# 1

# ETUDES

## Quelques problèmes d'extremum

*par Jean de BIASI, Université Paul Sabatier, Toulouse*

A, B, C, étant trois points fixes distincts et dans les trois premiers cas M un point quelconque, dans le quatrième M un point de [BC], N un point de [CA], P un point de [AB], nous étudions quelques problèmes d'extremum relatifs à certaines expressions faisant intervenir ces différents points.

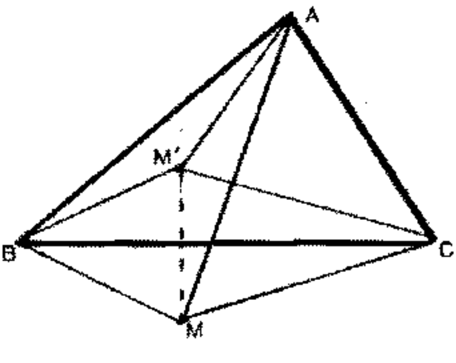
### Problème 1.

**Etude du minimum de la somme** $\varphi(M) = MA + MB + MC$
(Problème proposé par **FERMAT** ).

Notons $\mu$ un point, éventuel, en lequel $\varphi(M)$ est minimum.

• Si A, B, C sont alignés, $\mu$ existe et est unique : c'est celui des points A, B, C qui est situé entre les 2 autres.

• Supposons alors que A, B, C forment un véritable triangle. Si M n'appartient pas au plan ABC et si m est sa projection sur ce plan, on a $\varphi(M) > \varphi(m)$ et par suite, si $\mu$ existe, $\mu$ appartient au plan ABC. Nous supposons donc désormais M dans ce plan.




Si M est un point situé dans le demi plan défini par BC et ne contenant pas A et si M' est le symétrique de M par rapport à BC, on a :
$M'A < MA$, $M'B = MB$,
$M'C = MC$ et donc :
$\varphi(M') < \varphi(M)$.

Ainsi si $\mu$ existe il est situé par rapport à chacun des côtés du triangle ABC du même côté que le troisième sommet et par suite $\mu$ est *nécessairement intérieur au triangle ABC.*

Si M varie de façon que MB + MC reste constant, M décrit une ellipse (E) de foyers B et C et sur cette ellipse $\varphi(M)$ est minimum lorsque MA l'est, c'est-à-dire lorsque M est la "projection" de A sur E, c'est-à-dire

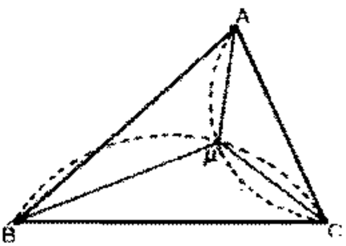
si $A \notin (E)$, lorsque M est tel que la normale en M à (E) passe par A (et dans ce cas MA est *bissectrice* de $(\overline{MB},\overline{MC})$

si $A \in (E)$, lorsque M est en A.

En remarquant que si un point M est tel que MA,MB,MC sont respectivement bissectrices de $(\overline{MB},\overline{MC})$, $(\overline{MC},\overline{MA})$, $(\overline{MA},\overline{MB})$, les trois angles $\widehat{BMC}$, $\widehat{CMA}$, $\widehat{AMB}$ sont égaux (et mesurent donc 120°), on en conclut que le minimum de $\varphi(M)$ ne peut être, éventuellement, réalisé qu'en

- Un point M tel que $\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120°$ (i)
- Un sommet du triangle ABC (ii)

*Si aucun des angles du triangle ABC ne dépasse 120°*, il existe un point $\mu$ réalisant (i) (construction classique par les arcs capables) et pour ce point on a, notant $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$ :




$$b^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos 120°$$
$$= x^2 + z^2 + xz = (z + \frac{x}{2})^2 + \frac{3x^2}{4}$$

d'où : $b \geq z + \frac{x}{2}$

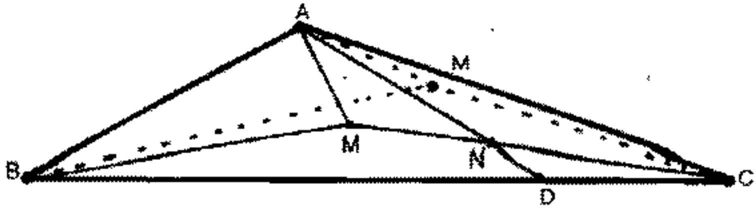
et de même : $c \geq y + \frac{x}{2}$

d'où : $b + c \geq x + y + z$

avec égalité uniquement si $x = 0$, c'est-à-dire si $\widehat{BAC} = 120°$.

Par raison de symétrie, il en découle que dans ce cas (aucun angle ne dépassant 120°) $\varphi(M)$ est minimum en ce point $\mu$. Si l'un des angles mesure 120°, le point $\mu$ est au sommet correspondant.

*Etudions maintenant le cas où l'un des angles dépasse 120°*



Supposons par exemple que la mesure de $\widehat{A}$ soit supérieure à 120° et soit D le point de BC tel que $\widehat{BAD}$ mesure 120°.

• Si M est intérieur au triangle ABD, MC coupe le segment AD en N et l'on a (en utilisant le résultat précédent)

$$MA + MB + MN \geq AB + AN$$

d'où $$MA + MB + MN + NC \geq AB + AN + NC \geq AB + AC$$

$$\text{soit } \varphi(M) \geq \varphi(A)$$

avec égalité seulement si $M = A$.

Si M est intérieur au triangle ADC, on a $MB \geq AB$ (car $\widehat{BAD}$ est obtus) et, comme $MA + MC \geq AC$, on a encore $\varphi(M) \geq \varphi(A)$ avec égalité seulement si $M = A$.

Par suite, pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a $\varphi(M) \geq \varphi(A)$ avec égalité seulement si $M = A$.

Le minimum de $\varphi(M)$ est donc obtenu pour $M = A$. Il en résulte la proposition :

**Proposition :** Soient A,B,C trois points distincts, M un point quelconque et $\varphi(M)$ la somme $MA + MB + MC$. Lorsque A,B,C sont alignés, $\varphi(M)$ est minimum quand M coïncide avec celui des 3 points A,B,C qui est situé entre les 2 autres.

Lorsque A,B,C forment un triangle :

— Si tous les angles de ce triangle ont une mesure inférieure à 120°, il existe un point $\mu$ intérieur à ce triangle tel que

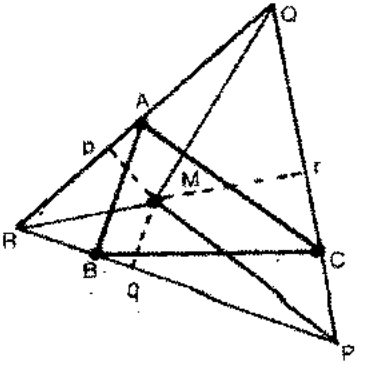
$(\widehat{\mu B, \mu C}) = (\widehat{\mu C, \mu A}) = (\widehat{\mu A, \mu B})$ et $\varphi(M)$ est minimum pour $M = \mu$.

( $\mu$ est appelé point de TORICELLI du triangle.)

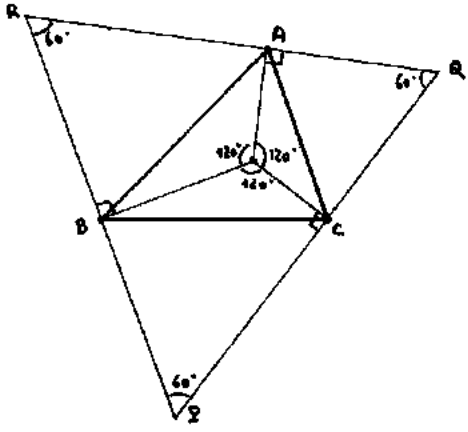
— Si l'un des angles a une mesure supérieure ou égale à 120°, $\varphi(M)$ est minimum au sommet de cet angle.

**Remarque :** Ce problème de minimisation de $MA + MB + MC$ est simultanément résolu avec le suivant :

*Trouver le triangle équilatéral PQR circonscrit à ABC dont l'aire est maximale (démonstration due à FASHBENDER (1846).*




En effet, si l'on se fixe un tel triangle PQR et si M est un point quelconque intérieur à ABC (et donc à PQR), l'aire de PQR est égale à la somme des aires de MQR, MRP, MPQ et par suite la somme $Mp + Mq + Mr$ des distances de M aux trois côtés de PQR est égale à la hauteur du triangle PQR et donc indépendante de M. Comme de plus $Mp \leqslant MA$, $Mq \leqslant MB$, $Mr \leqslant MC$, ceci permet de montrer que toute somme $M_1p_1 + M_1q_1 + M_1r_1$ est inférieure ou égale à toute somme $M_2A + M_2B + M_2C$. Par suite, s'il existe un point M en lesquels ces sommes sont égales, ce point fournit la solution des 2 problèmes et le point de TORICELLI est justement celui-là.




## Problème 2.

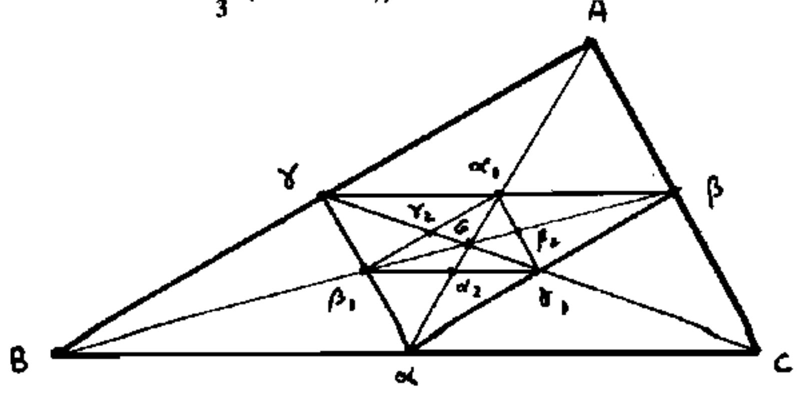
**Etude du minimum de la somme $\psi(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$**

• G étant l'isobarycentre (ou centre de gravité) des 3 points A,B,C, la relation de LEIBNIZ donne :

$$\psi(M) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$$

et par suite $\psi(M)$ est minimum lorsque M est en G.

(Si l'on note $a$, $b$, $c$, les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, ce minimum vaut $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$).



**Proposition :** Etant donnés 3 points distincts A,B,C, la somme $MA^2+MB^2+MC^2$ est minimum lorsque M est au centre de gravité du triangle ABC.

*Autre démonstration* (Ne supposant connu que le premier cas particulier de la formule de Leibniz dit *formule de la médiane,* mais utilisant un passage à la limite peut-être intéressant).

• Soient $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , les milieux de [BC], [CA], [AB].

$$\psi(M) = \frac{1}{2}\,(MB^2+MC^2+MC^2+MA^2+MA^2+MB^2)$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + M\alpha^2+M\beta^2+M\gamma^2$$

• Soient $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, les milieux de $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ ($\alpha_1 \in A\alpha$ , $\beta_1 \in B\beta$ , $\gamma_1 \in C\gamma$). Comme $\beta\gamma = \frac{a}{2}$ , $\gamma\alpha = \frac{b}{2}$ , $\alpha\beta = \frac{c}{2}$ , un calcul analogue au précédent donne :

$$\psi(M) = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{a^2+b^2+c^2}{16} + M\alpha_1{}^2+M\beta_1{}^2 + M\gamma_1{}^2$$

• Soient $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, les milieux de $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_1\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1$ ...
$\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ les milieux de $\beta_{n-1}\gamma_{n-1}$ , $\gamma_{n-1}\alpha_{n-1}$ , $\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$ .

A ce stade, on a :

$$\psi(M) = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}\left[1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n}\right] + M\alpha_n^2 + M\beta_n^2 + M\gamma_n^2$$

Passons à la limite, $n$ tendant vers $+\infty$ : $\alpha_1$ est le milieu de $A\alpha$, $\alpha_2$ celui de $\alpha\alpha_1$, $\alpha_3$ celui de $\alpha_1\alpha_2$ ..., $\alpha_n$ celui de $\alpha_{n-2}\,\alpha_{n-1}$ . Quel que soit $n$ , $\alpha_n$ est donc entre A et $\alpha$ et si $\ell$ est la longueur de $A\alpha$, celle de $A\alpha_n$ est

$$\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4}\sum_{2\le p\le n}(-1)^p\,\frac{1}{2^{p-2}}$$

Comme $\sum\limits_{2\le p\le n}(-1)^p\,\frac{1}{2^{p-2}}$ tend vers $\frac{2}{3}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ , $A\alpha_n$ tend, dans ces conditions, vers $\frac{2\ell}{3}$ et par suite $\alpha_n$ tend vers le point G de $A\alpha$ défini par $\overline{AG} = \frac{2}{3}\,\overline{A\alpha}$ .

Mais $\alpha_n\beta_n = \frac{c}{2^{n+1}}$ et $\alpha_n\beta_n = \frac{b}{2^{n+1}}$ tendent tous les deux vers zéro quand $n$ tend vers $+\infty$ , par suite $\beta_n$ et $\gamma_n$ ont la même limite G que $\alpha_n$ (ce qui redémontre (!) au passage l'existence du centre de gravité d'un triangle).

Comme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{3}$, l'expression de $\psi(M)$ prend à la limite la forme

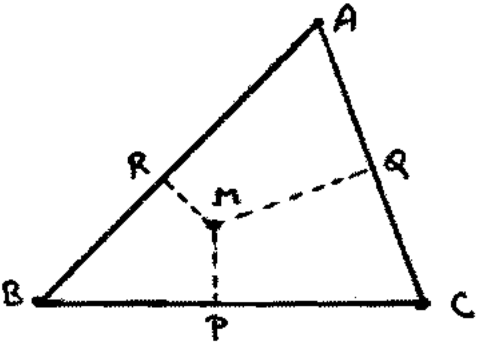
$$\psi(M) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 3MG^2$$

d'où le résultat.

## Problème 3.

**M étant intérieur au triangle ABC, P,Q,R étant les projections de M sur BC, CA, AB, étudier le maximum du produit** $\pi(M) = MP.MQ.MR$.

**Solution :** Posons $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $MP = x$, $MQ = y$, $MR = z$.




$s_1$ = aire MBC,
$s_2$ = aire MCA,
$s_3$ = aire MAB,
S = aire ABC.

On a :

$$\pi(M) = xyz = 8\,\frac{s_1 s_2 s_3}{abc}$$

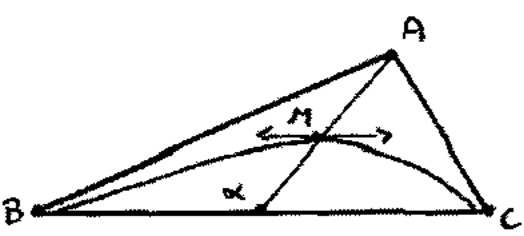
et $\pi(M)$ est donc maximum avec $s_1 s_2 s_3$ ;

or, $s_1 + s_2 + s_3 = S =$ constante.

Si l'on suppose alors que M varie de façon que $s_1$ reste constante (ce qui équivaut à $x$ constant), $s_1 s_2 s_3$ sera maximum lorsque $s_2 s_3$ le sera, c'est-à-dire lorsque $s_2 = s_3$. Par raison de symétrie, le produit $s_1.s_2.s_3$ sera donc maximum pour $s_1 = s_2 = s_3$ ($= \frac{S}{3}$).

La position correspondante de M est le point commun aux trois droites déduites de chacun des côtés dans les homothéties de rapport $\frac{2}{3}$ et centrées en chacun des sommets opposés. Ce point est le centre de gravité G du triangle ABC.

*Autre solution :*



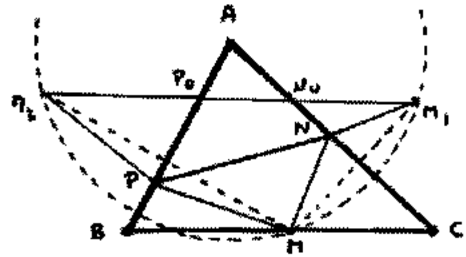

Si M varie de façon que $yz$ soit constant, M se déplace sur un arc d'hyperbole (H) ayant AB et AC pour asymptotes.

Sur cet arc d'hyperbole, $xyz$ sera maximum lorsque $x$ le sera, c'est-à-dire lorsque M sera, sur (H), au point où la tangente est parallèle à BC. Mais dans cette position une propriété diamétrale classique de l'hyperbole montre que AM passe par le milieu de BC, c'est-à-dire que AM est la médiane relative à BC. Par raison de symétrie, le maximum absolu sera donc atteint lorsque M sera le point de concours des 3 médianes.

**Proposition :** Le produit des distances d'un point M, intérieur à un triangle, aux trois côtés de ce triangle, est maximum lorsque M est au centre de gravité de ce triangle.

## Problème 4.

**M,N,P étant trois points situés respectivement sur les segments [BC], [CA], [AB] étudier le minimum du périmètre du triangle MNP.**




• *Premier cas : les trois angles du triangle ABC sont aigus.*

Si $M_1$ et $M_2$ sont les symétriques d'un point M de [BC] respectivement par rapport à CA et AB, on a $NM_1 = NM$ et $PM_2 = PM$ et par suite le périmètre du triangle MNP est égal à la longueur de la ligne brisée $M_1NPM_2$. Ce périmètre, pour M fixé sur [BC], est donc minimum lorsque N et P coïncident respectivement avec $N_0$ et $P_0$, intersections de $M_1M_2$ avec CA et AB (les hypothèses impliquent bien que $N_0$ et $P_0$ appartiennent respectivement à [CA] et [AB]). Pour minimiser ce périmètre de façon absolue, il suffit de choisir M de façon à minimiser la longueur $M_1M_2$. Or comme

$$AM = AM_1 = AM_2 \quad \text{et que} \quad \widehat{(AM_2, AM_1)} = 2\widehat{(AB, AC)} = 2\widehat{A},$$

$M_1M_2$ est une corde du cercle de centre A, de rayon AM, vue du centre de ce cercle sous l'angle $2\widehat{A}$ inférieur à un angle plat. Cette corde est donc de longueur minimum lorsque le rayon du cercle est minimum, c'est-à-dire lorsque M est situé en $\mu$, pied de la hauteur issue de A. L'unicité de ce minimum fait que, par raison de symétrie, les positions correspondantes de N et P sont les pieds $\gamma$ et $\pi$ des hauteurs issues de B et C.

Lorsque l'un des angles du triangle (par exemple $\widehat{A}$) est droit, deux des points M,N,P se confondent au sommet de l'angle droit (ici N et P en A), le troisième est le pied de la hauteur issue de l'angle droit et le périmètre minimum est deux fois la longueur de cette hauteur.

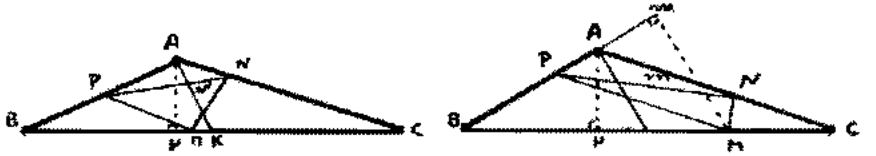
**Remarque :** Si l'on note $h_a, h_b, h_c$ les longueurs des trois hauteurs, la valeur du périmètre minimum qui est $2AM_1\sin\widehat{A}$, c'est-à-dire $2h_a\sin\widehat{A}$, vaut par raison de symétrie aussi $2h_b\sin\widehat{B}$ et $2h_c\sin\widehat{C}$.

Ces expressions sont donc égales et comme $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$ (S aire du triangle ABC), on en déduit la relation classique :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

• *Deuxième cas : L'un des angles du triangle, par exemple $\widehat{A}$, est obtus.*

Le raisonnement précédent ne s'applique plus car $N_0$ et $P_0$ n'appartiennent plus aux segments [CA] et [AB].




Etudions le cas où M appartient à [μC], le raisonnement étant analogue si M appartient à [μB].

La perpendiculaire menée par A à AB coupe BC en K appartenant à [μC].

Si M est entre μ et K, NP coupe AK en N' et l'on a :

$$\text{périmètre } MNP \geqslant \text{périmètre } MN'P.$$

Or, d'après la première partie, le périmètre de MN'P est minimum pour $M = \mu$ et $N' = P = A$.

Si M est entre K et C, on a, notant m la projection de M sur AB :

$$\text{périmètre } MNP \geqslant 2MP \geqslant 2Mm \geqslant 2AK > 2A\mu$$

Par suite, le périmètre est minimum pour $M = \mu$ et $N = P = A$ et ce minimum est deux fois la longueur de $A\mu$.

(N.B. : cette étude du cas d'un angle obtus nous a été communiquée par LAFON, de RODEZ.)

**Proposition :** Etant donnés un triangle ABC fixe et trois points variables $M \in [BC]$, $N \in [CA]$, $P \in [AB]$, le périmètre du triangle MNP est minimum

— si les 3 angles du triangle ABC sont aigus, lorsque les points M,N,P sont respectivement les pieds des 3 hauteurs.

— si l'un des angles, par exemple $\widehat{A}$, est obtus, lorsque N et P sont en A et M au pied de la hauteur issue de A.

## BIBLIOGRAPHIE

• *Mathématiques buissonnières* par A. DELEDICQ (Cedic).
• Tout livre de géométrie de Terminale C d'il y a 20 ans.