Mathématique : subir ou créer ?

par Maurice GLAYMANN, Lyon

Dans cet article qui prend partiellement appui sur le travail d'un groupe de l'IREM de Lyon(1), travail publié en 1979, sous le titre *"Pliages et calculs"*, je me propose de montrer qu'en partant d'une situation relativement simple et à l'aide de manipulations, nous sommes conduits à nous poser des questions fort sérieuses et qu'avec des élèves de 14 ou 15 ans, il est possible de commencer à *créer* en mathématique. Les décimaux et rationnels, les encadrements, la pratique de la numération en base *deux* sont les seules connaissances préalables. Au cours de cette recherche, l'élève rencontrera des notions qui le prépareront à mieux comprendre le concept de *réel* ; en particulier, il fera usage des segments emboîtés ; il fera des approximations et pratiquera des méthodes itératives.

Je décrirai l'ensemble de notre cheminement ; le maître qui voudrait utiliser cette situation avec ses élèves pourra laisser de côté certains points difficiles en limitant l'apprentissage à une première ébauche, ou, au contraire, il pourra élargir le champ d'étude et aller encore plus loin...

Avant d'aborder le sujet, posons-nous la question : *quelle expérience réelle, vécue, ont nos élèves de la mathématique ?* Converser avec eux sur ce sujet surprend : pour la grande majorité, **la mathématique est toute faite** ; elle est venue de l'extérieur ; peu d'entre eux imaginent que, depuis ce vénérable Pythagore, qui fait plutôt figure de légende, les hommes sont intervenus pour la faire avancer. Bien sûr, en les poussant un peu, ils finissent par citer les noms de Fermat ou d'Euler, plus rarement ceux de Félix Klein ou de Hilbert, mais jamais un seul nom de mathématicien de notre génération ! Il ne leur vient pas à l'esprit que la mathématique est une science qui vit : des bourgeons naissent, des rameaux grandissent et des branches meurent...

Que d'espoir n'avons-nous pas eu, il y a une dizaine d'années, lors de la mise en place de la Réforme de l'Enseignement de la mathématique ! Si nous faisons aujourd'hui un bilan, nous pouvons affirmer que seuls les *contenus* ont quelque peu évolué, mais que par contre, les *méthodes* d'enseignement n'ont guère changé. Le *dogmatisme* règne toujours presque partout en maître, et tout particulièrement dans l'enseignement supérieur. A ce niveau, nous portons une lourde responsabilité : c'est une considérable inertie que nous opposons à tout changement d'attitude face aux étudiants. Il en résulte que cet enseignement ne correspond plus aux aspirations des jeunes qui viennent plein d'espérance à l'Université. Mis à

---

(1) Ce groupe comprenait : BERARD Michel, CALEGARI Daniel, DIONISI Marie-Françoise, GAGNAIRE Pierre, GRAND Michel, MARTIN Christian, PITIOT Claude-Eve, SERRE Thérèse, THERMOZ Henri et l'auteur de cet article.

manque de temps et le poids des programmes sont source de sclérose, il n'en reste pas moins vrai que c'est trop souvent par manque d'imagination et parfois par paresse d'esprit que nous nous contentons de présenter aux étudiants une mathématique *totalement achevée et désincarnée*, ne laissant à l'initiative des apprentis que l'apprentissage scrupuleux de la belle leçon du Maître. Quelques assistants feront faire quelques exercices afin de contrôler le bon apprentissage... Ainsi tout laisse croire à l'étudiant qu'il n'y a rien à faire : il faut subir docilement. Quelle sera alors la révélation des quelques élus, de découvrir bien plus tard qu'il existe des *questions ouvertes*, et que la mathématique est *œuvre humaine* et, pourquoi ne pas l'avouer, qu'elle peut être source de *plaisir* et même de *jouissance* ?

I. Ce que l'on peut faire avec l'ombre d'un pli

Il est aisé de marquer le *milieu* d'une bande de papier à l'aide d'un pliage en *deux* : il suffit en effet d'amener une extrémité de la bande sur l'autre et de faire un pli ; on partage ainsi la bande de papier en deux morceaux de même longueur.

Voici un problème :

En effectuant uniquement une suite de pliages en deux, peut-on prendre, par exemple, le septième d'une bande de papier, avec une approximation donnée ?

Nous allons montrer que c'est possible en utilisant l'algorithme suivant. Représentons la bande de papier par le segment [AB], pris comme unité de longueur. Il nous faut déterminer le point P du segment [AB] tel que

$$AP = \frac{1}{7} AB$$

Partons d'un point initial quelconque P_0 de [AB], considéré comme première approximation du point P.

Posons $PP_0 = \varepsilon$. On a :

$$AP_0 = \frac{1}{7} + \varepsilon$$

AP_0 vaut environ $\frac{1}{7}$ de AB. P_0B vaut environ $\frac{6}{7}$ de AB.

$$P_0B = AB - AP_0 = \frac{6}{7} - \varepsilon$$

Partageons alors en deux le segment $[P_0B]$. M_1 désigne le milieu de ce segment (nous avons plié en deux la partie *droite* de la bande à partir de P_0 ; notons ce type de pliage par D), figure 1.

M_1B vaut approximativement $\frac{3}{7}$ de AB :

$$M_1B = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{7} - \varepsilon\right) = \frac{3}{7} - \frac{\varepsilon}{2}$$

et AM_1 vaut approximativement $\frac{4}{7}$ de AB :

$$AM_1 = AB - M_1B = 1 - \frac{3}{7} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{4}{7} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Partageons maintenant en *deux* le segment $[AM_1]$. M_2 désigne le milieu de ce segment (pliage de la partie gauche, noté G).

AM_2 vaut approximativement $\frac{2}{7}$ de AB :

$$AM_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{7} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{7} + \frac{\varepsilon}{4}$$

Partageons enfin en *deux* le segment $[AM_2]$. P_1 désigne le milieu de ce segment (pliage G).

AP_1 vaut approximativement $\frac{1}{7}$ de AB :

$$AP_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{1}{7} + \frac{\varepsilon}{8}$$

Au départ, nous avions le point P_0 tel que

$$AP_0 - AP = \varepsilon$$

L'algorithme, que nous désignerons par DGG, conduit au point P_1 tel que

$$AP_1 - AP = \frac{\varepsilon}{8}$$

ou encore
$$AP_1 - AP = \frac{1}{8}(AP_0 - AP)$$

Le point P_1 est une meilleure approximation du point cherché P que le point initial P_0 : *l'erreur est divisée par 8.*

On notera qu'à chaque étape, on effectue un pliage D ou un pliage G suivant que l'un des segments $[AM_i]$ ou $[M_iB]$ est une approximation d'un nombre *pair* de $\frac{1}{7}$.

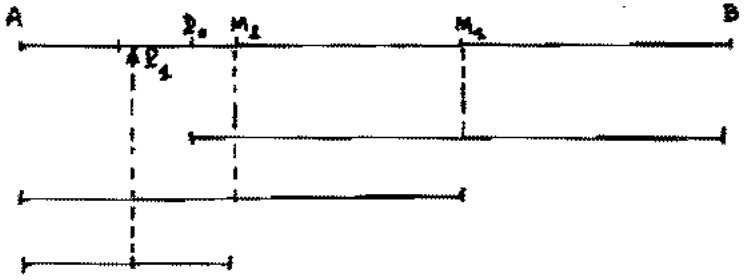

Figure 1

Appliquons de nouveau l'algorithme DGG en partant cette fois du point P_1 ; il conduit au point P_2 tel que

$$AP_2 - AP = \frac{1}{8}(AP_1 - AP) = \frac{1}{8^2}(AP_0 - AP)$$

Par itérations successives de l'algorithme DGG, nous allons obtenir une suite de points P_k avec

$$AP_k - AP = \frac{1}{8^k}(AP_0 - AP)$$

ou encore
$$AP_k = \frac{1}{7} + \frac{\varepsilon}{8^k}$$

La suite de points P_k "converge" donc vers le point P.

Ainsi, théoriquement du moins, en itérant une infinité de fois l'algorithme DGG, nous atteindrons le point cherché P. Cependant, du point de vue pratique, nous serons très vite limités par les pliages eux-mêmes.

Il est alors facile de résoudre le problème suivant :

Prendre le quatorzième d'une bande de papier, avec une approximation donnée.

Comme
$$\frac{1}{14} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$$

On commence par prendre la moitié de la bande par un pliage en deux, puis on applique un certain nombre de fois l'algorithme DGG.

On traite de la même façon le partage de la bande en $\frac{1}{2^p \times 7}$, où p est un naturel.

La méthode s'applique pour les points d'abscisse $p/(2n+1)$ où p et $2n+1$ sont deux naturels *étrangers.*

Une étude analogue à celle que nous venons de faire pour $\frac{1}{7}$ et qui a conduit à l'algorithme DGG montre que pour $\frac{1}{5}$, il faut utiliser l'algorithme DDGG et pour $\frac{2}{5}$, l'algorithme DDG.

Pour $\frac{1}{5}$, l'algorithme DDGG divise, à chaque étape, l'erreur par 16.

A titre d'exercice, on montrera que l'algorithme DG conduit à $\frac{1}{3}$ et qu'à chaque étape, l'erreur est divisée par 4 ; que l'algorithme DDG conduit à $\frac{3}{7}$ et qu'à chaque étape, l'erreur est divisée par 8 ; et on cherchera les algorithmes qui donnent respectivement $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{11}$ et le coefficient qui divise l'erreur à chaque étape.

II. Une autre piste

Voici un nouveau problème :
Déterminer, sur la droite de repère (A, B), *le point P d'abscisse rationnelle u, à l'aide d'une suite de pliages.*

Limitons-nous dans ce paragraphe aux décimaux, dont le développement est fini :

$$u = \alpha, a_1 a_2 \dots a_n = \alpha + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

où α est la *partie entière* de u, notée $[u]$, et où, quel que soit i, a_i est un naturel compris entre 0 et 9.

Remarquons d'abord que si nous savons marquer sur $[0, 1]$ le point p d'abscisse $u - [u]$, alors, par la translation $[u]$, nous obtenons le point P. Ainsi, il suffit de savoir placer sur (A, B) un point d'abscisse rationnelle comprise entre 0 et 1.

Nous allons utiliser la propriété élémentaire des décimaux suivante :

Le décimal $\quad v = \frac{a_p}{10^p} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$

vérifie $\quad \frac{a_p}{10^p} \leqslant v < \frac{1 + a_p}{10^p}$

Exemple : $\quad v = 0{,}073\,21$

$\quad 0{,}07 \leqslant v < 0{,}08$

En particulier, pour $u = 0, a_1 a_2 \dots a_n$,

$$\frac{a_1}{10} \leqslant u < \frac{1 + a_1}{10}$$

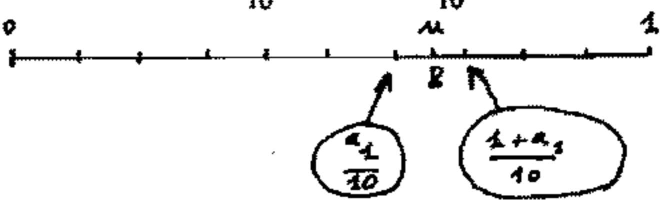

Figure 2

... Cette double inégalité permet donc d'encadrer P par les deux points

Une fois cette première localisation du point P faite, en remarquant que

$$u = \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{a_2}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^{n-1}}\right)$$

il suffit de repérer sur le dixième obtenu le point d'abscisse

$$u_1 = \frac{a_2}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^{n-1}}$$

Comme

$$\frac{a_2}{10} \leqslant u_1 < \frac{1 + a_2}{10}$$

il faut donc plier à nouveau en dix et garder l'un des dixièmes, puis marquer sur le dixième obtenu le point d'abscisse

$$u_2 = \frac{a_3}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^{n-2}}$$

Au bout de n opérations, il ne nous restera plus qu'à placer le point d'abscisse

$$u_{n-1} = \frac{a_n}{10}$$

ce qui revient à effectuer un dernier pliage en dix et à obtenir cette fois le point cherché.

Critiques de la méthode

1. D'un point de vue pratique, on ne sait pas plier en *dix*. De plus, même si on savait le faire, les segments manipulés deviendraient vite très petits, donc pratiquement inutilisables.

2. Chaque a_i peut prendre dix valeurs et on est amené à chaque étape à choisir entre dix intervalles.

Il se peut que l'utilisation d'une autre base soit plus commode : comme ce que nous savons bien faire, c'est plier en *deux*, la base *deux* s'impose.

III. Utilisation de la base deux

$$u = 0, a_1\, a_2 \dots a_n \dots$$

est l'écriture en base *deux* d'un *rationnel*, si, quel que soit i, a_i vaut 0 ou 1 ; cette écriture est *finie*, ou *infinie* et *périodique*.

Rappelons un procédé[1] simple pour écrire en base *deux* le rationnel $\frac{p}{q}$ (p et q sont deux naturels étrangers), sans avoir à convertir en base *deux* les naturels p et q, puis à effectuer la division :

Effectuons le produit par 2 de $\frac{p}{q}$:

$$\text{si } \frac{2p}{q} < 1 \text{ , alors } \frac{p}{q} < \frac{1}{2} \text{ et } a_1 = 0$$

$$\text{si } \frac{2p}{q} \geqslant 1 \text{ , alors } \frac{p}{q} \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } a_1 = 1$$

Pour obtenir a_2, on recommence en remplaçant

$$\frac{p}{q} \quad \begin{cases} \text{par } \dfrac{2p}{q} & \text{si } a_1 = 0 \\ \text{par } \dfrac{2p}{q} - 1 & \text{si } a_1 = 1 \end{cases}$$

Si, à une étape, on a $\frac{2p}{q} = 1$, le calcul est achevé et le développement est *fini*.

Si, à une étape, on trouve une fraction déjà rencontrée, le calcul est achevé, mais le développement est *infini périodique*.

Voici deux exemples :

1) $\frac{11}{16}$

$$\frac{11}{16} \xrightarrow{\times 2} \frac{22}{16} = 1 + \frac{6}{16} \qquad a_1 = 1$$

$$\frac{6}{16} \xrightarrow{\times 2} \frac{12}{16} < 1 \qquad a_2 = 0$$

$$\frac{12}{16} \xrightarrow{\times 2} \frac{24}{16} = 1 + \frac{8}{16} \qquad a_3 = 1$$

$$\frac{8}{16} \xrightarrow{\times 2} \frac{16}{16} = 1 \qquad a_4 = 1$$

$\frac{11}{16}$ s'écrit en base *deux* 0,1011 .

(1) Le lecteur pourra montrer que ce procédé fonctionne dans toutes les bases.

2) $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{7} < 1 \qquad\qquad a_1 = 0$$

$$\frac{2}{7} \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{7} < 1 \qquad\qquad a_2 = 0$$

$$\frac{4}{7} \xrightarrow{\times 2} \frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} \qquad\qquad a_3 = 1$$

$\frac{1}{7}$ est déjà trouvé. Le calcul est achevé.

L'écriture en base *deux* de $\frac{1}{7}$ est périodique, de période 001.

On écrit : $\frac{1}{7} = 0,\overline{001}$

Observons que si le rationnel u admet une écriture finie en base n, il n'en est pas nécessairement de même en base m. Ainsi par exemple,

en base *dix*, $\frac{1}{5} = 0,2$

en base *deux*, $\frac{1}{5} = 0,\overline{0011}$

Reprenons alors le problème du début du paragraphe II :
déterminer, sur la droite de repère (A, B), *le point P d'abscisse rationnelle* u *écrit en base deux, à l'aide d'une suite de pliages.*

Ici encore, nous nous limiterons au cas où $0 \leq u \leq 1$.

a) ***Cas d'un développement fini***

En base *deux*

$$u = 0,a_1\,a_2 \ldots a_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}$$

D'après la double inégalité (que l'on établit comme dans le cas de la base *dix*)

$$\frac{a_1}{2} \leq u < \frac{1 + a_1}{2}$$

nous en déduisons que

si $a_1 = 0$, alors $0 \leq u < \frac{1}{2}$

si $a_1 = 1$, alors $\frac{1}{2} \leq u < 1$

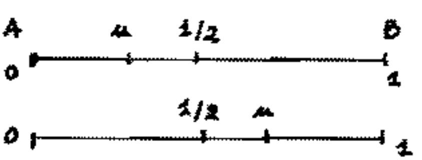

Figure 3

Ici, on plie en deux la bande [AB] et l'on choisit suivant la valeur de a_1 l'une des deux parties :

si $a_1 = 0$, on garde la moitié *gauche*,
si $a_1 = 1$, on garde la moitié *droite*.

Comme dans le cas de la base *dix*, on recommence avec a_2. Au bout de i pliages en deux, on a gardé une partie notée $[A_iB_i]$.

si $a_{i+1} = 0$, on plie le segment $[A_iB_i]$ en deux et on garde la moitié *gauche* ;
si $a_{i+1} = 1$, on plie le segment $[A_iB_i]$ en deux et on garde la moitié *droite*.

Voici un exemple : plaçons le point d'abscisse $\frac{11}{16}$.

Nous avons vu qu'en base *deux* $\frac{11}{16} = 0{,}1011$

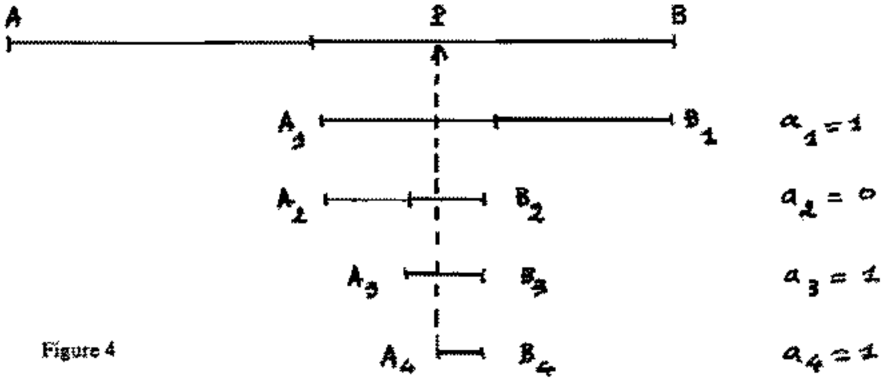

Figure 4

Le point d'abscisse $\frac{11}{16}$ correspond à *l'extrémité gauche* du dernier segment $[A_4B_4]$. Pourquoi ?

b) *Cas d'un développement infini (périodique)*(1)

Lorsqu'un rationnel admet un développement *infini*, deux cas sont possibles :
— le développement commence dès le départ par une *période* ;
— ou le développement a d'abord une partie *irrégulière*, puis commence une *période*.

Ainsi en base *deux*

$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{001}$$

n'a pas de partie irrégulière, le développement commence avec la période 001 ;

(1) Voir *"Pour une approche heuristique de l'enseignement de l'analyse"* (Annexe 2) de Claire WASSERER et Daniel REISZ, IREM de Dijon.

$$\frac{7}{12} = 0{,}10\overline{01}$$

admet 10 pour partie irrégulière, puis suit la période 01 .

On procède de la même façon que dans le cas d'un développement fini : on commence par l'éventuelle partie irrégulière, puis par une période, deux, trois ... jusqu'à l'impossibilité matérielle de faire des plis. Pourquoi le procédé ainsi décrit conduit-il au point cherché ?

Le rationnel s'écrit en base *deux*

$$u = 0, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$$

Pour tout naturel p , posons

$$u_p = 0, a_1\, a_2 \ldots a_p$$

Montrons que le point P_p d'abscisse u_p converge vers le point P d'abscisse u . Pour cela, il suffit de montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est u .

Notons que u_p est l'abscisse du pième point marqué P_p .

Nous avons

$$u - u_p = 0{,}00\ldots 0a_{p+1}\ldots a_n\ldots$$
$$\leqslant 0{,}00\ldots 01\ldots 1\ldots$$

où nous remplaçons tous les $a_i\ (i \geqslant p+1)$ par 1.

Il en résulte

$$u - u_p \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots\right) = \frac{1}{2^p}$$

Ainsi, quel que soit p ,

$$u - u_p \leqslant \frac{1}{2^p}$$

ce qui prouve que la suite (u_p) converge et a pour limite u et en conséquence la suite de points (P_p) converge vers le point P d'abscisse u.

Notons, au passage, qu'à la *p*ième opération, *l'erreur commise est inférieure à* $\frac{1}{2^p}$. Ainsi, selon l'approximation que l'on se fixe, on déduit le nombre de chiffres après la virgule à garder et donc le nombre d'opérations à effectuer.

Exemples

1.— Reprenons le cas $\frac{1}{7}$ qui s'écrit en base *deux* : $0{,}\overline{001}$.

Ici, il n'y a pas de partie irrégulière ; la période est 001.

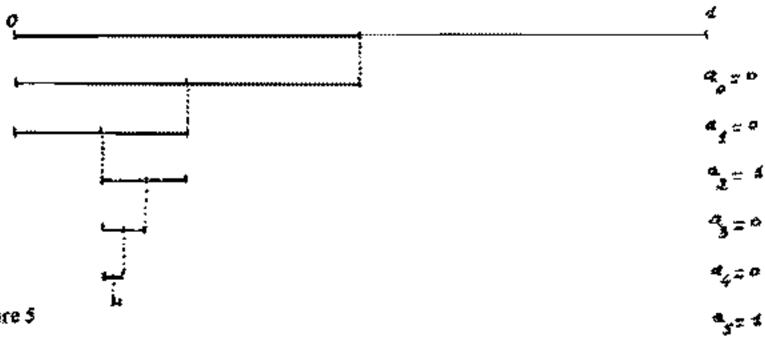

Figure 5

Le procédé converge *rapidement*.

2.— Pour $\frac{7}{12}$, qui s'écrit en base *deux* 0,1001 , commençons avec la partie irrégulière, puis deux périodes :

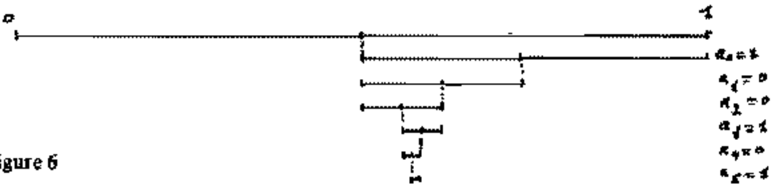

Figure 6

Ce procédé introduit tout naturellement l'idée de *segments emboîtés* et prépare le concept de *réel*. Cependant, le lecteur aura constaté que le procédé de pliage utilisé dans ce paragraphe diffère de celui que nous avons introduit au paragraphe 1, où nous amenions une extrémité de la bande sur un pli déjà marqué, alors qu'ici, il faut amener deux plis marqués l'un sur l'autre pour définir un nouveau pli.

Nous allons, dans le paragraphe suivant, en utilisant une idée de T.J. FLETCHER, revenir au premier type de pliage, en lisant à l'envers, de droite à gauche, l'écriture en base *deux* d'un rationnel

$$u = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

IV. Où il est montré que l'envers vaut bien l'endroit

Commençons par un exemple :

$$u = 0{,}1011 \qquad \text{(base } deux\text{)}$$

Considérons la suite des rationnels

$$u_1 = 0{,}1 \qquad \text{ou, en base } dix, \qquad u_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$u_2 = 0{,}11$ ou, en base *dix*, $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$u_3 = 0{,}011$ ou, en base *dix*, $u_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

et $u_4 = 0{,}1011$ ou, en base *dix*, $u_4 = \frac{11}{16}$

Cette suite est obtenue en prenant successivement en compte les chiffres du développement binaire de u en lisant *de la droite vers la gauche* ; ainsi, pour passer de u_i à u_{i+1}, nous rajoutons, à la droite de la virgule, le premier chiffre le plus à droite qui n'a pas encore été pris.

Pour placer sur la bande le point P_1 d'abscisse $u_1 = 0{,}1$, il faut plier la bande en deux ; le pli p_1 correspond au point P_1 (figure 7).

Pour placer alors le point P_2, d'abscisse $u_2 = 0{,}11$, il faut amener l'extrémité droite sur le pli p_1 ; le nouveau pli p_2 correspond au point P_2 ; en effet :

$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + u_1)$$

P_2 est le milieu de $[P_1B]$.

Pour placer maintenant le point P_3 d'abscisse $u_3 = 0{,}011$, il faut amener l'extrémité gauche sur le pli p_2 ; le nouveau pli p_3 correspond au point P_3 ; en effet :

$$u_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}u_2$$

P_3 est le milieu de $[AP_2]$.

Pour placer enfin le point P_4 d'abscisse $u_4 = 0{,}1011$, il faut amener l'extrémité droite sur le pli p_3 ; le nouveau pli p_4 correspond au point P_4 ; en effet :

$$u_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}(1 + u_3)$$

P_4 est le milieu de $[P_3B]$.

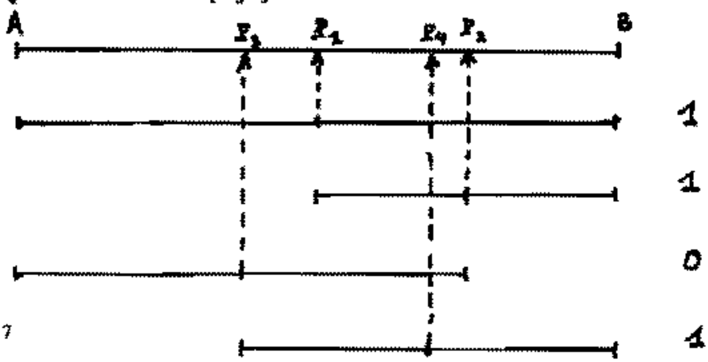

Figure 7

Passons au cas où u possède p chiffres après la virgule, dans son écriture en base *deux* :

$$u = 0,a_1 a_2 \dots a_p$$

avec $a_p = 1$, si non $a_p = 0$ et u aurait $p-1$ chiffres après la virgule.

Considérons, comme dans l'exemple, la suite des p rationnels

$$u_1 = 0,a_p$$
$$u_2 = 0,a_{p-1}a_p$$
....
$$u_{p-1} = 0,a_2 a_3 \dots a_{p-1} a_p$$
$$u_p = 0,a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p$$

Nous savons placer le point P_1 d'abscisse $u_1 = 0,a_p = 0,1$: on plie la bande en deux (pli p_1).

Supposons que nous ayons le pli p_i correspondant au point P_i d'abscisse

$$u_i = 0,a_{p+1-i} \dots a_p$$

Pour placer alors le point P_{i+1} d'abscisse

$$u_{i+1} = 0,a_{p-i}a_{p+1-i} \dots a_p$$

si $a_{p-i} = 1$, on amène l'extrémité *droite* de la bande sur le pli p_i et on obtient le pli p_{i+1} ;

si $a_{p-i} = 0$, on amène l'extrémité *gauche* de la bande sur le pli p_i et on obtient le pli p_{i+1}.

Justifions ce procédé : la preuve se fait par récurrence sur le nombre de chiffres de u.

Si u a un chiffre, le seul cas intéressant est

$$u = 0,1$$

Nous savons placer le point P d'abscisse u.

Supposons que le procédé s'applique à tout rationnel dont le développement en base *deux* comporte n chiffres. Considérons alors le rationnel qui s'écrit en base *deux*

$$0,b_{n+1}b_n b_{n-1} \dots b_1$$

Nous savons, par hypothèse de récurrence, placer le point P_n d'abscisse u_n qui s'écrit en base *deux*

$$0,b_n b_{n-1} \dots b_1$$

Si $b_{n+1} = 1$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$

Il en résulte que Q_{n+1} est le milieu de $[BQ_n]$, et on obtient le pli p_{n+1} en amenant l'extrémité *droite* de la bande sur le pli p_n.

Si $b_{n+1} = 0$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$

Il en résulte que Q_{n+1} est le milieu de $[AQ_n]$, et on obtient le pli p_{n+1} en amenant l'extrémité *gauche* de la bande sur le pli p_n.

Ainsi, le procédé s'applique à tout rationnel dont l'écriture en base *deux* comporte $(n+1)$ chiffres ; il s'applique donc dans tous les cas.

Reprenons l'exemple de $u = \frac{1}{7}$ (base *dix*), qui s'écrit en base *deux*

$$u = 0,\overline{001}$$

u a un développement périodique. Commençons par une période (lue *de droite à gauche*), puis, si la précision n'est pas suffisante, on recommence avec deux périodes, etc.

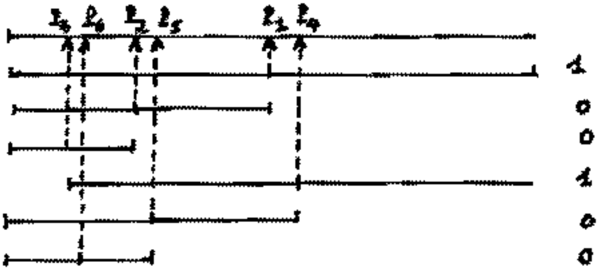

Figure 8

Avec une période, on a le point P_3 d'abscisse 0,001, soit en base *dix*

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

alors que $\frac{1}{7} = 0,142\ 857\ 1$

Avec deux périodes, on a le point P_6 d'abscisse 0,001 001, soit en base *dix*

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{64} = 0,140\ 625$$

Avec trois périodes, on a l'approximation 0,142 578 1 ...
Le processus converge rapidement.

Pour $u = \frac{7}{12}$ (base *dix*) qui s'écrit en base *deux*

$$u = 0,10\overline{01}$$

on commence avec *une* période (lue de droite à gauche), puis on prend en compte la partie irrégulière ; si la précision n'est pas suffisante, on recommence(1) sur deux périodes et la partie irrégulière, etc.

(1) Dans le cas où il y a une partie irrégulière, si la précision n'est pas suffisante lorsque l'on a fait les calculs avec n périodes et la partie irrégulière, il faut revenir en arrière, puis repartir avec une nouvelle période.

Voici ce que l'on obtient avec une période et la partie irrégulière :

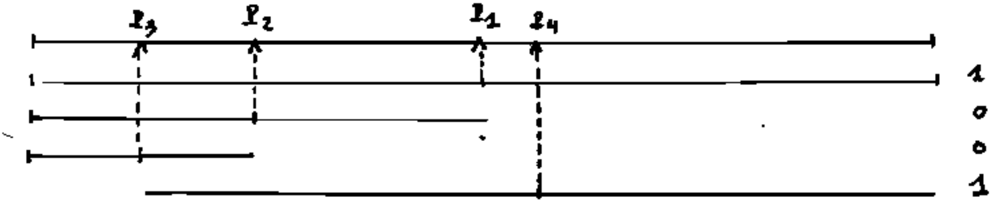

Figure 9

Quelques remarques

1) Ce procédé est celui du paragraphe I si on y choisit $P_0 = A$.

2) La convergence est rapide

Si $u = 0, a_1\, a_2 \dots a_p \dots$

et $u_q = 0, a_1\, a_2 \dots a_q$

nous avons vu au paragraphe III que

$$u - u_q \leqslant \frac{1}{2^q}$$

Si nous appliquons le procédé à n périodes de longueur h et à la partie irrégulière de longueur k, nous avons

$$u - u_{nh+k} \leqslant \frac{1}{2^{nh+k}}$$

Ce résultat permet de déterminer à l'avance le nombre de périodes à prendre, lorsqu'on s'est fixé une précision.

3) Le lien avec le codage DGG et le développement en base *deux* de $\frac{1}{7}$ est évident.

V. Un peu d'arithmétique pour terminer

Au cours de notre recherche, nous avons été conduits à écrire le développement en base *deux* du rationnel $\frac{p}{q}$ (p et q sont étrangers).

Voici deux problèmes :

a) Dans quels cas le développement est-il *fini* ?

b) Dans le cas d'un développement *infini*, quelle est la *longueur* de la période et celle de l'éventuelle partie irrégulière ?

Le lecteur démontrera que :

a) Le développement est fini si et seulement si q est une *puissance* de 2.

b) Dans le cas d'un développement infini

$$q = 2^k \cdot Q$$

La longueur de la partie irrégulière est k.

Si $k = 0$, donc si q et 2 sont étrangers, il n'y a pas de partie irrégulière. La longueur de la période est h, où h est le plus petit naturel tel que

$$2^h \equiv 1 \pmod{Q}$$

Voici quelques exemples :

1) $\dfrac{11}{16} = 0{,}1011$ $\qquad (q = 16 = 2^4)$

2) $\dfrac{1}{7} = 0{,}\overline{001}$ $\qquad (q = 7,\ k = 0)$

Le plus petit naturel h tel que

$$2^h \equiv 1 \pmod{7} \qquad \text{est } 3.$$

3) $\dfrac{7}{12} = 0{,}10\overline{01}$ $\qquad (q = 12 = 2^2 \times 3)$

$k = 2 \quad ; \quad h = 2$

Voici un autre problème, suggéré par Daniel REISZ : sachant que le rationnel u admet un développement fini en base a, pour quelles autres bases en est-il de même ?

La Creusette, 14 septembre 1979