2

MATHEMATIQUES ET SOCIETE

Les mathématiques existent, mais peut-on les rencontrer ?

par Didier NORDON, Bernard ROUSSEAU,
U.E.R. de Mathématiques et Informatique,
Université de Bordeaux I

"De toutes façons, ce n'est pas comme ça qu'on fait des maths !".

Telle est la réflexion qu'on prête à un mathématicien qui venait d'assister à la conférence où Apéry avait exposé pour la première fois sa démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$. De fait, Apéry s'était permis bien des choses à l'égard de Dame Mathématique, divisant par zéro, maniant sans précaution les séries divergentes ... Mais d'autres mathématiciens ont vu du bon grain sous l'ivraie et aujourd'hui, bien que l'intuition qui a guidé Apéry reste mystérieuse, sa démonstration a été épurée et a acquis droit de cité [2].

Mais au nom de quoi notre mathématicien se scandalisait-il ? Pourquoi ressentait-il l'attitude d'Apéry comme un sacrilège, au point de ne même plus pouvoir essayer de comprendre ce qu'Apéry voulait dire ?

Risquons ici une explication partielle, que nous énoncerons d'abord sous une forme brutale mais que nous nuancerons en même temps que nous essaierons de la justifier : *les mathématiciens — de la maternelle au Collège de France !*(1) *— ont intériorisé l'idée que, "quelque part", existent "les" mathématiques, et que celles-ci irradient, mais perdent en pureté au fur et à mesure que — du Collège de France à la maternelle ! — on s'éloigne de ce "quelque part".*

(1) O usage révélateur des majuscules ...

Bien entendu, personne ne soutient explicitement une telle opinion, et nous la désignerons dans la suite de ce texte sous le nom de "croyance implicite". Mais par exemple, comment expliquer autrement que par cette "croyance implicite" le fait que l'expression "mathématiques pures" soit toujours vivace parmi les mathématiciens, alors que, consciemment, ils savent très bien qu'elle n'a guère de sens ?

Comment expliquer autrement que, dans ce domaine de pure rationalité que sont supposées être les mathématiques, les arguments d'autorité soient loin d'être inconnus ?(2) Par exemple, toute une école en France a négligé l'analyse non standard sans autre raison que le mépris que lui portaient certains mathématiciens français éminents. Inversement, les phénomènes de bruits de couloir font partie intégrante de la réputation des mathématiciens ; exemple extrême : tous les mathématiciens sont intimement convaincus de l'immense envergure de tel lauréat de la médaille Fields, tout simplement parce qu'ils ont entendu des mathématiciens réputés "forts" faire son éloge. Bien sûr, la mode change : tel qui hier ricanait d'Apéry (et le dénigrement entre mathématiciens peut aller bon train, lui aussi !), l'estime aujourd'hui, puisqu'aujourd'hui des mathématiciens estimables l'estiment. La tendance à avoir une opinion, même sur des sujets qu'on ne connaît pas, indique probablement l'attachement général des chercheurs à un progrès scientifique dont l'idéal serait de nous rapprocher tous du "quelque part" : on se plaindrait sans doute moins de la multiplication des publications si le "progrès scientifique" n'imposait à chaque chercheur — pour ne pas se "laisser dépasser" — d'avoir la connaissance la plus globale possible des résultats obtenus dans son domaine. Résultats si nombreux que bien des chercheurs les réutilisent sans les avoir vérifiés en détail — d'où, en partie, cette nécessité de faire confiance aux réputations.

"Les bonnes mathématiques sont faites par très peu de gens (...). Il y a une poignée de "leaders". Les bonnes orientations sont celles données par ces gens-là : exemples, Riemann, Elie Cartan, Siegel ; (...) l'opinion des autres est sans importance (...). Ceux qui suivent ont un rôle nullement négligeable : ils jouent le rôle de *caisses de résonance*". Cette déclaration de J. Dieudonné [3] vous paraît-elle trop brutale pour être représentative ? Pourquoi alors le "recyclé" demande-t-il au "recycleur" : "Mais finalement, cette notion, quelle en est la *bonne* définition ?" ?

On peut expliquer aussi par la "croyance implicite" la ressemblance, dans le style et dans la forme, de beaucoup d'articles de recherche mathématique, ainsi que le formalisme des manuels : dans ces deux cas, le discours mathématique prend modèle sur le discours le plus abstrait possible, celui que sont censés pratiquer les mathématiciens les plus prestigieux.

---

(2) Qui n'a peur de l'inspecteur ?

Evidemment, une telle conception des mathématiques est proprement effrayante, et Stella Baruk a décrit l'angoisse qui tenaille celui qui fait des mathématiques (professionnel ou non) : l'angoisse d'être ou non "intelligent", l'angoisse de paraître ou non "intelligent" — surtout devant des gens plus près du "quelque part" [1].

Nous refusons pour notre part cette conception, et voudrions lui opposer ici une conception plus "existentialiste" des mathématiques. Comparons les deux approches suivantes :

Définition 1. On appelle mathématiques ce que font les mathématiciens.
Définition 2. On appelle mathématiciens ceux qui font des mathématiques.

La définition 1 est généralement ressentie comme une boutade, la définition 2 est au contraire l'opinion commune, l'évidence. Bien entendu, la sociologie ne résout pas les questions philosophiques et nous ne pousserons pas le paradoxe jusqu'à prétendre que l'approche représentée par la définition 1 permette à elle seule de caractériser ce qu'est une activité mathématique — mais nous soutenons qu'elle donne un point de vue sur les mathématiques qui n'est pas sans intérêt. En tous cas, la définition 1 ne nous semble pas charrier plus d'idéologie implicite ni recéler plus de cercles vicieux que la définition 2. Par exemple, elle rend mieux compte du fait que le mot "mathématiques" change de sens au cours de l'histoire : un Grec ou un savant de l'époque classique européenne considéraient comme mathématique une recherche que nous jugeons aujourd'hui physique, ou théologique, ou philosophique, ou musicale ... Au nom de quoi dire aujourd'hui qu'*en fait* cette recherche n'était pas mathématique, *si* ce n'est précisément au nom de la "croyance implicite" décrite plus haut, et qui s'étend aussi au temps car il va de soi qu'aujourd'hui, nous sommes nécessairement plus près que nos prédécesseurs du "quelque part" ?

Est-il d'ailleurs légitime de vouloir faire la distinction entre ce qui, dans l'activité d'un mathématicien, est mathématique et ce qui ne l'est pas ? Par exemple, l'objet d'une conversation entre deux mathématiciens peut aussi bien être purement mathématique que tout à fait "profane", mais il glisse insensiblement d'un de ces pôles à l'autre : quand deux mathématiciens se forment un jugement sur un troisième — ce qui peut avoir des incidences sur la carrière de ce dernier, donc sur son influence mathématique ; ou quand ils discutent de leur enseignement ; ou quand ils relèvent une faute de logique dans le discours d'un homme politique, ils ne sont sans doute plus en train de faire des mathématiques mais pourtant, ils sont certainement encore mathématiciens. D'autre part, l'investissement de chaque mathématicien dans les mathématiques possède des aspects affectifs complexes : au nom de quoi séparer les diverses réalisations (professionnelles, politiques, humaines ...) qu'un homme donne à sa vie ? De ce point de vue encore, le caractère flou de la définition 1 nous paraît moins illusoire que l'apparente rigueur de la définition 2, il nous paraît poser des questions de façon plus riche.

Puisque nous refusons l'idéalisme de mathématiques du ciel dont les mathématiciens ne seraient que des incarnations plus ou moins dignes, force nous est de reconnaître une pertinence profonde à certaines critiques visant le comportement de la "communauté mathématique" ; nous refusons l'échappatoire (qui libère d'autant plus les "grands" mathématiciens qu'elle accable les "petits") qui consiste souvent à rejeter ces critiques en les considérant comme circonstancielles, c'est-à-dire négligeables ou médiocres, puisqu'elles n'atteindraient pas l'essentiel — à savoir "les mathématiques".

Que — dignes spécialistes ! — les mathématiciens se veuillent techniciens et non humanistes ; que l'itinéraire humain de chacun soit donc tenu pour négligeable (lorsque Grothendieck délaissait les mathématiques au profit de la lutte écologique, de bons esprits voulaient en chercher la cause dans son échec à démontrer les conjectures de Weil !) ; que d'autre part les chercheurs en mathématiques publient sans jamais vouloir examiner la question du risque d'applications dangereuses de leurs travaux alors que Godement [4] ne cesse de montrer et de dénoncer la mainmise de l'armée sur la recherche mathématique et donne des exemples de recherches tout à fait "pures" qui ont des applications tout à fait guerrières — voilà qui met en cause non seulement les mathématiciens, mais encore les mathématiques dans leurs réalisations concrètes, les seules que nous puissions prendre en compte.

Que la recherche mathématique soit faite par une multitude de spécialistes qui ne se comprennent à peu près plus les uns les autres, d'où l'importance déjà signalée des "on dit" ; qu'en mathématiques, comme ailleurs, chacun produise coûte que coûte et — en même temps ! — se plaigne de l'avalanche de publications — voilà qui informe sur les mathématiques et pas seulement sur le système universitaire.

Mais inversement, s'il est vrai que les U.E.R. de mathématiques fonctionnent souvent de façon moins antidémocratique que d'autres U.E.R. ; ou (dans un tout autre ordre d'idées), s'il est vrai que les mathématiciens sont souvent musiciens — cela aussi informe sur les mathématiques.

En suggérant que la "croyance implicite" n'est pas la seule conception possible des mathématiques, nous voudrions tenter, entre autres, de nous dégager de la hiérarchisation qui lui est fortement liée et de la stérilisation qu'implique souvent la comparaison constante avec les "grands". Retrouver sa liberté, donc sa responsabilité, sans craindre l'ironie, voilà qui ne nuit certainement pas au plaisir. Se dire que, en mathématiques comme en bien des entreprises humaines, c'est au sein même de l'or pur que se trouve le plomb vil — quoi de plus libérateur ?

Références

[1] S. Baruk "La condition inhumaine (du mathématicien au lycéen)", *Critique*, avril 1977.

[2] C. Batut et M. Mendès France "A propos de l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$", *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* n° 322, février 1980.

[3] J. Dieudonné "Orientation générale des mathématiques pures en 1973", *Gazette des mathématiciens*, octobre 1974.

[4] R. Godement "Aux sources du modèle scientifique américain", *La Pensée*, n° 201, 203, 204 (octobre 1978, février 1979, avril 1979).