

1

ETUDES

Les entiers d'Euler

par Eugène EHRHART, Strasbourg*

Les entiers en question sont moins connus que les nombres d'Euler ou les nombres eulériens(**). Et pourtant, sous une certaine forme, ces entiers qui le fascinaient, on les trouve déjà chez les Anciens.

Nous allons d'abord en montrer l'origine et en donner l'expression générale. Nous en établirons ensuite quelques propriétés remarquables, en partie inédites. Puis nous en donnerons quelques applications en théorie des nombres et en combinatoire.

A cette occasion nous introduirons la notation commode de *nombre périodique* et la notion utile de *polynôme arithmétique*.

I - Expression générale des entiers d'Euler

Considérons le produit infini

$$\pi(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots$$

qu'Euler a rencontré à propos du problème de la *partition* des entiers. Il a par exemple montré que le nombre $p(n)$ des partitions de n en sommes d'entiers distincts ou non est engendré par la fonction $\frac{1}{\pi(x)}$, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\pi(x)} = 1 + \sum_{n>0} p(n)x^n$$

En développant $\pi(x)$ en série entière, on s'attend a priori à trouver des coefficients de plus en plus grands. On est d'autant plus surpris de ne

(*) Conférence faite à la Régionale de Strasbourg en avril 1979.

(**) Les nombres d'Euler E_n et les nombres eulériens $A(n,k)$ sont définis par

$$\frac{1}{\text{Ch } x} = \sum_{n \geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} ; x^n = \sum_{1 \leq k \leq n} A(n,k) \binom{x+k-1}{n}$$

constater que des coefficients 1 ou -1 , isolés dans des lacunes de coefficients nuls, lacunes dont l'ampleur croît dans l'ensemble et tend vers l'infini. De façon plus précise

$$(1) \quad \pi(x) = 1 - x^{a_1} - x^{a_2} + x^{a_3} + x^{a_4} - x^{a_5} - x^{a_6} + \dots + \epsilon_n x^{a_n} + \dots$$

Les coefficients sont, par couples de termes, alternativement -1 et $+1$. Pour voir comment se comportent les exposants, dressons-en une liste initiale :

Tableau I des entiers d'Euler a_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51	57	70	77	92	100
Δ_n	①	3	②	5	③	7	④	9	⑤	11	⑥	13	⑦	15	⑧	

Les a_n semblent suivre une loi compliquée, puisque leur vitesse de croissance est oscillante. Il est naturel de former la suite des différences $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$. On constate que ses termes de rang impair sont les entiers et ses termes de rang pair sont les nombres impairs en partant de 3.

Nous allons donner une expression simple du terme général $\epsilon_n x^{a_n}$ de la série (1) grâce à deux définitions et à un théorème.

DEFINITIONS⁽¹⁾. Un nombre périodique $u_n = [u_1, u_2, \dots, u_k]$ est égal au u_j du crochet tel que $n = j$, modulo k . On représente donc très naturellement une suite de période k par ses k premiers termes ; ainsi $u_n = [a, b]$ signifie que $u_n = a$ si n est impair et $u_n = b$ si n est pair, et $u_n = [4, -1, 0]$ désigne le n -ième terme de la suite 4, -1 , 0, 4, -1 , 0, ...

Un polynôme arithmétique $P(n)$ n'est défini que pour n entier positif et ne prend que des valeurs entières ; il diffère d'un polynôme ordinaire en ce que certains de ses coefficients sont des nombres périodiques. Exemple : $3n^2 - [4, 1]n + [5, 2, 7]$.

Nous admettons le théorème de sommation suivant, facile à établir.

THÉORÈME 1⁽¹⁾. Si $u_n = [a, b]$ et $v_n = [a, b]n$, alors

$$\sum_{i=1}^n u_i = \frac{(a+b)n + [a-b, 0]}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n v_i = \frac{(a+b)n^2 + [2a, 2b]n + [a-b, 0]}{4}$$

On voit sans peine que

$$\Delta_n = \frac{n+1}{2} [1, 2].$$

On peut donc calculer

$$a_n = 1 + (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{n-1}) .$$

En appliquant le théorème 1 et en tenant compte pour les crochets de la différence de parité de $n-1$ et de n , on trouve :

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n-1) + [0,1]}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n-1)^2 + [4,2](n-1) + [0,-1]}{4}$$

D'où en simplifiant :

THEOREME 2. *Le n -ième entier d'Euler est le trinôme arithmétique*

$$(2) \quad a_n = \frac{3n^2 + [4,2]n + [1,0]}{8}$$

COROLLAIRE. *Le terme général de la série $\pi(x)$ est*

$$\frac{1}{8} (3n^2 + [4,2]n + [1,0])$$

$$[-1, -1, 1, 1]x$$

Nous définissons les entiers d'Euler a_n par le tableau I, indéfiniment prolongé à l'aide des deux progressions arithmétiques imbriquées, et la formule (2) en découle. Par contre nous avons admis la formule (1). Du vivant d'Euler elle restait conjecturale. Ce n'est qu'au siècle suivant que diverses démonstrations en ont été données, notamment par Legendre⁽²⁾, Cauchy, Jacobi et Sylvester.

Au sujet de cette relation, il vous intéressera peut-être d'entendre Euler lui-même. Dans un mémoire intitulé « *DÉCOUVERTE D'UNE LOI TOUT EXTRAORDINAIRE DES NOMBRES PAR RAPPORT A LA SOMME DE LEURS DIVISEURS* »⁽³⁾, il dit :

"J'ai multiplié actuellement un grand nombre de facteurs ensemble, et j'ai trouvé cette progression (...). On n'a qu'à entreprendre cette multiplication et à la continuer aussi loin qu'on jugera à propos, pour se convaincre de la vérité de cette série (...). J'ai longtemps cherché en vain une démonstration rigoureuse (...) et j'ai proposé la même demande à quelques-uns de mes amis dont je connais la force dans ces sortes de question ; mais tous sont tombés avec moi d'accord sur la vérité de cette conversion, sans avoir pu déferer aucune source de démonstration. Ce sera donc une vérité connue, mais pas encore démontrée".

Euler a écrit ce texte en français, comme celui des citations qui vont suivre.

II - Propriétés des entiers d'Euler

Posons d'abord une question toute simple. Quelle est la parité du n -ième entier d'Euler ? En examinant le tableau I, il semble que les parités se reproduisent avec la période 8. Or

$$a_{n+8} = \frac{3(n+8)^2 + [4,2](n+8) + [1,0]}{8} = a_n + 6n + [28,26].$$

Comme $6n + [28,26]$ est pair pour tout n , il s'ensuit :

THEOREME 3. *La parité de a_n est celle du nombre périodique $[1,0,1,1,0,1,0,0]$.*

De même $a_n = [1, -1, -1, 1, 0, 0]$ modulo 3, car

$$a_{n+6} = a_n + 3 \frac{3n + [11,10]}{2}$$

Voici maintenant une question plus importante. Trouver une propriété caractéristique des a_n . Pour que N soit un nombre d'Euler, il faut que l'équation d'inconnue n

$$N = \frac{3n^2 + [4,2]n + [1,0]}{8},$$

ou

$$3n^2 + [4,2]n + [1,0] - 8N = 0,$$

ait une racine positive entière. Il faut donc que son discriminant réduit $\Delta = [2,1]^2 - 3[1,0] + 24N = [4,1] - [3,0] + 24N = [1,1] + 24N = 1 + 24N$ soit un carré parfait. Réciproquement soit

$$24N + 1 = k^2$$

où k , nécessairement non multiple de 3, est de la forme $3n+2$ ou $3n+1$. L'égalité (2), qui peut s'écrire

$$24a_n + 1 = 9n^2 + 3[4,2]n + [4,1] = (3n + [2,1])^2,$$

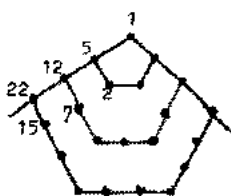
montre alors que N est le n -ième entier d'Euler.

THÉOREME 4. *Un entier N est d'Euler si et seulement si $24N + 1$ est un carré parfait k^2 . Son rang est alors $[\frac{k}{3}]$ (partie entière de $\frac{k}{3}$).*

Les a_n ont encore une autre propriété caractéristique. Distinguons dans (2) n impair ou pair :

$$1) n = 2k - 1 \Rightarrow a_n = \frac{3k^2 - k}{2} = 1, 5, 12, 22, \dots$$

$$2) n = 2k \Rightarrow a_n = \frac{3k^2 + k}{2} = 2, 7, 15, \dots$$



Les entiers $\frac{3k^2 - k}{2}$ sont les nombres pentagonaux, connus depuis l'Antiquité. Ils comptent les points marquants des pentagones fermés ci-contre. Les entiers $\frac{3k^2 + k}{2}$ ont aussi une représentation arithmogéométrique simple : ils comptent les points mar-

quants des pentagones ouverts. Nous les appellerons donc nombres pentagonaux de seconde espèce. Remarquons qu'on les obtient aussi par $\frac{3k^2 - k}{2}$ pour $k = -1, -2, -3, \dots$

THEOREME 5. Les entiers d'Euler sont identiques aux nombres pentagonaux $\frac{3k^2 \pm k}{2}$.

Les a_n vérifient-ils une relation de récurrence ? Oui, car a_n est un polynôme arithmétique. On sait en effet⁽¹⁾ que tout polynôme arithmétique u_n de caractéristiques (d, g, p) (on précisera de suite cette notion) vérifie la relation de récurrence linéaire

$$\{(1-u)^{d-g} (1-uw)^{g+1}\} = 0$$

les accolades signifiant que dans le polynôme développé on remplace toute puissance u^i par u_{n-i} .

Pour a_n de (2) le degré $d=2$, le grade $g=1$ (c'est-à-dire que 1 est la plus haute puissance à coefficient périodique) et la pseudo-période $p=2$ (plus petit commun multiple des périodes des coefficients). Donc

$$\{(1-a)(1-a^2)\} = \{1-a-2a^2+2a^3+a^4-a^5\} = 0$$

et par suite :

THEOREME 6. Les entiers d'Euler vérifient la relation de récurrence linéaire

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-4} - a_{n-5} = 0.$$

Quelle est la fonction génératrice de a_n ? On sait⁽¹⁾ que tout polynôme arithmétique u_n de relation de récurrence $\{F(u)\} = 0$ est engendré par une fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, où le degré de $f(x)$ est inférieur à celui de $F(x)$. Donc a_n est engendré par une fraction

$$\frac{f(x)}{(1-x)(1-x^2)^2} = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$

où le polynôme $f(x)$ est du 4^e degré au plus. On en déduit facilement

$$f(x) = 1 - x^2 + 3x^3 + x^4.$$

D'où :

THEOREME 7. Les entiers d'Euler sont engendrés par la fraction rationnelle

$$\frac{1-x^2+3x^3+x^4}{(1-x)(1-x^2)^2} = 1 + \sum_{n>0} a_n x^n.$$

Remarque : Nous avons montré que l'entier d'Euler a_n est le nombre de solutions entières non négatives de l'équation

$$x + 2y + 6z + 3 = 3n.$$

III - Applications

1) *Partitions d'entiers.* Nous allons démontrer la proposition suivante :

THEOREME 8. Soient p et i respectivement les nombres de partitions d'un entier en un nombre pair ou impair d'entiers inégaux. Alors $p=i$, sauf pour les entiers d'Euler. Pour un tel entier de rang n , $p=i+[-1, -1, 1, 1]$, la variable du crochet périodique étant n .

COROLLAIRE. Le nombre de partitions d'un entier en parts inégales est pair, sauf pour les entiers d'Euler.

Le coefficient c_N dans la série entière

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_Nx^N + \dots$$

est le même que celui de x^N dans le polynôme

$$(3) (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^N) = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_Nx^N + x^{N+1}P(x)$$

Or, en effectuant le produit (3) sans réduire les termes semblables, on obtient avec le coefficient (+1) tout x^N dont l'exposant se présente comme partition de N en un nombre pair de termes inégaux et avec le coefficient (-1) tout x^N dont l'exposant est obtenu comme partition de N en un nombre impair d'entiers distincts. Donc $c_N = p - i$, qui d'après (1) vaut $\epsilon_n = [-1, -1, 1, 1]$ ou 0, suivant que N est entier d'Euler ou non.

Remarques :

1) Quoique le théorème 8 résulte sans peine de l'identité (1), il semble que Legendre ait été le premier à l'énoncer⁽²⁾.

2) A présent les grandes lacunes de la série (1) s'expliquent : elles traduisent simplement le fait qu'en général les partitions d'un entier en un nombre pair ou impair de termes inégaux s'équilibrent.

2) *Fonction $\sigma(n)$ d'Euler.* On désigne habituellement par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de l'entier n . Ainsi $\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Voici les premières valeurs de $\sigma(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31

Les nombres premiers sont évidemment caractérisés par $\sigma(p) = p + 1$. Pour des nombres premiers inégaux p_1, p_2, \dots, p_r la fonction $\sigma(n)$ est multiplicative, c'est-à-dire

$$\sigma(p_1 p_2 \dots p_r) = \sigma(p_1) \sigma(p_2) \dots \sigma(p_r).$$

On le voit aisément en effectuant le produit $(1 + p_1)(1 + p_2)\dots(1 + p_r)$ du second membre. Plus généralement

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_r^{\alpha_r}).$$

A propos du tableau des $\sigma(n)$, Euler observe : "L'irrégularité de la suite des nombres premiers s'y trouve entremêlée (...). Il semble même qu'il y ait ici beaucoup plus de bizarrerie". La suite des σ_n présente en effet une infinité d'oscillations irrégulières. Et pourtant il y a découvert une loi :

THEOREME 9. La fonction $\sigma(n)$ vérifie la relation récurrente

$$(4) \quad \sigma(n) = \sigma(n-a_1) + \sigma(n-a_2) - \sigma(n-a_3) - \sigma(n-a_4) + \dots,$$

par convention
$$\sigma(k) = \begin{cases} n & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k<0 \end{cases}$$

Les a_i sont les entiers d'Euler et les signes sont alternés par couples de termes.

Exemple :
$$\sigma(7) = \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2) - \sigma(0) = 12 + 6 - 3 - 7 = 8.$$

Voici l'ingénieuse démonstration du maître.

Prenons la dérivée logarithmique des deux membres de (1) et multiplions-la par $(-x)$:

$$Y = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \dots = \frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+\dots}{1-x-x^2+x^5+x^7+\dots} = \frac{N}{D}$$

Développons les fractions du premier membre en série entière :

$$\begin{array}{r}
 Y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \dots \\
 \quad \quad \quad 2x^2 \quad \quad + 2x^4 \quad \quad + 2x^6 \quad \quad + 2x^8 + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 3x^3 \quad \quad \quad + 3x^6 \quad \quad \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4x^4 \quad \quad \quad \quad + 4x^8 + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 5x^5 \quad \quad \quad \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6x^6 \quad \quad \quad \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 7x^7 \quad \quad \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 8x^8 + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \dots \dots
 \end{array}$$

ou

$$Y = \sigma(1)x + \sigma(2)x^2 + \sigma(3)x^3 + \sigma(4)x^4 + \dots$$

La relation $0 = YD - N$ s'écrit donc

$$\begin{array}{r}
 0 = \sigma(1)x + \sigma(2)x^2 + \sigma(3)x^3 + \sigma(4)x^4 + \sigma(5)x^5 + \sigma(6)x^6 + \sigma(7)x^7 + \dots \\
 \quad - \sigma(1)x^2 - \sigma(2)x^3 - \sigma(3)x^4 - \sigma(4)x^5 - \sigma(5)x^6 - \sigma(6)x^7 + \dots \\
 \quad \quad - \sigma(1)x^3 - \sigma(2)x^4 - \sigma(3)x^5 - \sigma(4)x^6 - \sigma(5)x^7 + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad + \sigma(1)x^6 + \sigma(2)x^7 + \dots
 \end{array}$$

$$-x \quad -2x^2 \quad \quad \quad + 5x^5 \quad \quad + 7x^7 + \dots$$

En annulant le coefficient de x^n au second membre on trouve la relation (4). On le voit facilement en regardant comment s'obtient par exemple le coefficient de x^7 .

Signalons une proposition d'Euler qui ressemble étrangement à la précédente. Elle concerne le nombre de partitions de n , en somme d'entiers égaux ou non, dont voici les premières valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

THEOREME 10. *Le nombre $p(n)$ de partitions de n , répétitions admises, vérifie la relation récursive*

$$p(n) = p(n-a_1) + p(n-a_2) - p(n-a_3) - p(n-a_4) + \dots,$$

par convention $p(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k<0 \end{cases}$

Les a_i sont les entiers d'Euler et les signes sont alternés par couples de termes.

Cette formule résulte immédiatement du fait déjà mentionné que $p(n)$ est engendré par $\frac{1}{\pi(x)}$.

N'est-ce pas fabuleux que deux êtres aussi disparates que σ_n , la somme des diviseurs de n , et p_n , le nombre de ses partitions, suivent la même loi récursive, à un détail près :

$$\sigma_0 = n \quad , \quad p_0 = 1 \quad ?$$

Ramanujan a montré que $p(5k-1) \equiv 0$, modulo 5. Nous avons trouvé un résultat analogue pour $\sigma(n)$:

THEOREME 11. *Tout $\sigma(3k-1)$ est multiple de 3.*

Abrégeons la notation "A = B, modulo 3" en l'écrivant $A \equiv B$. Désignons par p ou q un nombre premier N autre que 3, suivant que $N \equiv -1$ ou $N \equiv 1$. La décomposition en facteurs premiers de $n = 3k-1$ est de la forme

$$n = 3k-1 = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) (q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}) = PQ.$$

De $n \equiv -1$ et $Q \equiv 1$ résulte $P \equiv -1$ et donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ impair.

Il y a donc au moins un α_i , soit α_s impair et par suite

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha \equiv 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^\alpha \equiv 0.$$

Or on sait que

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_r^{\alpha_r}) \times \sigma(q_1^{\beta_1}) \sigma(q_2^{\beta_2}) \dots \sigma(q_s^{\beta_s})$$

Par suite $\sigma(n) \equiv 0$, car dans ce produit le facteur $\sigma(p^\alpha) \equiv 0$.

Remarques :

1) On voit de même que $\sigma(n)$ est multiple de 3, si et seulement si la décomposition de n en facteurs premiers présente au moins une puissance de la forme $(3k-1)^{2k'+1}$ ou $(3k+1)^{3k'-1}$.

2) Liouville a montré que $\sigma(n)$ est pair, sauf si n est un carré ou le double d'un carré.

3) Des fonctions génératrices de p_n et de σ_n , nous avons déduit la curieuse formule

$$\sigma_n = a_1 p_{n-a_1} + a_2 p_{n-a_2} - a_3 p_{n-a_3} - a_4 p_{n-a_4} + \dots$$

Pour finir, citons et commentons un texte d'Euler, qui montre, avec une charmante fraîcheur, d'une part son enthousiasme pour son étonnante formule (4) et d'autre part le mystère qui entourait encore pour lui ses entiers :

"On sera d'autant plus surpris de cette belle propriété, qu'on ne voit aucune liaison entre la composition de ma formule et la nature des diviseurs sur la somme desquels roule la proposition. La progression des nombres 1, 2, 5, 7, 12, 15, ... ne paraît pas seulement avoir nul rapport au sujet dont il s'agit, mais, comme la loi de ces nombres est interrompue et qu'ils sont mêlés de deux progressions différentes, à savoir 1, 5, 12, 22, 35, 51, ... et 2, 7, 15, 26, 40, 57, ... il semble presque qu'une telle irrégularité ne saurait trouver lieu dans l'Analyse".

Ainsi Euler s'étonne que σ_n prenne ses valeurs dans deux progressions différentes, plus précisément dans deux trinômes du second degré. Or, contrairement à ce qu'il pense, on rencontre fréquemment en analyse des suites d'entiers qui prennent leurs valeurs dans plusieurs polynômes : ce sont les polynômes arithmétiques, qui ont tous une fraction rationnelle génératrice et vérifient une relation de récurrence linéaire. Il est piquant de constater que de telles suites se présentent en particulier dans une question dont justement Euler s'est occupé : la partition d'un entier en parts de valeurs données. En voici un exemple concret : de combien de manières peut-on partager un ensemble de n objets identiques en lots de 12, 13 et 17 pièces ? Cela revient à trouver le nombre j_n de solutions non négatives de l'équation diophantienne

$$(5) \quad 12X + 13Y + 17Z = n.$$

Ces partitions sont régies par un théorème très général, dont la première partie est due à Euler :

THEOREME 12. *Le nombre j_n de solutions non négatives de l'équation diophantienne à coefficients entiers positifs*

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j x_j = n$$

est engendré par la fraction

$$\frac{1}{(1-t^{\alpha_1})(1-t^{\alpha_2})\dots(1-t^{\alpha_r})} = \sum_{n \geq 0} j_n t^n.$$

La fonction $j(n)$ est un polynôme arithmétique qui a pour degré $r-1$, pour grade $m-1$, m étant le nombre maximum de α_j ayant un diviseur

commun autre que 1, et pour pseudo-période le plus petit commun multiple des $\alpha_i^{(1)}$.

Ainsi, pour l'exemple (5), j_n est un polynôme arithmétique de caractéristiques (2,0,2652). Plus précisément on sait⁽²⁾ que j_n vérifie une relation de la forme

$$2(12 \times 13 \times 17)j_n = n^2 + (12 + 13 + 17)n + u_n$$

où u_n est un nombre de période $12 \times 13 \times 17 = 2652$.

Vous pensez sans doute que les 2652 composantes de u_n sont longues à calculer et l'expression de j_n longue à écrire. Il n'en est rien. Le calcul de u_n prend exactement 5 secondes, car il se fait par ordinateur (avec le programme de résolution d'un système d'équations linéaires, dont dispose tout centre de calcul) et j_n s'écrit

$$j_n = \left\lfloor \frac{n^2 + 42n + 100(A_n - B_n)}{5304} \right\rfloor$$

où

$$A_n = [5, 21, 25, 17, -2, 17, 25, 21, 5, 30, 42, 42, 30]$$

$$B_n = [-2, 17, 6, 17, -2, 0, 24, 17, 33, 17, 24, 0]$$

ont respectivement 13 et 12 composantes ; les doubles barres désignent l'entier le plus proche. L'entier j_n a pour valeur approchée, à une unité près au plus,

$$\left\lfloor \frac{n(n+42)}{5304} \right\rfloor.$$

P.S. — Un beau résultat concernant les entiers a_i d'Euler a été trouvé récemment^(*) :

THEOREME 13. Le nombre p_n de partitions non restrictives de n et le nombre q_n de ses partitions en parts distinctes vérifient la relation récursive

$$q_n = p_n - p_{n-2a_1} - p_{n-2a_2} + p_{n-2a_3} + p_{n-2a_4} - \dots$$

Les signes sont alternés par couples de termes et, par convention,

$$p_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

(*) D.R. Hickerson, Recursion-type formulae for partitions into distinct parts, The Fibonacci Quarterly, Vol. 11, p. 307-311, 1973.

(1) E. EHRHART. Polynômes arithmétiques et Méthode des polyèdres en combinatoire, Birkhäuser, Bâle, 1977.

(2) A.M. LEGENDRE. Théorie des nombres, 1830.

(3) L. EULER. Opera Omnia, série 1, vol. 2, p. 241-253.