Bulletin de l'APMEP n°325 - Septembre 1980

A propos des relations de Durrande dans le tétraèdre

par Jean-Charles HECQUET, Pau

Dans les "Exercices de Géométrie" par F.G.M. (Librairies Mame et de Gigord), 6e Edition (1920) on trouve les indications suivantes :

Jean-Baptiste Durrande, professeur de Physique au Collège Royal de Cahors, né en 1797, mort en 1825, à peine âgé de 28 ans, a publié en 1823 dans les Annales de Gergonne le théorème suivant :

Théorème.

Dans un tétraèdre quelconque, la distance d des centres des sphères inscrite (rayon r) et circonscrite (rayon R) est donnée par la formule :

$$d^2 = (R - r)^2 - 4r^2$$

Cette formule, connue sous le nom de Relation de Durrande, paraît très séduisante, parce qu'elle a l'air de généraliser d'une façon très simple une relation analogue pour le triangle, appelée relation d'Euler, et qui, elle, est parfaitement exacte :

$$d^2 = (R - r)^2 - r^2$$

Malheureusement la relation de Durrande ne s'applique pas au tétraèdre quelconque. Nous allons le montrer sur un exemple particulier en prenant un tétraèdre T = ABCD dont les carrés des arêtes a = BC, b = CA, c = AB, a' = DA, b' = DB, c' = DC ont les valeurs suivantes :

$a^2 = 19 \qquad b^2 = 13 \qquad c^2 = 7 \qquad a'^2 = 21 \qquad b'^2 = 28 \qquad c'^2 = 37$

Ce tétraèdre existe réellement, c'est-à-dire que dans chacun des triangles qui forment ses 4 faces, on vérifiera facilement qu'un côté quelconque est compris entre la différence et la somme des 2 autres côtés.

Il n'est ni régulier, ni équifacial, ni orthocentrique, ni isodynamique, c'est-à-dire qu'il n'appartient à aucune des catégories principales qui sont les seules à être signalées dans les ouvrages de Géométrie élémentaire.

Mais, bien sûr, les valeurs numériques de a^2, b^2, c^2, a'^2, b'^2, c'^2 n'ont pas été écrites au hasard. Elles ont été choisies soigneusement de façon à obtenir pour les aires des faces des valeurs proportionnelles à des nombres *rationnels*. On a, en effet, si l'on appelle respectivement S_a, S_b,

S_c, S_d, les surfaces des triangles DBC, DCA, DAB, ABC, et si l'on applique la formule classique faisant connaître la surface d'un triangle en fonction de ses 3 côtés :

$$\frac{S_a}{26} = \frac{S_b}{19} = \frac{S_c}{14} = \frac{S_d}{11} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

d'où
$$S_a + S_b + S_c + S_d = \frac{35\sqrt{3}}{2}$$

Or on sait que le rayon r de la sphère inscrite dans T est donné par la formule :

$$r\,(S_a + S_b + S_c + S_d) = 3V \quad \text{(V étant le volume de T)}$$

Reste à calculer V. Dans le cas particulier numérique que nous avons choisi, il y a une formule rapide que connaissent sans doute les "initiés" :

$16V^2 = \alpha\beta\gamma\delta\,(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + \delta\alpha + \delta\beta + \delta\gamma)$ avec $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$

De toute façon la formule normale :

$144V^2 = \Sigma(a^2 + a'^2)(b^2b'^2 + c^2c'^2 - a^2a'^2) - a^2b'^2c'^2 - b^2c'^2a'^2 - c^2a'^2b'^2 - a^2b^2c^2$

conduit, avec des calculs numériques un peu plus longs, au même résultat :

$$2\,V^2 = 105 \qquad \text{d'où} \qquad 35\,r^2 = 18$$

Pour le rayon R de la sphère circonscrite, nous utiliserons la formule connue :

$$(24RV)^2 = 2\Sigma b^2b'^2c^2c'^2 - \Sigma a^4a'^4$$

ce qui donne $90R^2 = 973$ d'où l'on déduit :

$$25R^2r^2 = 139 \qquad \text{soit} \qquad 5Rr = \sqrt{139}\,.$$

Enfin, pour la distance d entre le centre O de la sphère circonscrite et le centre I de la sphère inscrite, nous avons le choix entre la formule :

$$(\Sigma S_a)^2\,(R^2 - d^2) = \Sigma a^2 S_b S_c + \Sigma a'^2 S_d S_a$$

basée sur l'évaluation de la puissance de I (coordonnées barycentriques S_a, S_b, S_c, S_d) par rapport à la sphère circonscrite (d'équation $\Sigma a^2\eta\zeta + \Sigma a'^2\theta\xi = 0$) et la formule simplifiée valable pour le tétraèdre particulier qui nous occupe :

$$4(R^2 - d^2)\,\Sigma_2 = 2\Sigma_1\Sigma_3 - 5\alpha\beta\gamma\delta$$

avec

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta \quad ; \quad \Sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + \delta\alpha + \delta\beta + \delta\gamma \quad ;$$
$$\Sigma_3 = \delta\beta\gamma + \delta\gamma\alpha + \delta\alpha\beta + \alpha\beta\gamma$$

L'une ou l'autre conduit au résultat suivant :

$$7(R^2 - d^2) = 44$$

Or, si la relation de Durrande était valable pour un tétraèdre quelconque, elle le serait en particulier pour le tétraèdre que nous avons choisi.

Dans cette relation qui peut s'écrire :

$$R^2 - d^2 - 3r^2 = 2Rr$$

nous aurions un premier membre rationnel et un second membre qui ne l'est pas. L'égalité est donc impossible.

Ayant ainsi, sur un exemple particulier, mis en échec la fameuse Relation de Durrande, nous avons cherché à savoir comment J.B. Durrande l'avait établie.

A ce propos, il est curieux de constater que dans les grands Traités de Géométrie qui étaient classiques il y a une soixantaine d'années (Hadamard, Grévy, Guichard, et même Rouché et de Comberousse dont la Note IV est un timide essai de Géométrie du Tétraèdre), il n'est fait mention nulle part de la Relation de Durrande. Et dans les "Exercices de Géométrie"(1) cités plus haut, l'auteur anonyme F.G.M. ne fait que citer la relation sans en donner aucune démonstration.

Celle-ci se trouve dans les Annales de Gergonne à la page 56 du Tome XIV. Elle repose sur l'affirmation suivante :

"Un cône de révolution qui a son sommet sur une sphère recoupe cette sphère suivant un cercle".

Or, cette affirmation est erronée. Elle n'est vraie que si l'axe du cône est un diamètre de la sphère, ce qui restreint singulièrement le domaine d'application de la Relation de Durrande.

Finalement, celle-ci n'est applicable qu'aux tétraèdres qui sont à la fois orthocentriques et isodynamiques, c'est-à-dire dans lesquels on a :

$a = b = c$ et $a' = b' = c'$ avec $a < 2a'$, soit $4a'^2 - a^2 > 0$

Dans ces conditions, on a :

$$16S_a^2 = 16S_b^2 = 16S_c^2 = a^2(4a'^2 - a^2) = \frac{a^2x^2}{3}$$

en posant $x^2 = 3(4a'^2 - a^2)$

$$\text{et} \quad 16S_d^2 = 3a^4, \quad \text{soit} \quad 4S_a = \frac{ax}{\sqrt{3}}, \quad 4S_d = a^2\sqrt{3}$$

$$\text{et} \quad 4(S_a + S_b + S_c + S_d) = a(x+a)\sqrt{3}.$$

Ensuite : $$144V^2 = a^4(3a'^2 - a^2) = \frac{a^4(x^2 - a^2)}{4}.$$

(1) L'ouvrage de F.G.M. est excellent, car il contient une foule de renseignements géométriques, historiques et bibliographiques intéressants. D'autre part, on n'y trouve guère plus de 2 ou 3 théorèmes faux, ce qui est très peu sur un total de 1300 pages.

D'où $\quad r^2 = \dfrac{a^2(x-a)}{12(x+a)}$

Et $\quad R^2 = \dfrac{3a'^4}{x^2-a^2}$

D'où $\quad 2Rr = \dfrac{aa'^2}{x+a}$ et $2Rr+3r^2 = \dfrac{ax(x+3a)}{12(x+a)}$

D'autre part $\quad (\Sigma S_a)^2(R^2-d^2) = 3S_d(a^2S_a+a'^2S_d)$,

soit $\quad R^2-d^2 = \dfrac{ax(x+3a)}{12(x+a)}$

Il vient donc $\quad R^2-d^2 = 2Rr+3r^2$, soit $d^2 = (R-r)^2-4r^2$

Remarque : Dans le même article des Annales de Gergonne, J.B. Durrande, croyant pouvoir généraliser la deuxième formule d'Euler :

$$d_a^2 = (R+r_a)^2 - r_a^2$$

qui s'applique aux cercles ex-inscrits dans un triangle, donne aussi la relation

$$d_a^2 = (R+r_a)^2 - 4r_a^2$$

qui, selon lui, s'appliquerait aussi à la distance $d_a = OI_A$ entre le centre O de la sphère circonscrite et le centre I_A de la sphère ex-inscrite de rayon r_a.

Naturellement, cette formule est fausse pour un tétraèdre quelconque, et pour les raisons indiquées précédemment.

Dans l'exemple numérique que nous avons choisi, les expressions telles que :

$$d_a^2 - R^2 + 3r_a^2$$

sont rationnelles, tandis que Rr_a, Rr_b, Rr_c, Rr_d ne le sont pas. On a, en effet,

$$9Rr_a = 7\sqrt{139}\ ,\ 16Rr_b = 7\sqrt{139}\ ,\ 21Rr_c = \sqrt{139}\ ,\ 24Rr_d = 7\sqrt{139}$$

Dans le cas du tétraèdre spécial où on a : $a=b=c$ et $a'=b'=c'$, cette formule est également fausse pour les sphères ex-inscrites centrées en I_A, I_B, I_C . Par contre, pour la sphère centrée en I_D et *pour celle-là seulement*, on a bien :

$$d_d^2 = (R+r_d)^2 - 4r_d^2$$

En effet :

$$4(S_a+S_b+S_c-S_d) = a(x-a)\sqrt{3} \quad \text{d'où} \quad r_d^2 = \frac{a^2(x+a)}{12(x-a)}$$

Et $\quad 2Rr_d = \dfrac{aa'^2}{x-a}$. $\quad$ D'où :

$$2Rr_d - 3r_d^2 = \frac{a(4a'^2-ax-a^2)}{4(x-a)} = \frac{ax(x-3a)}{12(x-a)}$$

D'autre part, en évaluant la puissance de I_D par rapport à la circumsphère, on a :

$$(3S_a - S_d)^2 \, (d_d^2 - R^2) = 3S_d(a'^2S_d - a^2S_a)$$

soit

$$d_d^2 - R^2 = \frac{ax(12a'^2 - 4ax)}{12(x-a)^2} = \frac{ax(x^2 - 4ax + 3a^2)}{12(x-a)^2} = \frac{ax(x-3a)}{12(x-a)}$$

D'où :

$$d_d^2 - R^2 = 2Rr_d - 3r_d^2 \,, \quad \text{soit finalement} \quad d_d^2 = (R + r_d)^2 - 4r_d^2$$

L'erreur "accidentelle" commise par J.B. Durrande sur les conditions d'application de ses 2 relations n'empêche pas de le considérer comme un grand géomètre, car il a établi d'autres formules inédites à son époque et qui ne prêtent à aucune critique.

Il est seulement regrettable que cette erreur n'ait pas été signalée dès la parution de l'article en 1823.

Note succincte sur Jean-Baptiste DURRANDE

Né à Marmande en 1797 et mort à Marseille en février 1825 à l'âge de 28 ans, J.B. Durrande fut professeur de physique au Collège Royal de Cahors. Ayant appris les mathématiques sans autre secours que celui des livres (selon Gergonne), il écrivit de nombreux et intéressants articles, dont certains remarquables pour l'époque, dans les "Annales de Gergonne", importante publication qui comprend 21 volumes des années 1810 à 1831.

Citons en particulier les volumes suivants :

Tome V (1814-15) qui semble avoir publié les premiers travaux du jeune géomètre, alors qu'il n'était âgé que de 17 ans. Il avait résolu les problèmes suivants :

page 295 : Construire 3 cercles C_1, C_2, C_3 tels que C_1 touche C_2 et C_3 en 2 points donnés et que C_2 et C_3 soient tangents entre eux et tangents à une droite donnée.

page 301 : Si 3 cercles tangents 2 à 2 et centrés en A, B, C, ont pour rayons *a, b, c*, le cercle qui passe par les 3 points de contact a pour rayon :

$$r = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

et celui qui passe par A, B, C a pour rayon :

$$R = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{4\sqrt{abc(a+b+c)}}$$

Si 4 sphères sont telles que chacune est tangente aux 3 autres, les 6 points de contact appartiennent à une même sphère.

page 304 : Si les arêtes a, b, c, a', b', c', d'un tétraèdre T vérifient les relations :

$$a+a' = b+b' = c+c'$$

les 4 cercles inscrits dans les faces de T appartiennent à une même sphère tangente aux 6 arêtes de T.

Tome VI (1815-16)

page 46 : J.B. Durrande démontre la réciproque du théorème de Pitot : "Dans tout quadrilatère circonscrit, la somme de 2 côtés opposés est égale à la somme des 2 autres côtés".

pages 49 et 52 : Il étend ce théorème et sa réciproque au quadrilatère gauche et au quadrilatère sphérique.

Tome XII (1821-22)

page 168 : Il démontre que de tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipse, les axes ont la somme minima et les diamètres égaux la somme maxima.

page 321 : Il indique une propriété élémentaire relative aux cercles connus actuellement sous le nom de cercles d'Hamilton.

Tome XIV (1823-24)

pages 46-48 : Il donne une solution géométrique du Problème de Castillon : "Inscrire dans un cercle donné un triangle dont les côtés passent par 3 points donnés".

page 56 : Il énonce un théorème devenu classique *(Théorème de Durrande)* : "En désignant par O le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, I celui de la sphère inscrite, I_A celui d'une sphère ex-inscrite, en appelant R, r, r_a les rayons de ces 3 sphères, et en posant : $OI = d$ et $OI_A = d_a$, on a :

$$d^2 = (R-r)^2 - 4r^2 \qquad \text{et} \qquad d_a{}^2 = (R+r_a)^2 - 4r_a{}^2$$

Ce théorème devait, dans la pensée de l'auteur, généraliser celui d'Euler relatif au triangle, mais malheureusement il ne s'applique pas au tétraèdre quelconque.

pages 309 et 313 : "Si un cercle ex-inscrit de centre I_A touche les côtés d'un triangle ABC en $a,b,c,$ les droites joignant I_A aux milieux des côtés du triangle ABC passent respectivement par les milieux de Aa, Bb, Cc.

Tome XV (1824-25)

page 133 : Article sur les nombreuses propriétés dont jouit le quadrilatère inscrit.

pages 133 à 145 : J.B. Durrande étudie le quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible. Il donne plusieurs théorèmes intéressants ainsi que la formule fondamentale :

$$d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} \quad \text{soit} \quad (d^2 - R^2)^2 = 2r^2(d^2 + R^2)$$

entre le rayon du cercle circonscrit, le rayon r du cercle inscrit et la distance d des centres des 2 cercles. Cette formule fut appelée par la suite *Relation de Durrande.*

Bibliographie

I) Jacques HADAMARD, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à l'Ecole Polytechnique.
Leçons de Géométrie Elémentaire (1917) avec 1307 Exercices divers.
Tome I Géométrie Plane, 316 pages.
Tome II Géométrie dans l'Espace, 624 pages.
Cours publié sous la direction de M. Darboux, Membre de l'Institut. (Librairie Armand Colin, 103 bd St-Michel, Paris)

II) A. GREVY, Professeur au Lycée St-Louis.
Tome I Géométrie Plane, 272 pages.
Tome II Géométrie dans l'Espace, 192 pages.
Tome III Compléments de Géométrie, 200 pages,
avec un total de plus de mille exercices.
(Librairie Vuibert, 63 bd St-Germain, Paris). 1921.

III) C. GUICHARD, Membre correspondant de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
Traité de Géométrie (1923)
Tome I (Livres I à VII), 566 pages.
Tome II (Compléments), 496 pages.

IV) E. ROUCHE et Ch. de COMBEROUSSE (1922).
Traité de Géométrie.
1ère partie : Géométrie Plane, 546 pages.
2ème partie : Géométrie dans l'Espace, 664 pages,
avec 1090 exercices.
(Librairie Gauthier-Villars, 55 quai des Grands Augustins, Paris).

V) P. COUDERC et A. BALLICCIONI, Professeurs Agrégés au Lycée Charlemagne
Premier Livre du Tétraèdre, 204 pages (Gauthier-Villars, 1935).
(Il s'agit d'une étude élémentaire du tétraèdre. Les auteurs, dans la Préface, avaient promis un Second Livre du Tétraèdre, qui ... n'a jamais paru ...).