

Dès lors, on part de : $F_2 = 1$ et $L_2 = 3$. D'où : $F_4 = 1.3 = 3$, $L_4 = 3^2 - 2 = 7$. Et ensuite : $F_8 = 3.7 = 21$, $L_8 = 7^2 - 2 = 47$, etc. Voici un programme sur HP 29 C qui effectue le calcul de S :

```
gLBL1
1
STO 1
3
STO 2
2
STO 3
gLBL2
RCL1
RCL2
×
STO 1
g 1/x
STO + 3
RCL3
f PAUSE
RCL2
gx²
2
—
STO 2
GTO 2
```

Ce programme calcule les valeurs successives de F_{2k} dans le registre 1 et de L_{2k} dans le registre 2. L'instruction "PAUSE" permet de faire défiler les valeurs successives de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2k}}$$

à partir de S_3. On peut ainsi pressentir la convergence de cette série et calculer une valeur approchée de sa somme S.