

Algorithmique et mathématique : une utilisation systématique de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques en quatrième

par C. BANA, G. DUFOURD, B. DURAND, B. JARAY,
I.N.R.P. et IREM de Lorraine

Dans le cadre de la recherche menée sur l'introduction de l'informatique dans l'enseignement des disciplines du second degré, il nous semble difficile d'évaluer l'impact de cette nouvelle démarche tant qu'elle n'est utilisée que de façon ponctuelle dans un ou deux chapitres du programme, le reste du cours gardant sa forme traditionnelle.

Nous nous sommes donc donné comme objectif de couvrir l'ensemble du programme d'une classe : nous avons retenu celui de quatrième.

Nous avons alors cherché, pour chaque notion mathématique à introduire, une approche informatique qui soit une aide effective à sa compréhension. Ceci permet d'éviter de "faire de l'informatique" mais d'utiliser la démarche et les outils informatiques pour mieux assimiler l'esprit et les notions mathématiques.

Puis, nous avons choisi un exemple de progression qui permette d'intégrer, de manière cohérente et pédagogique, l'initiation informatique à la formation mathématique.

Le résultat de ce travail a été publié par l'IREM de Lorraine sous le titre *Algorithmique et Mathématique* avec le sommaire suivant :

Notions mathématiques

- Simplifications d'écriture dans \mathbb{D}
- Composition des applications
- Valeur absolue
- Puissances entières d'un nombre décimal
- Puissances entières de dix
- Relations - Applications - Bijections
- Equations
- Géométrie de la droite
- Vecteurs

Notions informatiques

- Analyse et algorithme
Traitement séquentiel
- Procédure (utilisation)
Traitement itératif simple
- Traitement conditionnel
- Traitement itératif sur une suite récurrente (variable informatique)
- Traitement itératif avec test d'arrêt
- Instructions conditionnelles imbriquées
- Procédures

I - Contenu informatique :

Beaucoup des recherches menées jusqu'à présent dans le cadre de l'I.N.R.P. utilisent l'informatique sous forme d'enseignement assisté par l'ordinateur à partir de programmes conçus par les enseignants. Nous avons préféré que les élèves cherchent, écrivent et programment eux-mêmes des algorithmes de leur cours de mathématiques. Nous pensons que ceci contribue à leur formation : rechercher un algorithme apprend à raisonner, le programmer et l'exécuter développe la rigueur et le sens du calcul. D'autre part, cela aide à démythifier l'ordinateur.

Nous leur proposons d'utiliser une méthode de programmation structurée qui nous paraît plus adaptée à la phase de recherche que des organigrammes. L'exemple suivant permet d'en donner un rapide aperçu.

On se propose de calculer le montant d'une livraison de fuel sachant que le prix du litre de fuel est de 0,98 F et que la livraison est facturée à 1,50 F par kilomètre parcouru.

1) On commence par déterminer le résultat final auquel on associe un identificateur explicité dans le lexique.

lexique	définitions
M : montant de la facture	<i>résultat</i> : M

2) On exprime la formule qui donne ce résultat à l'aide d'autres identificateurs que l'on note dans le lexique.

lexique	définitions
M : montant de la facture PF : prix du fuel PL : prix de la livraison	<i>résultat</i> : M $M = PF + PL$

3) On exprime de même les formules qui donnent les résultats intermédiaires (représentés par les identificateurs du lexique) jusqu'à ce que tous les identificateurs soient définis, un cas particulier de définition étant celui où l'identificateur est une donnée.

lexique		définitions
M : montant de la facture	6	<i>résultat</i> : M
	5	$M = PF + PL$
PF : prix du fuel	2	$PF = 0,98 \times NL$
PL : prix de la livraison	4	$PL = 1,50 \times NK$
NL : nombre de litres achetés	1	NL : <i>donnée</i>
NK : nombre de kilomètres parcourus	3	NK : <i>donnée</i>

4) On numérote les définitions dans l'ordre dans lequel elles doivent être effectuées.

On obtient ainsi un algorithme du problème étudié. Cet algorithme est ensuite traduit en un langage de programmation en vue de son exécution sur ordinateur. Nous avons retenu le L.S.E. qui est le langage généralement utilisé pour les mini-ordinateurs équipant actuellement certains lycées. Il est cependant important de remarquer que tout autre langage convient également, notamment le BASIC utilisé actuellement pour les micro-ordinateurs en cours d'implantation dans certains établissements scolaires.

II - Présentation retenue.

A partir des leçons que nous avons expérimentées dans nos classes, nous avons rédigé des fiches destinées au professeur.

Pour faciliter l'adaptation de ces fiches aux méthodes de chaque enseignant et au niveau de ses élèves, nous proposons :

- au début de chaque chapitre, une synthèse des objectifs mathématiques retenus et des notions informatiques utilisées.
- à chaque étape, des conclusions (définitions, propriétés) à dégager avec les élèves et à prolonger éventuellement puisque nous n'avons pas développé les parties classiques de ces leçons.
- au fur et à mesure des exercices, des commentaires destinés au professeur pour éclairer notre démarche (il en est de même des réponses qui ne sont pas nécessairement les seules à retenir) et des remarques qui font allusion à des difficultés rencontrées lors de l'expérimentation.

Nous espérons que cette présentation permettra de percevoir ce que nous avons effectivement fait dans nos classes tout en restant un document utilisable par d'autres que nous.

Nous joignons, en annexe, un extrait de fiche.

III - Conclusion.

Bien que travaillant dans des conditions défavorables (établissements non équipés, donc d'autant plus de difficultés matérielles pour accéder à l'ordinateur), l'utilisation de cette démarche dans nos classes nous a apporté la satisfaction de voir tous les élèves, de niveaux très différents, s'y intéresser afin d'utiliser ce nouvel outil pédagogique qu'est l'ordinateur.

Si certains chapitres nous ont paru longs à traiter, nous avons toujours terminé nos programmes scolaires : nous rattrapions le temps "perdu" parce que les élèves avaient bien assimilé ces notions qu'ils avaient élaborées par eux-mêmes. Leur intérêt n'a jamais baissé et beaucoup d'entre eux n'ont pas hésité à faire des heures supplémentaires sur l'ordinateur.

Avec les programmes de 1979, la progression proposée est évidemment à reprendre, mais les idées contenues dans les différents chapitres demeurent valables. Cette restructuration pourrait d'ailleurs être l'occasion de travailler dans le même esprit au niveau d'autres classes et ainsi couvrir l'ensemble des programmes de mathématiques.



Annexe : Extrait d'une fiche

Simplifications d'écriture dans \mathbb{D}

- *Objectifs mathématiques.*

Cette leçon, qui se place en début de classe de quatrième dans le cadre des révisions des opérations dans \mathbb{D} , a pour but de faire le point sur les différentes règles de simplification d'écriture, et non de simplification des calculs par une minimisation du nombre d'opérations à effectuer. Il y a donc lieu de compléter ces révisions par l'étude des propriétés des opérations qui n'ont pas été retenues dans ce chapitre.

- *Progression informatique.*

Cette leçon permet une initiation à la programmation, en L.S.E. par exemple, à l'aide de la méthode d'analyse déductive pour laquelle les exercices du premier paragraphe notamment fournissent une bonne introduction.

I — Utilisation des parenthèses dans une expression mathématique

• Objectifs.

(A) Avant de récapituler les différentes règles de simplification d'écriture des expressions mathématiques, il nous paraît indispensable de sensibiliser les élèves au rôle des parenthèses.

Nous leur proposons donc une série de petits problèmes à étudier en différentes étapes que nous allons illustrer à l'aide d'un d'entre eux :

Les 30 élèves d'une classe ont créé une coopérative pour organiser un voyage de fin d'année. Une entreprise de location de cars leur propose le tarif suivant : 200 F de frais fixes augmentés de 0,4 F par kilomètre parcouru. Elle leur accorde une réduction si le voyage a lieu avant le 30 juin, et ils n'auront alors à payer que 70 % du prix normal du transport.

Au prix du transport s'ajoute le prix de pension dans une auberge de jeunesse.

Le voyage ayant lieu au cours du mois de juin, il s'agit de calculer le prix de revient total V du voyage pour une auberge distante de D kilomètres, au prix de pension de P francs par jour et par personne et pour une durée de J jours passés à l'auberge.

Nous demandons successivement aux élèves de :

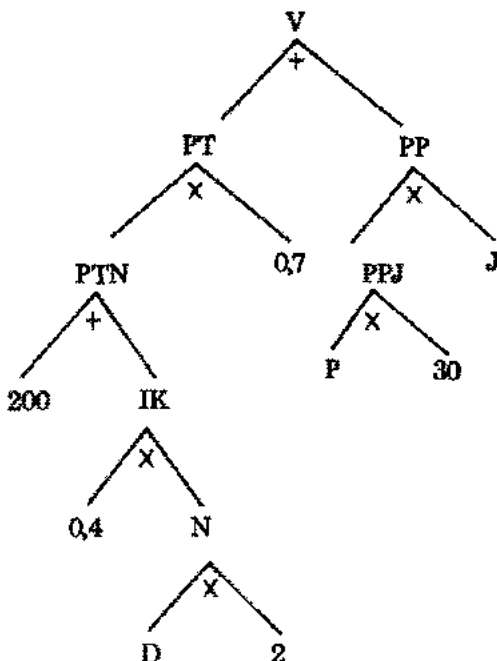
- (1) donner un algorithme de résolution dans lequel ils s'imposent de ne faire figurer qu'une seule opération à chaque ligne.

Algorithme proposé :

lexique		définitions
V : prix du voyage	11	résultat : V
PT : prix du transport	10	$V = PT + PP$
PP : prix de pension	5	$PT = PTN \times 0,70$
PTN: prix normal du transport	9	$PP = PPJ \times J$
PPJ : prix de pension par journée		
J : nombre de jours passés à l'auberge	4	$PTN = 200 + 1K$
	7	$PPJ = P \times 30$
IK : frais dus aux kilomètres parcourus	8	J : donnée
	3	$IK = 0,4 \times N$
P : prix de pension par jour et par personne	6	P : donnée
	2	$N = D \times 2$
N : nombre de kilomètres parcourus		
	1	D : donnée
D : distance de l'auberge		

- (1') représenter cet algorithme à l'aide d'un arbre afin de visualiser l'ordre d'exécution des différentes expressions lors du déroulement du calcul.

Représentation à l'aide d'un arbre de l'algorithme précédent :



- (2) transcrire cet arbre, dont la manipulation ne correspond pas aux habitudes d'écriture, en une phrase linéaire à l'aide de parenthèses : à chaque ligne de l'algorithme, c'est-à-dire à chaque nœud de l'arbre, correspond le résultat entre parenthèses.

Expression parenthésée :

$$V = ((200 + (0,4 \times (D \times 2))) \times 0,70) + ((P \times 30) \times J)$$

- (3) évaluer, pour différentes valeurs numériques données, cette expression totalement parenthésée.

Exemple :

Les organisateurs hésitent entre deux auberges :

- dans la première, située à 150 km, le prix de pension s'élève à 13,50 F et
- dans la seconde, distante de 190 km, il est de 11 F.

La durée du séjour étant fixée à 2 jours, quelle est la solution la moins onéreuse ?

Prix du voyage si l'on choisit la première auberge :

$$\begin{aligned}
 V &= ((200 + (0,4 \times (150 \times 2))) \times 0,70) + ((13,50 \times 30) \times 2) \\
 &= ((200 + (0,4 \times 300)) \times 0,70) + (405 \times 2) \\
 &= ((200 + 120) \times 0,70) + 810 \\
 &= (320 \times 0,70) + 810 \\
 &= 224 + 810 \\
 &= 1034
 \end{aligned}$$

Prix du voyage si l'on choisit la deuxième auberge :

$$\begin{aligned}
 V &= ((200 + (0,4 \times (190 \times 2))) \times 0,70) + ((11 \times 30) \times 2) \\
 &= ((200 + (0,4 \times 380)) \times 0,70) + (330 \times 2) \\
 &= ((200 + 152) \times 0,70) + 660 \\
 &= (352 \times 0,70) + 660 \\
 &= 246,40 + 660 \\
 &= 906,40
 \end{aligned}$$

Donc, le séjour dans la deuxième auberge revient le moins cher.

Remarques :

- Le fait d'imposer l'utilisation d'une seule opération à chaque ligne de l'algorithme donné à l'étape (1) peut être justifié par l'utilisation d'une calculatrice de poche pour effectuer les calculs.
- Il faut veiller à ce que les élèves respectent bien l'ordre des termes de l'algorithme obtenu à l'étape (1) lors de sa transcription sous forme d'arbre ou d'expression parenthésée.
- Il est bon de faire vérifier systématiquement que, dans l'expression parenthésée obtenue en (2), il y a autant de parenthèses "gauches" que de parenthèses "droites".
- Les expressions totalement parenthésées obtenues à l'étape (2) seront simplifiées ultérieurement.

ⓑ L'utilisation d'un ordinateur permet de compléter l'étude de ce paragraphe en demandant aux élèves de :

(1) traduire en L.S.E. l'algorithme obtenu à l'étape (1).

Programme L.S.E. correspondant :

1	LIRE D	7	PPJ - P * 30
2	N - D * 2	8	LIRE J
3	IK - 0.4 * N	9	PP - PPJ * J
4	PTN - 200 + IK	10	V - PT + PP
5	PT - PTN * 0.70	11	AFFICHER V
6	LIRE P	12	TERMINER

- (2) écrire un programme en L.S.E. effectuant les calculs en utilisant directement l'expression parenthésée obtenue à l'étape (2).

Programme L.S.E. correspondant à l'expression parenthésée obtenue :

```

1  LIRE D , P
2  V ← ((200 + (0,4 * (D * 2))) * 0,70) + ((P * 30) * J)
3  AFFICHER V
4  TERMINER

```

- (3) comparer les résultats obtenus par l'exécution de ces deux programmes pour les différentes valeurs numériques données à l'étape (3). Cette comparaison permet aux élèves de contrôler eux-mêmes l'exactitude de leur travail.

Remarque :

Si les élèves font lister le programme écrit en (2), ils obtiendront une expression déjà simplifiée. Le professeur peut utiliser leurs remarques à ce sujet pour introduire le deuxième paragraphe de cette leçon.

II — Règles de suppression de symboles (parenthèses et signes opératoires) pour les opérations binaires.

▪ Objectifs.

Comme le montrent les exercices du premier paragraphe, l'écriture totalement parenthésée d'une expression est lourde. Nous nous proposons donc de faire le bilan des différentes règles qui permettent de simplifier cette écriture, en ne considérant, dans ce deuxième paragraphe, que des opérations binaires : addition, soustraction et multiplication. On peut d'ailleurs invoquer également l'élevation à une puissance et la division dans \mathbb{R} si ces opérations sont connues des élèves.

Il nous semble important d'attirer l'attention des élèves sur le fait que ces simplifications sont dues pour certaines, la règle 1 par exemple, aux propriétés des opérations et sont par conséquent "immuables", alors que d'autres, la règle 2 par exemple, ne sont que des conventions d'écriture qui pourraient changer en adoptant un autre type de notations.

etc.

*
* * *

Les exemplaires du fascicule "Algorithmique et Mathématique" sont à votre disposition à l'IREM de Lorraine - Université de NANCY I - C.O. 140, Boulevard des Aiguillettes - 54037 NANCY CEDEX, au prix de 15 F + (frais d'envoi : 8 F) = 23 F.

Pour une commande inférieure à 50 F, nous vous serions reconnaissants de bien vouloir joindre le montant en timbres-poste.

Pour les enseignants de l'Académie de NANCY-METZ, les publications sont gratuites, sauf les frais d'envoi remboursables en timbres-poste.