Trigonométrie et opérateurs

par Léon MARESCAUX, L.E.P. Colbert, Tourcoing

Avant propos : La commission A.P.M.E.P. "Formation continue des non enseignants" souhaite que le Bulletin publie des articles montrant des utilisations, en formation initiale, de thèmes, de méthodes... créés en formation d'adultes.

L'article qui suit est un premier exemple ; à vos plumes pour proposer au Bulletin ou à la commission d'autres exemples ; d'avance merci.

Cet article a été écrit à partir de l'expérimentation en formation initiale, classes de CAP, d'idées nées dans des groupes d'adultes préparant un CAP par unités capitalisables. Compte tenu de l'introduction des machines à calculer et de l'évolution des programmes, il peut donner des pistes pour des classes de troisième, de seconde indifférenciée et bien sûr de LEP.*

La commission "Formation Continue"

L'enseignement en formation d'adultes, grâce au travail collectif en formation de formateurs, nous a amenés à changer nos méthodes d'enseignement de la trigonométrie au niveau du CAP, tant en formation d'adultes qu'en formation initiale.

Auparavant

1ère leçon : Cosinus : abscisse du point — sinus : ordonnée du même point — puis tangente et cotangente.

Cercle trigonométrique : après avoir rappelé : angle saillant, repère orthonormé, aigu, obtus et projections.

2ème leçon : En inscrivant un triangle rectangle dans le cercle trigonométrique, on obtient les relations :

$$\text{sinus} = \frac{\text{mesure côté opposé}}{\text{mesure de l'hypo.}}, \qquad \cos = \frac{\text{mesure côté adj.}}{\text{mesure de l'hypo.}}, \text{tg...}$$

Jusque là, pas de difficulté. Les difficultés commencent dans la résolution du triangle rectangle. Il est absolument nécessaire que les élèves connaissent bien les proportions, et la propriété fondamentale des proportions (à savoir : produit des extrêmes = produit des moyens). D'où impossibilité d'aborder la trigonométrie en deuxième année. Et en début de troisième année, il faut réviser auparavant les proportions.

* **Note du Bureau** : La présence de cet article dans le *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* n'implique pas que l'Association soutienne l'expérience des CAP par unités capitalisables et du contrôle continu dans les L.E.P., ce problème délicat n'ayant pas fait l'objet des travaux de la commission L.E.P.-ENNA, ni de vote au Comité national de l'A.P.M.E.P.

Actuellement

Inutile de connaître : grandeurs orientées, cercle trigonométrique.

Tracé d'un secteur angulaire quelconque, de préférence sur papier millimétré et de 3 perpendiculaires à l'un des côtés (voir fiches distribuées aux élèves).

Tableaux de nombres et calcul de l'opérateur multiplicatif, permettant de passer de l'un à l'autre (voir fiches).

Exemple :

opérateur multiplicatif
à calculer à 0,01 près

hypoténuse	sinus	côté opposé

Le sinus est le nombre qui donne l'opérateur multiplicatif.

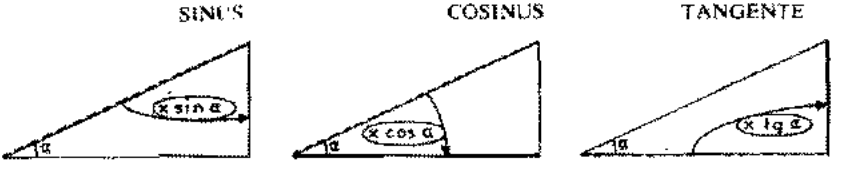
Avec la machine à calculer, c'est très facile.

Quand les mesures sont bien effectuées, et que le tracé est bien fait, à deux centièmes près, on obtient toujours le même opérateur.

Même chose ensuite pour cosinus et tangente.

On obtient les schémas suivants :

Hypoténuse	× sinus	côté opposé angle
Hypoténuse	× cos.	côté adj. angle
1 côté D	× tang.	côté opposé angle



Tous savent utiliser cette méthode, aucun problème pour calculer l'hypoténuse connaissant un angle et le côté opposé. Avec les rapports il y avait quelques difficultés. Ce qui fait que la trigonométrie a pu être introduite dès janvier en deuxième année pour répondre aux besoins des tourneurs et en lien avec l'apprentissage du linéaire. Les mêmes besoins apparaissent dans les autres sections de deuxième année de CAP de la métallurgie (angle d'affûtage, facteur de puissance, côtés sur piges, charpentes... filetages...).

Bien sûr, il est toujours nécessaire de faire un effort de mémoire pour les 3 chaînes d'opérateurs précédentes. Mais l'effort est léger, car ils ont tous trouvé les chaînes en établissant les tableaux de nombres. Tout cela n'empêchera pas de prendre ensuite en troisième année le cercle trigonométrique et d'établir les rapports $\frac{\text{sinus}}{\text{cosinus}}$, $\frac{\text{cosinus}}{\text{sinus}}$ ... et l'étude des fonctions circulaires (électriciens).

La façon d'opérer permet d'amener rapidement et clairement les notions capitales et d'aborder les problèmes pratiques très vite en faisant ainsi perdre le côté un peu ésotérique pour nos élèves des mots sinus, cosinus... La trigonométrie étudiée suffisamment tôt permet aussi une meilleure étude des forces concourantes, du plan incliné, du coefficient de frottement, dans le cours de sciences.

Ne pas ensuite tomber dans l'erreur d'appliquer la trigonométrie quand le théorème de Pythagore suffit, ne pas demander de calculer la longueur des fers nécessaires pour une charpente et remplacer le calcul par une épure.

L'expérience a prouvé qu'il est nécessaire de bien expliquer : côté opposé, côté adjacent, secteurs angulaires complémentaires et que la trigonométrie ainsi présentée devient relativement facile pour des élèves moyens et qu'ils l'utilisent ensuite pour résoudre des problèmes, même où elle n'est pas nécessaire, comme pour les triangles semblables, ce qui prouve qu'ils n'en ont plus peur.

Pour des élèves de CAP, les résultats sont clairs et directement applicables. Les prolongations sont toujours possibles et faciles pour les professions qui demandent plus de connaissances trigonométriques comme les professions de l'électricité mais dans la plupart des cas, on peut même se limiter à l'utilisation du sinus et de la tangente.

L'utilisation de la calculatrice courante exige auparavant une révision ou une étude des degrés décimaux.

Extrait d'une fiche distribuée aux élèves de CAP

PREMIERES NOTIONS DE TRIGONOMETRIE

1) Rappel

Cette construction représente deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine O. Elles déterminent un secteur angulaire saillant $[\widehat{Ox,Oy}]$ et un secteur angulaire rentrant (ombré).

Un secteur angulaire se mesure en degrés ou en grades. $1° = 60'$ et $1\ \text{gr} = 10\ \text{dgr}$. On emploiera souvent les degrés décimaux.

Exemples :

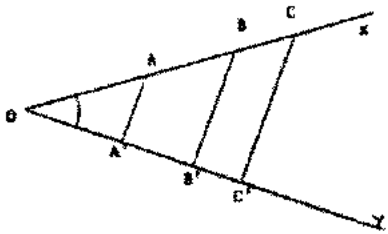
$$52°30' = \left(52 + \frac{30}{60}\right)^\circ = 52{,}5°$$

$$52°22' = \left(52 + \frac{22}{60}\right)^\circ \approx 52{,}36°$$

Complétez : $42°40' =$

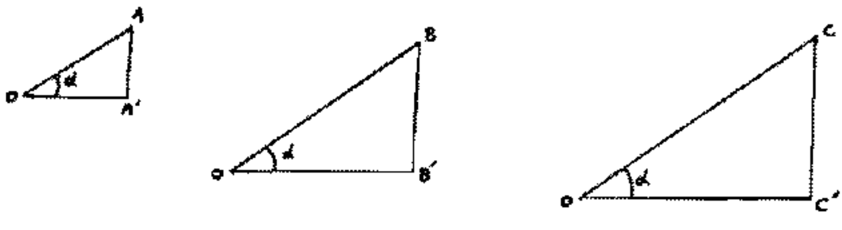
2) Relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle

A partir de 3 points quelconques A, B et C pris sur un côté du secteur angulaire ci-contre, on abaisse trois perpendiculaires sur l'autre côté du secteur.



On peut dire que les trois points A', B' et C' sont les projections orthogonales de A, B et C.

On obtient trois triangles rectangles :



Sur leurs côtés respectifs, reportons les mesures prises sur la construction précédente (mesures prises à un demi-millimètre près).

Dans un triangle rectangle, le côté opposé au secteur angulaire droit s'appelle hypoténuse. Dans les trois triangles, le point O est associé au même angle α.

Calculez les opérateurs suivants au centième près le plus proche.

Hypoténuse		Côté opposé à l'angle α
OA =	$\times$ →	AA' =
OB =	$\times$ →	BB' =
OC =	$\times$ →	CC' =

Cet opérateur s'appelle le .... de l'angle α

$$\sin \alpha = \frac{\text{mes. du } \ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{mes. de } \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Hypoténuse		Côtéadjacent à l'angle α
OA =	$\times$ →	OA' =
OB =	$\times$ →	OB' =
OC =	$\times$ →	OC' =

Cet opérateur s'appelle le .... de l'angle α

$$\cos \alpha = \frac{\text{mes. du } \ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{mes. de } \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Côtéadjacent à l'angle α		Côté opposé à l'angle α
OA' =	$\times$ →	AA' =
OB' =	$\times$ →	BB' =
OC' =	$\times$ →	CC' =

Cet opérateur s'appelle la .... de l'angle α

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{mes. du } \ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{mes. du } \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

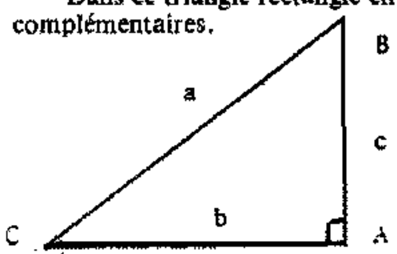
Côté opposé à l'angle α		Côté opposé à l'angle α
AA' =	$\times$ →	OA' =
BB' =	$\times$ →	OB' =
CC' =	$\times$ →	OC' =

Cet opérateur s'appelle la .... de l'angle α

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{mes. du } \ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{mes. du } \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

3) Angles complémentaires

Dans ce triangle rectangle en A, les secteurs angulaires saillants sont complémentaires.



$\sin \hat{C} =$ ______ $\quad \sin \hat{B} =$ ______

$\cos \hat{C} =$ ______ $\quad \cos \hat{B} =$ ______

$\text{tg } \hat{C} =$ ______ $\quad \text{tg } \hat{B} =$ ______

$\text{cotg } \hat{C} =$ ______ $\quad \text{cotg } \hat{B} =$ ______

Le sinus d'un angle est égal au ....

La tangente d'un angle est égale à ....

4) Calculez : (en utilisant les opérateurs trouvés précédemment)

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \qquad \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

En utilisant les mêmes opérateurs, calculez :

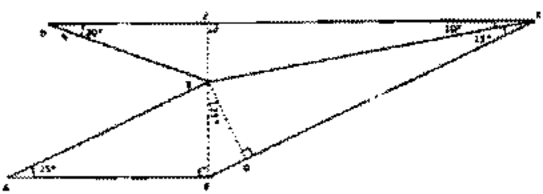
$\sin^2\alpha =$ et $\cos^2\alpha =$ puis $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$

En déduire les formules liant $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{cotg}\alpha$.

Exemples d'activités

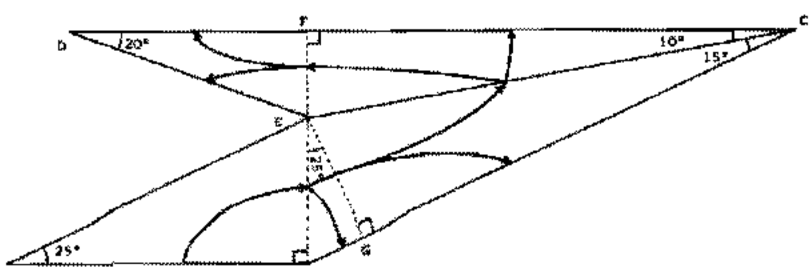
Ces fiches sont complétées par des fiches d'exercices divers, l'idée importante est d'écrire les opérateurs trigonométriques directement dans la figure et donc de se ramener à une chaîne de calculs sur machine, au lieu de manier des égalités de rapports.

Exemple extrait de la brochure A.P.M.E.P. "Mathématiques pour la formation d'adultes" (CUEEP)

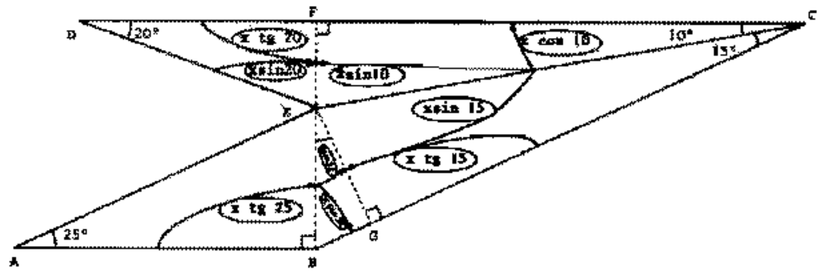


Peut-on trouver en une seule chaîne de calculs la longueur DE en partant des 24 cm de AB ?

1ère étape : balisage du chemin à suivre.



2ème étape : identification des opérateurs.



Pour trouver DE :

$\boxed{AB} \rightarrow \times\, tg25 \rightarrow \times\, cos25 \rightarrow :\, sin15 \rightarrow \times\, sin10 \rightarrow :\, sin20 \rightarrow \boxed{DE}$

Sur une machine à calculer :

24 × 25 tg × 25 cos : 15 sin × 10 sin : 20 tg =

D'autres exemples d'utilisation de cette méthode se trouvent dans la brochure.

Pour terminer, donnons un exemple à partir d'un problème d'atelier :

LES QUEUES D'ARONDE

L'ouvrier qui usine une queue d'aronde au tour doit, à chaque passe, vérifier s'il atteint les cotes a et b imposées.

La mesure des cotes a et b ne peut se faire directement, aussi utilise-t-on des piges.

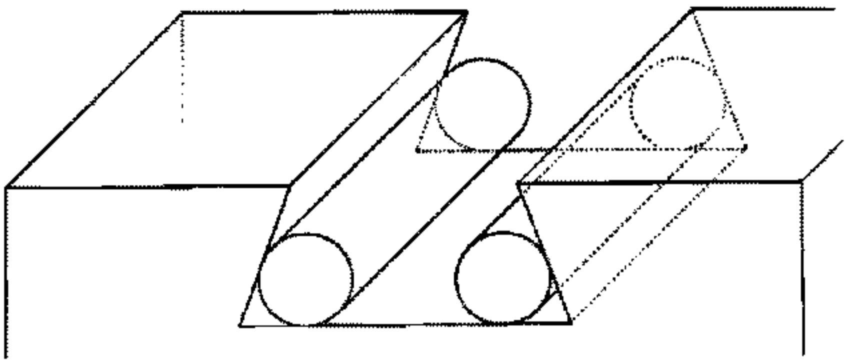
Dans le cas proposé, l'angle α vaut 70° (en général on prend des angles de 60°). Les piges utilisées ont 20 mm de diamètre. $h = 30$ mm .

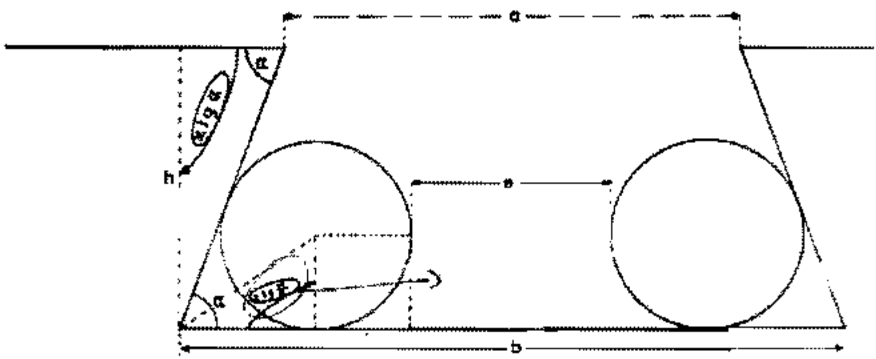
1er problème : $e = 22$ mm $\qquad a = ?$ $\boxed{}$

$b = ?$ $\boxed{}$

2e problème : a doit être égal à 50 mm.
Quelle valeur de e faut-il viser ? $\boxed{}$

3e problème : b doit être égal à 73 mm.
Quelle doit être la valeur de e ? $\boxed{}$





Réponses parmi

35,2

37,83

39

38,99

34,16

71,84

56