Identités hyperboliques et fibonacciennes associées

par E. EHRHART, Strasbourg

On sait que par la substitution

$$\cos X = \operatorname{ch} x \qquad \sin X = i \operatorname{sh} x ,$$

où $i = \sqrt{-1}$, des identités trigonométriques fournissent des identités hyperboliques et inversement. Cela s'explique par les formules classiques $\cos X = \operatorname{ch} iX$ et $\sin X = i \operatorname{sh} iX$. Ainsi sont associées les identités

$$\cos^2 X + \sin^2 X = 1 \qquad \sin 2X = 2 \sin X \cos X$$
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

On va voir que, de même, une simple substitution associe automatiquement à une classe d'identités entre fonctions hyperboliques des identités entre fonctions "fibonacciennes". Rappelons d'abord la définition de ces dernières.

Les fonctions fibonacciennes

Dans la suite 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ... chaque terme à partir du troisième est la somme des deux précédents. Cette très classique suite F_n de Fibonacci, connue depuis huit siècles, est donc définie par la récurrence

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad F_1 = F_2 = 1 .$$

De manière analogue, la suite L_n de Lucas, qu'il a introduite il y a cent ans, est définie par

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad , \quad L_1 = 1, L_2 = 3 .$$

Voici les premiers termes de ces suites d'entiers :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

Les fonctions fibonacciennes F_n et L_n ont tant de propriétés remarquables qu'une revue américaine "The Fibonacci Quarterly" leur a été consacrée. Depuis 1963 dix-sept gros volumes ont déjà paru !

Les expressions générales de F_n et de L_n sont données par les notoires formules de Binet

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \qquad L_n = a^n + b^n$$

où $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les racines de l'équation

$$X^2 - X - 1 = 0 .$$

Association avec les fonctions hyperboliques

En posant $\alpha = \log a$, on trouve $a = e^{\alpha}$ et $b = -e^{-\alpha}$, car $ab = -1$ donne $b = -a^{-1}$. Alors

$$\frac{F_n}{2} = \frac{e^{\alpha n} - (-1)^n e^{-\alpha n}}{2\sqrt{5}} \qquad \frac{L_n}{2} = \frac{e^{\alpha n} + (-1)^n e^{-\alpha n}}{2} .$$

En posant $\alpha n = x$, il vient

$$\frac{\sqrt{5}F_n}{2} = \frac{e^x - (-1)^n e^{-x}}{2} \qquad \frac{L_n}{2} = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2} .$$

Désignons par $[u_1, u_2]_n$ le nombre égal à u_1 pour n impair, à u_2 pour n pair. Les relations précédentes s'écrivent alors

$$\frac{\sqrt{5}F_n}{2} = [\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x]_n \qquad \frac{L_n}{2} = [\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x]_n .$$

Plus généralement, k étant un entier positif, on a

$$(1) \quad F_{kn} = \frac{2}{\sqrt{5}}[\mathrm{ch}kx, \mathrm{sh}kx]_{kn} \qquad L_{kn} = 2[\mathrm{sh}kx, \mathrm{ch}kx]_{kn}$$

et les formules équivalentes

$$(2) \quad \mathrm{ch}kx = \frac{1}{2}[\sqrt{5}F_{kn}, L_{kn}]_{kn} \qquad \mathrm{sh}kx = \frac{1}{2}[L_{kn}, \sqrt{5}F_{kn}]_{kn} .$$

En posant $\alpha m = y$, on trouve de même

$$(3) \quad F_{n+m} = \frac{2}{\sqrt{5}}[\mathrm{ch}(x+y), \mathrm{sh}(x+y)]_{n+m} \qquad L_{n+m} = 2[\mathrm{sh}(x+y), \mathrm{ch}(x+y)]_{n+m}$$

$$(4) \quad \mathrm{ch}(x+y) = \frac{1}{2}[\sqrt{5}F_{n+m}, L_{n+m}]_{n+m} \qquad \mathrm{sh}(x+y) = \frac{1}{2}[L_{n+m}, \sqrt{5}F_{n+m}]_{n+m}$$

formules encore valables si on y remplace partout le signe $(+)$ par $(-)$.

Par les substitutions (1) et (3) d'une part ou (2) et (4) d'autre part, une identité fibonaccienne donne une ou plusieurs identités hyperboliques ou inversement, pourvu que n'y interviennent que des arguments ou des *indices de la forme $kx \pm k'y$ ou $kn \pm k'm$. Les indices peuvent d'ailleurs être négatifs ou nuls.* Par les formules de récurrence

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1} \quad \text{et} \quad L_{n-2} = L_n - L_{n-1} \ ,$$

on trouve en effet

$$F_0 = 0 \ , F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n \qquad L_0 = 2 \ , L_{-n} = (-1)^n L_n \ .$$

Si l'on part d'une identité fibonaccienne, on doit en toute rigueur vérifier par d'autres voies l'identité hyperbolique associée, puisqu'on passe alors du particulier au général. Mais une telle identité étant vraie pour $x = \alpha n$ et $y = \alpha m$, avec une grande probabilité elle l'est encore pour x et y quelconques, car $\alpha = \log \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un nombre transcendant.

Les identités hyperboliques étant plus connues, on se contentera d'établir quelques identités fibonacciennes.

Recherche d'identités fibonacciennes

Exemple 1. $\quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

La substitution (2) donne

pour n impair : $$\frac{5F_n^2}{4} - \frac{L_n^2}{4} = 1 \ ,$$

pour n pair : $$\frac{L_n^2}{4} - \frac{5F_n^2}{4} = 1 \ .$$

Donc pour tout n

(5) $$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n \ .$$

Exemple 2. $\quad \mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x.$

n impair : $$\frac{\sqrt{5}F_{2n}}{2} = 2\,\frac{L_n}{2}\,.\,\frac{\sqrt{5}F_n}{2}$$

n pair : $$\frac{\sqrt{5}F_{2n}}{2} = 2\,\frac{\sqrt{5}F_n}{2}\,.\,\frac{L_n}{2}\ .$$

Donc, pour tout n,

(6) $$F_{2n} = L_n F_n \ .$$

Exemple 3. $\mathrm{sh}5x = 4\mathrm{sh}x(\mathrm{ch}2x - \sqrt{5}\mathrm{ch}x + \frac{3}{2})(\mathrm{ch}2x + \sqrt{5}\mathrm{ch}x + \frac{3}{2})$.

n impair : $$\frac{L_{5n}}{2} = 4\,\frac{L_n}{2}\left(\frac{L_{2n}}{2} - \sqrt{5}\,\frac{\sqrt{5}F_n}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{L_{2n}}{2} + \sqrt{5}\,\frac{\sqrt{5}F_n}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

n pair : $\dfrac{\sqrt{5}F_{5n}}{2} = 4\,\dfrac{\sqrt{5}F_n}{2}\left(\dfrac{L_{2n}}{2} - \sqrt{5}\dfrac{L_{2n}}{2} + \dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{L_{2n}}{2} + \sqrt{5}\,\dfrac{L_n}{2} + \dfrac{3}{2}\right).$

En remplaçant n pair par $2n$ et n impair par $2n-1$, on trouve donc deux identités distinctes, valables pour tout n :

$$L_{10n-5} = L_{2n-1}(L_{4n-2} - 5F_{2n-1} + 3)(L_{4n-2} + 5F_{2n-1} + 3)$$
$$F_{10n} = F_{2n}(L_{4n} - \sqrt{5}L_{2n} + 3)(L_{4n} + \sqrt{5}L_{2n} + 3)\,.$$

Notons que l'identité trigonométrique associée est

$$\sin 5X = 4 \sin X\left(\cos 2X - \sqrt{5}\cos X + \frac{3}{2}\right)\left(\cos 2X + \sqrt{5}\cos X + \frac{3}{2}\right).$$

Exemple 4. $\qquad (\mathrm{ch}X + \mathrm{sh}X)^k = \mathrm{ch}kX + \mathrm{sh}kX\,.$

Pour tout n et pour tout $k \geqslant 0$:

$$(7) \qquad \left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right)^k = \frac{L_{kn} + \sqrt{5}F_{kn}}{2}\,.$$

Application : Pour exprimer L_{kn} et F_{kn} en fonction de L_n et de F_n, il suffit de séparer, dans la puissance du premier membre de (7) développée, les termes avec ou sans le facteur $\sqrt{5}$.

En voici une application. On sait que F_{kn} est divisible par F_n. Montrons que *l'entier* $\dfrac{F_{kn}}{F_n}$ *est une fonction de* L_n de la forme $P(L_n) + (-1)^n Q(L_n)$, où $P(X)$ et $Q(X)$ sont des polynomes de parité contraire à celle de k. La relation (7) montre que F_{kn} est de la forme $\Sigma c_i F_n^i L_n^{k-i}$, où i prend les valeurs impaires inférieures ou égales à k. Par suite $\dfrac{F_{kn}}{F_n}$ est de la forme $\Sigma c_i (F_n^2)^{k'} L_n^{k-i}$. Or d'après (5)

$$F_n^2 = \frac{L_n^2 - 4(-1)^n}{5}\,.$$

On a déjà vu (6) que $\dfrac{F_{2n}}{F_n} = L_n$. Nous avons montré que *pour*

$k = 3,4,5,6$ *l'entier* $\dfrac{F_{kn}}{F_n}$ *vaut respectivement* :

$$L_n^2 - (-1)^n\,,\ L_n[L_n^2 - 2(-1)^n]\,,\ L_n^4 - 3(-1)^n L_n^2 + 1\,,$$
$$L_n[L_n^4 - 4(-1)^n L_n^2 + 3]\,.$$

On verra plus loin que

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}\,.$$

Exemple 5.

(8) $$\frac{1}{2} + \text{ch}2x + \text{ch}4x + \text{ch}6x + \ldots + \text{ch}2kx = \frac{\text{sh}(2k+1)x}{2\text{sh}x}.$$

$$1 + L_{2n} + L_{4n} + L_{6n} + \ldots + L_{2kn} = \left[\frac{L_{(2k+1)n}}{L_n}, \frac{F_{(2k+1)n}}{F_n}\right]_n.$$

Si, dans l'identité trigonométrique associée à (8), on change X en $X + \frac{\pi}{2}$, on trouve une formule dont l'hyperbolique associée est

$$\frac{1}{2} - \text{ch}2x + \text{ch}4x - \text{ch}6x + \ldots + (-1)^k\text{ch}2kx = \frac{(-1)^k\text{ch}(2k+1)x}{2\text{ch}x},$$

dont l'associée fibonaccienne est

$$1 - L_{2n} + L_{4n} - L_{6n} + \ldots + (-1)^k L_{2kn} = (-1)^k\left[\frac{F_{(2k+1)n}}{F_n}, \frac{L_{(2k+1)n}}{L_n}\right]_n.$$

Exemple 6. $\text{sh}(x+y) = \text{sh}x\text{ch}y + \text{ch}x\text{sh}y.$

$\text{ch}(x+y) = \text{ch}x\text{ch}y + \text{sh}x\text{sh}y.$

Pour tous n et m :

(9) $$2F_{n+m} = F_nL_m + L_nF_m$$
$$2L_{n+m} = L_nL_m + 5F_nF_m.$$

En particulier, pour $m = 1$ ou $m = -1$, l'identité (9) donne respectivement

$$F_{n+1} = \frac{L_n + F_n}{2} \qquad F_{n-1} = \frac{L_n - F_n}{2}.$$

Donc F_n et L_n sont toujours de même parité.

Exemple 7. $\text{ch}(x+y) + \text{ch}(x-y) = 2\text{ch}x\text{ch}y$

n et m impairs : $L_{n+m} + L_{n-m} = 5F_nF_m$
n et m pairs : $L_{n+m} + L_{n-m} = L_nL_m$
n impair, m impair : $F_{n+m} + F_{n-m} = F_nL_m$
n pair, m impair : $F_{n+m} + F_{n-m} = L_nF_m.$

$\text{sh}(x+y) + \text{sh}(x-y) = 2\,\text{sh}x\text{ch}y$

n et m impairs : $F_{n+m} + F_{n-m} = L_nF_m$
n et m pairs : $F_{n+m} + F_{n-m} = F_nL_m$
n impair, m pair : $L_{n+m} + L_{n-m} = L_nL_m$
n pair, m impair : $L_{n+m} + L_{n-m} = 5F_nF_m.$

Donc, pour tous n et m,

$$L_{n+m} + L_{n-m} = [5F_nF_m, L_nL_m]_m$$
$$F_{n+m} + F_{n-m} = [L_nF_m, F_nL_m]_m.$$

En particulier, pour $m = 1$, on trouve

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n \qquad F_{n+1} + F_{n-1} = L_n.$$

On voit de même que

$$L_{n+m} - L_{n-m} = [L_nL_m, 5F_nF_m]_m$$
$$F_{n+m} - F_{n-m} = [F_nL_m, L_nF_m]_m .$$

Une application trigonométrique. On sait (1) que pour a,b,c pairs

$$L_aL_bL_c = L_{a+b+c} + L_{b+c-a} + L_{c+a-b} + L_{a+b-c}$$
$$5F_aF_bF_c = F_{a+b+c} + F_{a-b-c} + F_{b-c-a} + F_{c-a-b}$$

Donc, par transposition hyperbolique

$$4\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\mathrm{ch}z = \mathrm{ch}(x+y+z) + \mathrm{ch}(y+z-x) + \mathrm{ch}(z+x-y) + \mathrm{ch}(x+y-z)$$
$$4\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y\mathrm{sh}z = \mathrm{sh}(x+y+z) + \mathrm{sh}(x-y-z) + \mathrm{sh}(y-z-x) + \mathrm{sh}(z-x-y)$$

d'où, par transposition trigonométrique

$$4\cos x\cos y\cos z = \cos(x+y+z) + \cos(y+z-z) + \cos(z+x-y) + \cos(x+y-z)$$
$$-4\sin x\sin y\sin z = \sin(x+y+z) + \sin(x-y-z) + \sin(y-z-x) + \sin(z-x-y)$$

Peut être le lecteur voudra-t-il découvrir lui-même d'autres identités par l'association trigonométrique-hyperbolique-fibonaccienne.

*
* *

(1) H. Ferns, Products of Fibonacci and Lucas numbers, the Fibonacci Quarterly, Vol. 7, p. 1-13 (1969).