2

DANS NOS CLASSES

Randonnées parmi les nombres

par Maurice GLAYMANN, Lyon

Si tu penses que ton vin est bon,
Bois-le avec tes amis.
Mais, si tu crois qu'il est mauvais,
Ne le donne pas aux autres.

Vieux proverbe Mongol

0. Introït

Cet article a été écrit pour mon propre plaisir. Peut-être a-t-il fait ou fera-t-il l'objet d'un exposé à l'étranger ?

Je pense, sans en être certain, que son contenu peut plaire à de jeunes élèves qui ont envie de *rencontrer la vraie* mathématique:* je montre qu'avec très peu de "choses", ils peuvent faire d'agréables découvertes le long de sentiers peu fréquentés ...

Je n'ai pas l'espoir que ces idées soient, un jour ou l'autre, reprises par *des* auteurs de programmes (ils manquent bien souvent d'imagination !) ou par *des* auteurs de manuels (ils sont bien trop conformes à l'esprit des lois !); cependant, s'il en allait autrement (est-il encore permis de rêver ?), je ne réclamerais de droits d'auteur, ni aux premiers et encore moins aux seconds.

Et si quelques lecteurs trouvent du plaisir à la lecture de ce texte, alors donnons-nous la main et faisons ensemble un petit bout de chemin ...

---

* Cela me rappelle l'inspecteur général qui en 1969 (dix ans déjà) demandait à la Commission Lichnérowicz que l'on parle dans les programmes de quatrième de la *vraie droite ! ...*

1. Une vieille idée .... qui n'a pas encore fait son chemin

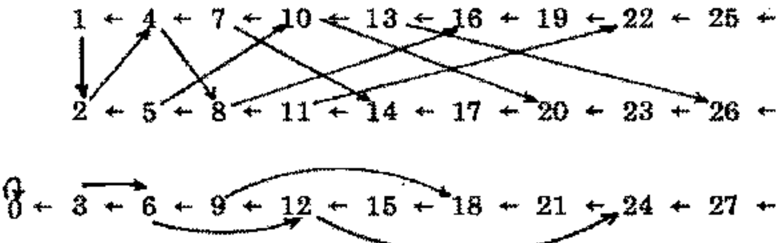
Les enfants aiment beaucoup pratiquer le *golf mathématique*. P.C. Rosenbloom et moi-même avons décrit ce sport dans le livre "La logique à l'Ecole"* et nous avons montré ce que l'on pouvait tirer de ce jeu; en particulier, il est utile pour aborder le raisonnement logique.

Nous avons, en outre, présenté l'exemple suivant (page 67):

> *En partant du naturel 5 et en utilisant les applications* :
>
> $$f : x \longmapsto 2x$$
> $$g : x \longmapsto x - 3$$
>
> *quels sont tous les naturels que l'on peut atteindre ? Comment atteindre un naturel donné en un minimum de coups ?*

On peut aborder ce jeu de la manière suivante: On prend un graphe dont les sommets sont numérotés par les naturels; on relie par une flèche le sommet a au sommet b, si on peut passer du naturel a au naturel b par l'une ou l'autre des applications f ou g.

Voici une partie de ce graphe:



A l'aide de ce graphe, essayez de résoudre les problèmes suivants:

a) aller de 5 à 11
b) aller de 5 à 22
c) aller de 5 à 21

---

* Le lecteur n'a nullement besoin de connaître ce livre, publié en 1972 par CEDIC, pour lire cet article ...

2. De l'observation à la preuve

A ce stade, il est intéressant de demander aux enfants d'observer le graphe. Cette observation va les conduire d'emblée à un certain nombre de résultats remarquables.

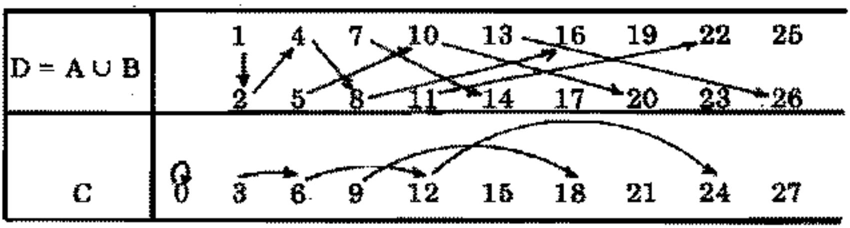
a) Rôle des applications f et g

L'application g crée sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels une partition en trois classes A, B et C :

A	1 ← 4 ← 7 ← 10 ← 13 ← 16 ← 19 ← 22 ← 25 ←
B	2 ← 5 ← 8 ← 11 ← 14 ← 17 ← 20 ← 23 ← 26 ←
C	0 ← 3 ← 6 ← 9 ← 12 ← 15 ← 18 ← 21 ← 24 ← 27 ←

où C est l'ensemble des *multiples* de 3
A est l'ensemble des *multiples* de 3 *plus* 1
B est l'ensemble des *multiples* de 3 *plus* 2.

De même, l'application f induit sur $\mathbb{N}$ une *partition* en *deux* classes D et C avec $D = A \cup B$.



L'ensemble des deux applications f et g induit sur $\mathbb{N}$ une *partition* en *deux* classes: l'ensemble C des multiples de 3 et l'ensemble D des non-multiples de 3.

b) Quelques théorèmes

1) Par f ou par g, tout élément de C se transforme en un élément de C.

En effet, si x est élément de C, il est multiple de 3 et s'écrit 3k
alors $2x$ est aussi élément de C, car $2x = 3(2k)$
et $x - 3$ est un autre élément de C, car $x - 3 = 3(k - 1)$.

Ainsi,

$$\forall x, \quad x \in C \quad \text{implique} \quad f(x) \in C$$
$$\forall x, \quad x \in C \quad \text{implique} \quad g(x) \in C.$$

2) *Par f ou par g, tout élément de D se transforme en un élément de D et plus précisément, par f tout élément de A se transforme en un élément de B et réciproquement.*

En effet, si x est élément de A, il est de la forme $3k + 1$

alors $\quad f(x) = 2(3k + 1) = 3(2k) + 2$

et $\quad g(x) = 3k + 1 - 3 = 3(k - 1) + 1$

Ainsi,

$$\forall x, \quad x \in A \quad \text{implique} \quad f(x) \in B \quad \text{et} \quad g(x) \in A$$

De même, si x est élément de B, il est de la forme $3k + 2$

alors $\quad f(x) = 2(3k + 2) = 3(2k + 1) + 1$

$\quad g(x) = 3k + 2 - 3 = 3(k - 1) + 2$

Ainsi,

$$\forall x, \quad x \in B \quad \text{implique} \quad f(x) \in A$$
$$\text{et} \quad \forall x, \quad x \in B \quad \text{implique} \quad g(x) \in B.$$

Plus globalement,

$$\forall x, \quad x \in D \quad \text{implique} \quad f(x) \in D$$
$$\text{et} \quad \forall x, \quad x \in D \quad \text{implique} \quad g(x) \in D.$$

3) *Conséquence immédiate*

Il est impossible de passer d'un élément de C à un élément de D et réciproquement.

Ainsi le problème: "aller de 5 à 21" n'a pas de solution; en effet, 5 n'est pas un multiple de 3 alors que 21 en est un.

Par contre, on peut aller de 5 à 11; voici un chemin:

$$5 \xrightarrow{f} 10 \xrightarrow{f} 20 \xrightarrow{g} 17 \xrightarrow{g} 14 \xrightarrow{g} 11$$

Voici un autre chemin plus court:

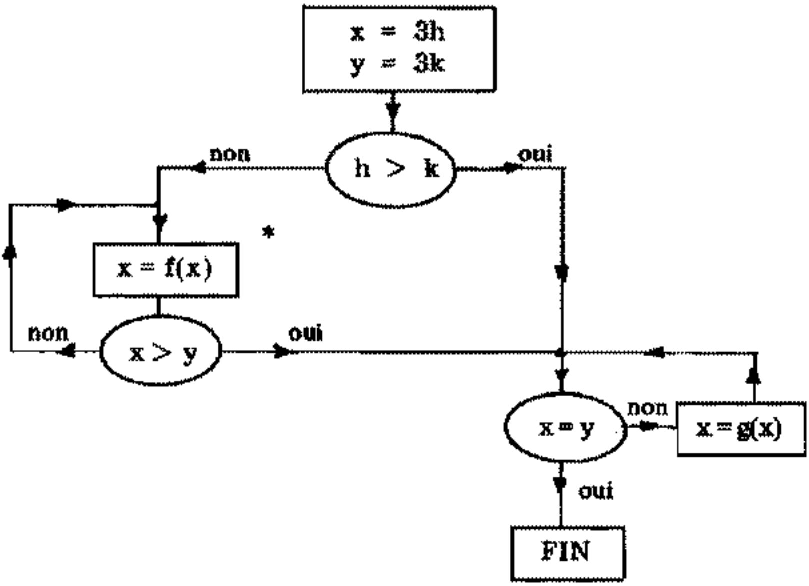
$$5 \xrightarrow{f} 10 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 14 \xrightarrow{g} 11$$

3. Une première généralisation

Cette première étape conduit tout naturellement à essayer de montrer que

> *si x et y sont deux multiples de 3, alors il existe au moins un chemin allant de x à y.*

Voici un organigramme qui conduit dans *tous les cas* à une solution:



Prenons deux exemples:

1) Aller de 9 à 21.

---

* Rappelons qu'en informatique l'écriture $x = f(x)$ signifie que l'on remplace x par $f(x)$.

L'organigramme conduit au chemin suivant :

$$9 \xrightarrow{f} 18 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{g} 33 \xrightarrow{g} 30 \xrightarrow{g} 27 \xrightarrow{g} 24 \xrightarrow{g} 21$$

Ce n'est pas le chemin le plus court.

Le chemin

$$9 \xrightarrow{f} 18 \xrightarrow{g} 15 \xrightarrow{f} 30 \xrightarrow{g} 27 \xrightarrow{g} 24 \xrightarrow{g} 21$$

est plus court.

Essayez de prouver que le plus court est

$$9 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 12 \xrightarrow{f} 24 \xrightarrow{g} 21$$

2) Aller de 21 à 9 .

Cette fois l'organigramme conduit au chemin

$$21 \xrightarrow{g} 18 \xrightarrow{g} 15 \xrightarrow{g} 12 \xrightarrow{g} 9$$

Il est facile d'expliquer pourquoi cet organigramme fournit toujours une solution:

a) dans le cas où $h > k$, $x - y = 3(h - k)$ et en itérant g $(h - k)$ fois, on passe de x à y;

b) dans le cas où $h < k$, il existe au moins un naturel n tel que

$$2^n h > k$$

en itérant f, n fois, on obtient $x > y$ et on est ramené au cas précédent.

Montrons maintenant que

si x et y ne sont ni l'un ni l'autre multiple de 3, alors il existe au moins un chemin allant de x à y.

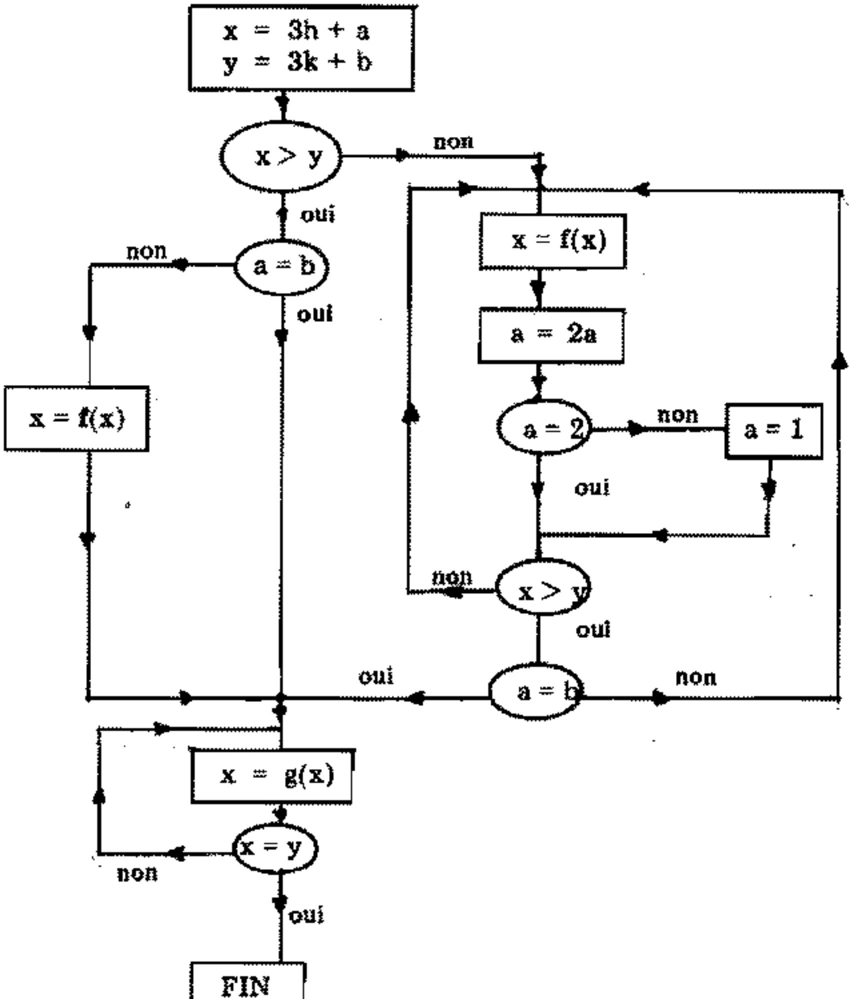
Si x et y ne sont pas des multiples de 3, ils sont de la forme

$$x = 3h + a$$

$$\text{et} \quad y = 3k + b$$

où a et b sont éléments de l'ensemble $\{1, 2\}$.

Voici un organigramme qui fournit dans *tous les cas* une solution:



Cet organigramme exige au moins une explication.

Nous avons montré au paragraphe 2.b que

si x est multiple de 3 plus 1, donc élément de A, alors
f(x) est multiple de 3 plus 2, donc élément de B;

si x est multiple de 3 plus 2, donc élément de B, alors
$f(x)$ est multiple de 3 plus 1, donc élément de A.

En prenant alors

$$x = 3h + a \quad \text{avec} \quad a \in \{1, 2\}$$

pour $a = 1$, $x \in A$
et $2a = 2$, donc $f(x) = 3(2h) + 2$ et $f(x) \in B$

pour $a = 2$, $x \in B$
et $2a = 4 = 3 + 1$ et $f(x) = 3(2h + 1) + 1$
et $f(x) \in A$

D'où, dans la branche de droite de l'organigramme, après l'instruction $a = 2a$, pour le test

"*est-ce que* $a = 2$?"

si la réponse est oui, on continue;
si non, c'est que $2a$ vaut 4, auquel cas, il faut prendre $a = 1$, et on continue.

Voici quatre exemples:

1) Aller de 23 à 8.

Nous sommes dans le cas $x > y$ avec $a = b = 2$. L'organigramme fournit le chemin suivant:

$$23 \xrightarrow{g} 20 \xrightarrow{g} 17 \xrightarrow{g} 14 \xrightarrow{g} 11 \xrightarrow{g} 8$$

2) Aller de 23 à 7.

Nous sommes encore dans le cas $x > y$, mais cette fois $a = 2$ et $b = 1$.

L'organigramme conduit au chemin:

$$23 \xrightarrow{f} 46 \xrightarrow{g} 43 \xrightarrow{g} 40 \xrightarrow{g} 37 \xrightarrow{g} 34 \xrightarrow{g} 31 \xrightarrow{g} 28 \xrightarrow{g} 25$$

$$7 \xleftarrow{g} 10 \xleftarrow{g} 13 \xleftarrow{g} 16 \xleftarrow{g} 19 \xleftarrow{g} 22 \xleftarrow{g} 25$$

Ce n'est pas le chemin le plus court. En effet, le chemin

$$23 \xrightarrow{g} 20 \xrightarrow{g} 17 \xrightarrow{g} 14 \xrightarrow{g} 11 \xrightarrow{g} 8 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 10 \xrightarrow{g} 7$$

est nettement plus court.

3) Aller de 10 à 23.
Ici $x < y$ avec $a = 1$ et $b = 2$.
L'organigramme donne le chemin suivant:

$$10 \xrightarrow{f} 20 \xrightarrow{f} 40 \xrightarrow{f} 80 \xrightarrow{g} 77 \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} 26 \xrightarrow{g} 23$$

Voici un chemin plus court:

$$10 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{g} 13 \xrightarrow{f} 26 \xrightarrow{g} 23$$

4) Aller de 10 à 13.
Ici $x < y$ avec $a = b = 1$.
L'organigramme donne dans ce cas le chemin:

$$10 \xrightarrow{f} 20 \xrightarrow{f} 40 \xrightarrow{g} 37 \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} 16 \xrightarrow{g} 13$$

Il est facile de trouver un chemin bien plus court. Par exemple:

$$10 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{g} 13$$

Le lecteur voudra sans doute améliorer ces organigrammes et trouver ceux qui conduisent d'emblée aux plus courts chemins. C'est là une piste de recherche intéressante, mais qui ne semble pas, a priori, bien aisée ...

4. Une autre direction

Il nous faut élargir le problème pour aller plus loin: il faut pour cela faire varier les *paramètres* (ou plutôt les *constantes !...).*

Voici comment nous pouvons alors poser le problème:

En partant du naturel n et en utilisant les deux applications :

$$f : x \longmapsto kx$$
$$g : x \longmapsto x - p$$

où k et p sont deux naturels, déterminez tous les naturels que l'on peut ainsi atteindre. Comment atteindre un naturel donné en un minimum de coups ?

Nous disposons de trois paramètres n, k et p. Au paragraphe 1, ces paramètres valaient respectivement 5, 2 et 3.

Sous cette forme générale, le problème est difficile pour de jeunes élèves. Nous pouvons leur simplifier la tâche en leur proposant le cas particulier $p = 7$:

$$f : x \longmapsto kx$$
$$g : x \longmapsto x - 7$$

L'application g induit sur l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ une partition: les classes modulo 7, respectivement notées $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$, $\dot{5}$ et $\dot{6}$. E désigne l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Fixons-nous encore $n = 29$.
Le problème ne dépend plus que du paramètre k.
Est-il possible d'aller du naturel 29 au naturel 37 ?

29 appartient à la classe 1, car $29 \equiv 1 \pmod 7$;
37 appartient à la classe 2, car $37 \equiv 2 \pmod 7$.

La première question est de savoir si, par multiplication par k, il est possible ou non de passer de la classe 1 à la classe 2.

Multiplions chaque élément de E par k, puis prenons, pour chaque produit, les reste de la division par 7:

$$\begin{array}{lccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\times k & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 0 & k & 2k & 3k & 4k & 5k & 6k \\
\text{modulo } 7 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6
\end{array}$$

les a_i sont des éléments de E avec $ki \equiv a_i \pmod 7$.

La réponse à la question est *oui*, s'il existe un naturel m tel que*

$$f^m(1) = 2$$

En d'autres termes:

$$\begin{aligned}
f(1) &= a_1 \\
f(a_1) &= b_1 \\
f(b_2) &= b_2 \\
&\dots\dots \\
f(b_i) &= b_{i+1} \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

* Avec $f^m(1) = f(f^{m-1}(1))$.

les b_i sont des éléments de E avec $b_{i+1} \equiv k\, b_i \pmod{7}$.

S'il existe un b_i tel que $b_i = 2$, alors nous pouvons passer de la classe 1 à la classe 2.

Mais est-ce que cela implique pour autant que l'on peut passer de 29 à 37 ?

C'est la seconde question à laquelle il nous faut répondre.

Voici un exemple: $k = 4$

	0	1	2	3	4	5	6
$\times 4$	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	0	4	8	12	16	20	24
modulo 7	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	0	4	1	5	2	6	3

Ici $f^2(1) = 2$

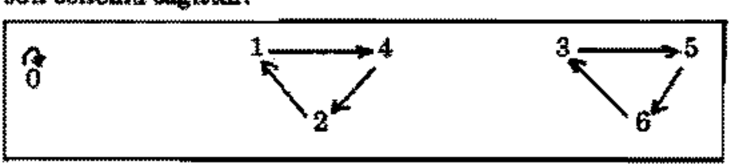
car $f(1) = 4$ et $f(4) \equiv 2 \pmod{7}$.

Ainsi, nous pouvons aller de la classe 1 à la classe 2, en passant par la classe 4.

D'autre part, $f^3(1) = 1$

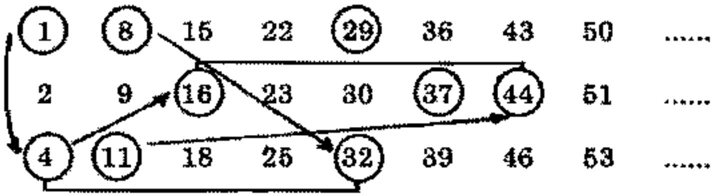
En partant de la classe 1, nous pouvons revenir dans cette classe. La multiplication par 4, modulo 7, est une bijection de E.

Voici son schéma sagittal:



Donnons alors une réponse à notre seconde question: existe-t-il un chemin allant de 29 à 37 ?

Il suffit de prendre les classes 1 , 2 et 4 :



37 est compris entre 16 et 44, respectivement produits de 4 et 11 par 4.

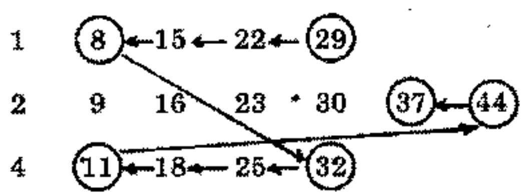
Pour atteindre 37, il faut d'abord atteindre 11.
11 est compris entre 4 et 32, respectivement produits de 1 et 8 par 4.

Pour atteindre 11, il faut d'abord atteindre 8 .
Or de 29, nous pouvons atteindre 8.

Voici le chemin trouvé:

$$29 \xrightarrow{g} 22 \xrightarrow{g} 15 \xrightarrow{g} 8 \xrightarrow{f} 32 \xrightarrow{g} 25 \xrightarrow{g} 18 \xrightarrow{g} 11 \xrightarrow{f} 44 \xrightarrow{g} 37$$

que nous pouvons présenter encore en utilisant les classes 1 , 2 et 4:

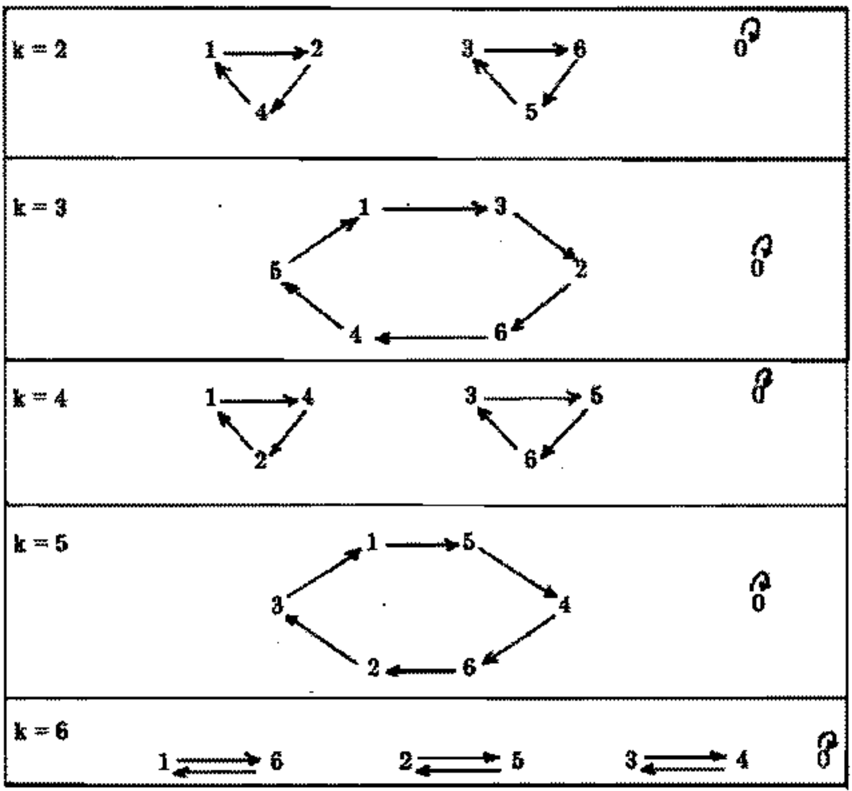


Vient alors la troisième question: *est-ce le plus court chemin ?* Le lecteur tentera de répondre à cette question.

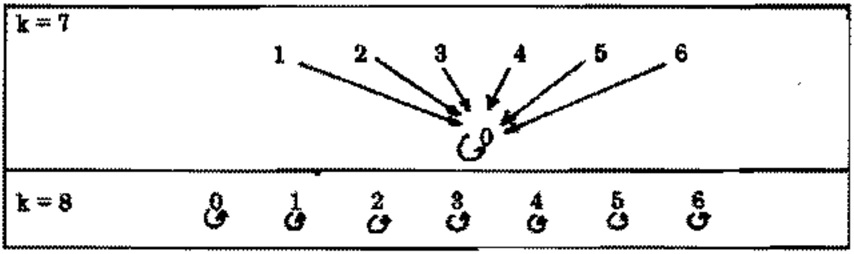
A titre d'exercice, il essayera de trouver un chemin allant de 18 à 71.

Il pourra en outre établir que* si x et y sont deux éléments quelconques d'une des classes 1, 2 ou 4, alors il existe au moins un chemin allant de x à y. Par contre, si x est un élément d'une des classes 1, 2 ou 4 et y un élément d'une des classes 3 , 5 ou 6, alors il n'existe aucun chemin allant de x à y.

Il est intéressant d'étudier les schémas sagittaux pour différentes valeurs de k.



* Le lecteur pourra construire un organigramme qui conduit à la découverte d'un chemin.



Il est facile de vérifier que pour $k = 9$, nous obtenons le même schéma sagittal que pour $k = 2$; les deux couples d'applications

$$\left| \begin{array}{l} x \longmapsto 2x \\ x \longmapsto x - 7 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} x \longmapsto 9x \\ x \longmapsto x - 7 \end{array} \right.$$

conduisent à la même situation “numérique”.

En est-il de même pour $k = 1$ et $k = 8$? Et pour $k = 0$ et $k = 7$?

Pour chacun de ces deux cas, nous avons bien des schémas sagittaux identiques et pourtant, nous n'avons pas les mêmes situations numériques. Il est aisé de comprendre pourquoi ....

Cette étude montre qu'en définitive pour cheminer parmi les naturels à l'aide des deux applications

$$\begin{array}{l} f : x \longmapsto kx \\ g : x \longmapsto x - 7 \end{array}$$

il suffit de prendre le couple

$$\begin{array}{l} f' : x \longmapsto hx \\ g : x \longmapsto x - 7 \end{array}$$

où $h \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $h \equiv k \pmod 7$.

Quelques remarques

1. Pour $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, il existe des chemins allant de 29 à 32. Il n'en est pas de même pour $k \in \{6, 7, 8\}$.
2. Pour $k = 2$, le schéma sagittal présente *trois* cycles:
   (1 , 2 , 3) , (3 , 5 , 6) et (0)

Voici une table donnant le nombre c de cycles pour les différentes valeurs de k (modulo 7) :

k	2	3	4	5	6	7	8
c	3	2	3	2	4	0	7

Pour toutes les valeurs de k — sauf pour 7 — nous avons une bijection de E. Pour 7, il n'y a pas de cycle : tous les éléments de E ont pour image 0 ; c'est une surjection. Il en résulte que dans ce cas, en partant d'un naturel quelconque, on ne peut atteindre que des éléments de la classe de ce naturel (par g) et que des multiples de 7 (par f).

5. Une autre généralisation

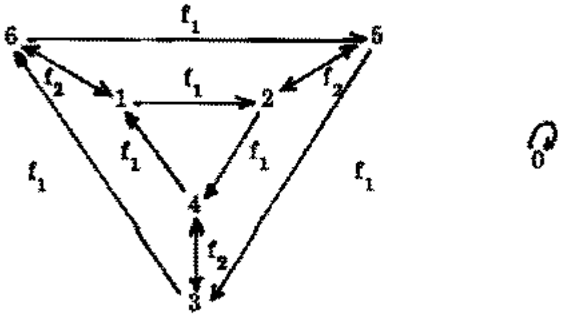
Voici une nouvelle extension du problème.

En partant du naturel n et en utilisant les trois applications (dans $\mathbb{N}$):

$$f_1 : x \longmapsto 2x$$
$$f_2 : x \longmapsto 6x$$
$$g : x \longmapsto x - 7$$

déterminez tous les naturels que l'on peut ainsi atteindre.

En combinant les schémas sagittaux pour $k = 2$ et $k = 6$, nous obtenons le schéma suivant :



Est-il possible d'aller du naturel 19 au naturel 15 ?

19 appartient à la classe 5, car $19 \equiv 5 \pmod 7$;
15 appartient à la classe 1, car $15 \equiv 1 \pmod 7$.

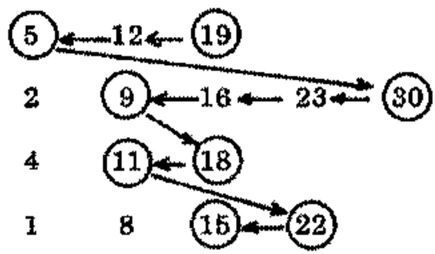
Il nous faut passer de la classe 5 à la classe 1; le schéma sagittal précédent suggère des voies, dont voici deux:

$$\text{classe } 5 \xrightarrow{\times 6} \text{classe } 2 \xrightarrow{\times 2} \text{classe } 4 \xrightarrow{\times 2} \text{classe } 1$$

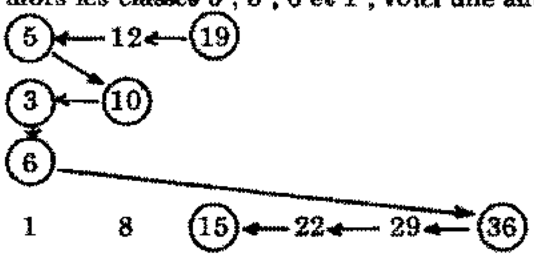
ou encore

$$\text{classe } 5 \xrightarrow{\times 2} \text{classe } 3 \xrightarrow{\times 2} \text{classe } 6 \xrightarrow{\times 6} \text{classe } 1$$

En prenant les classes 5, 2, 4 et 1, voici une solution:



En prenant alors les classes 5 , 3 , 6 et 1 , voici une autre solution:



Nous pouvons établir que* si x et y ne sont ni l'un ni l'autre multiple de 7, alors il existe au moins un chemin allant de x à y. Il en est de même, si x et y sont tous deux multiples de 7.

---

* Un organigramme sera intéressant à construire.

Pour terminer, posons le problème suivant:

> ***p est un naturel donné. Est-il possible de déterminer une suite de naturels k_1, k_2, ..., k_s, telle que quels que soient les naturels x et y (non multiples de p), il existe au moins un chemin allant de x à y, utilisant des applications ?***

$$
\begin{array}{l}
x \longmapsto x - p \\
x \longmapsto k_1\,x \\
x \longmapsto k_2\,x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x \longmapsto k_s\,x
\end{array}
$$

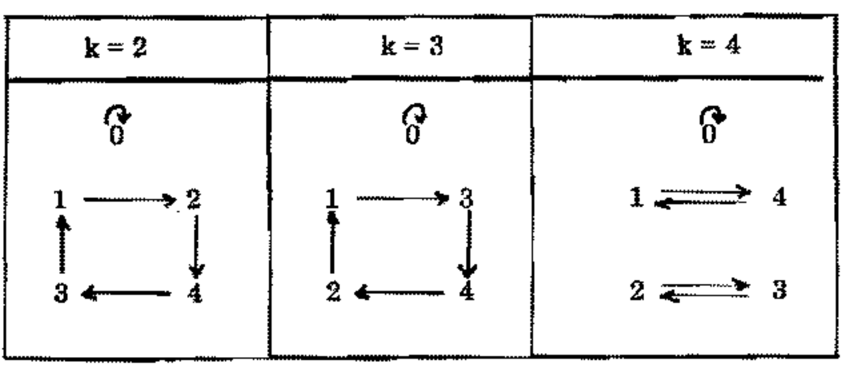
Voici quelques exemples:

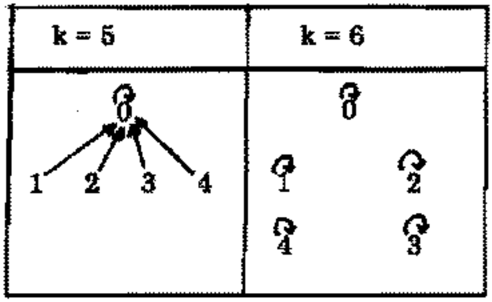
Pour $p = 7$, on peut prendre par exemple $k_1 = 5$ ou $k_1 = 2$ et $k_2 = 6$.

Pour $p = 3$, on peut prendre $k_1 = 2$ (voir paragraphe 1).

Vérifiez que pour $p = 5$, on peut prendre $k_1 = 2$ ou $k_2 = 3$.

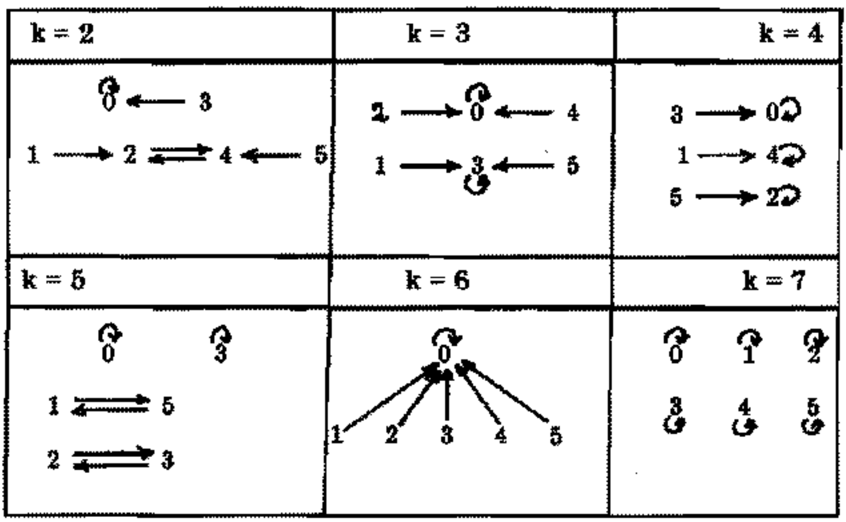
Y a-t-il d'autres solutions ? Voici dans ce cas les différents schémas sagittaux:





Le cas $p = 6$ est tout particulièrement instructif.

Dans ce cas, nous avons les schémas sagittaux suivants:



Il est vain de vouloir trouver pour $p = 6$ une solution au problème; le lecteur s'en convaincra aisément.

Se pose alors un nouveau problème: *pour quelles valeurs de p le problème précédent a-t-il des solutions ?*

6. Remarque finale

Nous pouvons reprendre tout ce qui précède, mais au lieu de travailler sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels, prolonger notre étude sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers:

> *En partant de l'entier x et en utilisant les deux applications (dans $\mathbb{Z}$):*
>
> $$f : x \longmapsto kx$$
> $$g : x \longmapsto x - p$$
>
> *où k et p sont deux entiers, déterminez tous les entiers que l'on peut ainsi atteindre...*

Leningrad
17 avril 1979