1

ETUDES

A propos de l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

par C. BATUT et M. MENDES FRANCE, U.E.R. de Mathématiques, Bordeaux

1. $\zeta(3)$ est irrationnel : Apéry l'a établi en 1978.

Nous nous proposons ici de discuter le point de départ de sa démonstration, ceci dans un premier temps. Puis, dans un second temps, nous préparons le terrain pour pouvoir exposer dans un troisième temps la preuve complète de l'irrationalité de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

due au hollandais F. Beukers. Cette preuve est simple et relativement courte, et le lecteur impatient peut, s'il le désire, lire tout de suite le paragraphe *7.*

2. Rigueur : une nécessité en mathématiques ?

Nous savons tous que les mathématiques ne sont pas un jeu. Nous sommes tous convaincus qu'elles décrivent ou cherchent à décrire une certaine réalité qui nous est extérieure et qui leur est extérieure. En cela, les mathématiques diffèrent profondément du jeu des échecs. (Certains prétendront que le jeu des échecs se veut modèle du champ de bataille. Rien n'est plus faux, plus factice, plus absurde...) Les mathématiques sont autre chose que règles, théorèmes, définitions, démonstrations, axiomes et interdits.

Du moment que les mathématiques cherchent à décrire quelque chose qui leur/nous est extérieur, il doit être parfois possible et permis d'oublier les règles, de transgresser les interdits, d'ignorer la voie hiérarchique et d'appréhender directement, comme dans la démarche poétique, l'objet étudié. Quitte ensuite à régulariser le fait acquis, auprès de l'administration et de l'autorité mathématique. Cette phase de récupération est importante (la théorie des distributions de L. Schwartz appartient à cette phase), mais elle ne constitue pas à elle seule La Mathématique. On serait presque tenté d'affirmer que c'est quand on triche qu'on fait progresser les mathématiques, pas quand on légifère.

La phase légaliste est bien connue, trop peut-être. Aussi pensons-nous intéressant d'insister plus sur la phase poétique et de l'illustrer par deux découvertes, l'une vieille d'environ deux cents ans et l'autre, toute récente, 1978. Nos héros : L. Euler et R. Apéry. Nous commencerons par l'aîné.

3. *Une série divergente d'Euler ([2], [6], [11]).*

Euler considère la série divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n\,!$$

dont il calcule la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n\,! = 0{,}5963\ldots$$

A première vue, cela semble absurde et dénué de sens. Pourtant, comme nous allons le voir, c'est raisonnable. Considérons en effet la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n\,!\, x^n$$

qui diverge en tout point $x \neq 0$. Il faut interpréter l'égalité comme signifiant que la fonction f est indéfiniment dérivable et que pour tout entier $n \geqslant 0$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n (n\,!)^2$$

(pensez au développement de Taylor à l'origine :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n\ ).$$

Or la fonction

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\, du \qquad (x \geqslant 0)$$

est indéfiniment dérivable (pour tout $x>0$) et sa n^e dérivée est

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n\,! \int_0^{\infty} u^n \frac{e^{-u}}{(1+xu)^{n+1}}\, du$$

Les fonctions $g^{(n)}$ sont toutes définies pour $x \geqslant 0$ et il est assez naturel de dire que la n^e dérivée de g à l'origine est

$$g^{(n)}(0) = (-1)^n\, n\,! \int_0^{\infty} u^n e^{-u}\, du = (-1)^n\, (n\,!)^2$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, donc (?) $f = g$.
En particulier $f(1) = g(1)$, soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n\,! = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{1+u}\, du$$

L'intégrale est convergente et il n'est pas bien compliqué de calculer sa valeur numérique : 0,5963... Ce calcul a bien entendu excité l'imagination de plus d'un chercheur. C'est sans doute ce qui a motivé Stieltjes dans sa très originale thèse [15] où il montre cette autre curieuse égalité :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{1+u}\, du = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1^2}{4 - \cfrac{2^2}{6 - \cfrac{3^2}{8 - \ddots}}}}$$

Nous reviendrons sur cette formule au paragraphe *6*. Voilà pour Euler.

4. *Une aberrante égalité d'Apéry*

Voyons maintenant le cas Apéry. En juin 1978, aux Journées Arithmétiques de Marseille, Apéry annonça la preuve de l'irrationalité de

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour $s = 3$ [1]. On savait depuis longtemps (Euler encore) que pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\zeta(2k) = r_k\, \pi^{2k}$$

où r_k est un nombre rationnel (lié aux nombres de Bernoulli) (On pourra consulter [3] p. 307 à ce propos). Comme π est transcendant (voir [12] p. 173), il s'ensuit que $\zeta(2k)$ est transcendant donc irrationnel. Mais que dire de $\zeta(2k+1)$? La question est restée sans réponse jusqu'à la spectaculaire découverte d'Apéry dont on trouvera un compte rendu journalistique dans [13] et un compte rendu scientifique, quoique plein d'humour, dans [16]. Ajoutons qu'à ce jour, on ne connaît pas la nature arithmétique des nombres $\zeta(2k+1)$ pour $k \geqslant 2$.

Voici le point de départ de la démonstration d'Apéry. On pose :

$$A_1 = \frac{1}{x} \quad , \quad A_k = \frac{a_1\, a_2 \ldots a_{k-1}}{x(x+a_1)\ldots(x+a_{k-1})} \qquad (k \geqslant 1).$$

Alors

$$\frac{a_1\, a_2 \ldots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k)} = A_k - A_{k+1} \qquad (k \geqslant 1)$$

d'où, par "télescopage" :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1\, a_2 \ldots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k)} = A_1 = \frac{1}{x}.$$

Bien entendu, la série peut fort bien être divergente et, si on voulait être rigoureux, on exigerait que A_k tende vers 0 quand k augmente indéfiniment. Mais Apéry ne s'encombre pas de telles restrictions. Il choisit en effet $x = n^2$ et $a_k = -k^2$ pour tout $k \geqslant 1$. Cela le conduit à la scandaleuse égalité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{[(k-1)\,!]^2}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^3} \quad .$$

Non seulement la série écrite diverge, mais encore tous les termes à partir du n^e sont infinis ! Apéry poursuit cependant son calcul avec allégresse et non sans humour :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{[(k-1)\,!]^2}{n(n^2-1^2)\ldots(n^2-k^2)}$$

puis, après quelques manipulations d'aspect assez traditionnel et grâce à une bonne compréhension des formules impliquées, il aboutit à l'égalité

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

qui, à défaut de prouver immédiatement l'irrationalité de ζ (3), converge mieux que Σn^{-3}. (Rappelons qu'une série de nombres rationnels, rapidement convergente, a une somme irrationnelle, voire même transcendante : pensez au nombre de Liouville : $\Sigma 10^{-n\,!}$). Il va sans dire que la formule d'Apéry est exacte, c'est-à-dire qu'il en existe une preuve rigoureuse (voir [16]).

L'étape suivante de la méthode d'Apéry consiste à faire converger sa série plus rapidement encore et de pouvoir alors conclure à l'irrationalité de ζ (3). Cette étape est longue. Ses calculs sont souvent complexes, mystérieux et elliptiques, et nous ne pensons pas utile de poursuivre l'analyse de sa preuve car depuis octobre 1978 il existe une seconde preuve plus rapide et plus simple due à Beukers. Nous l'exposerons au paragraphe 7.

Quoi qu'il en soit, Apéry a découvert la démonstration (c'est-à-dire, il en a décrit toutes les étapes). Mais il n'a pas voulu démontrer (c'est-à-dire, il n'a pas voulu écrire en syntaxe mathématique les détails de la démonstration). Peu de temps après la conférence de Marseille, Henri Cohen (alors de l'Université de Bordeaux, maintenant à Grenoble) et A. Van der Poorten (Australien), avec l'aide de D. Zagier (Américain) ont réussi à combler les trous apparents et à "légaliser" les calculs d'Apéry. Leur tâche était difficile et si l'exploit d'Apéry est tout à fait étonnant, l'exploit de Cohen, de Van der Poorten et de Zagier n'en est pas moins remarquable. (D'après le compte rendu de La Recherche [13], H. Lenstra aurait participé à la mise en forme. C'est une erreur.)

5. *Fractions continues et nombres irrationnels*

Il est temps de faire un peu de mathématiques. Pour prouver qu'un nombre θ est irrationnel, il suffit de mettre en évidence une suite infinie de nombres rationnels p_n/q_n tels que $p_n/q_n \neq \theta$ et tels que

$$q_n\theta - p_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty .$$

Il convient donc de construire de "bonnes approximations rationnelles" du nombre θ. Une méthode consiste à construire une fraction continue qui converge vers θ.

On sait qu'en particulier, la fraction continue régulière de θ :

$$\theta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \qquad a_n \in \mathbf{N}^* \text{ pour tout } n,$$

fournit les "meilleures" approximations rationnelles de θ en ce sens que la n^e réduite

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}$$

vérifie

$$|q_n\theta - p_n| < |q\theta - p|$$

pour tout $q < q_n$ et tout $p \in \mathbf{Z}$. Malheureusement, on ne sait pas toujours construire la fraction continue régulière de θ. Nous indiquons ci-dessous une méthode pour construire dans certains cas des fractions continues non régulières. La méthode suggère la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$. (Sur les fractions continues, voir [12] et [17]).

6. *Polynômes et fractions continues de Stieltjes*

Soit μ une mesure positive sur $\mathbf{R}$ (qu'on supposera diffuse) telle que les moments

$$c_n = \int_{\mathbf{R}} t^n \, d\mu(t)$$

existent pour tout $n \geqslant 0$. On sait qu'on peut construire une suite de polynômes $P_0, P_1, P_2, \ldots$ de degrés respectifs $0, 1, 2 \ldots$ tels que

$$\int_{\mathbf{R}} P_n(t) \, P_m(t) \, d\mu(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \text{non nul si } n = m \, . \end{cases}$$

De tels polynômes sont dits orthogonaux par rapport à la mesure μ. On peut montrer qu'entre trois polynômes consécutifs il existe une relation de récurrence de la forme

$$P_{n+1}(x) = (\alpha_{n+1} x + \beta_{n+1}) \, P_n(x) + \gamma_n \, P_{n-1}(x).$$

Cela prouve que $P_n(x)$ est le dénominateur de la fraction continue

$$\cfrac{\gamma_0}{\alpha_1 x + \beta_1 + \cfrac{\gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 + \cfrac{\gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 + \ddots}}}$$

tronquée à l'ordre n(n^e réduite).

Considérons alors la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{n+1}}$$

et admettons que la série converge pour au moins une valeur finie de x. Alors, pour tout x intérieur au domaine de convergence,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \int_{\mathbf{R}} t^n \, d\mu(t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{d\mu(t)}{x - t}$$

Par ailleurs, à la suite de polynômes orthogonaux P_n est associée la suite de polynômes

$$Q_n(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x - t} \, d\mu(t)$$

On montre que $Q_n(x)/P_n(x)$ est la n^e réduite de la fraction continue précédente et que

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \ldots + \frac{c_{2n-1}}{x^{2n}} + \sum_{m \geqslant 2n} \frac{c_m^{(n)}}{x^{m+1}}$$

Ainsi, la suite de fractions rationnelles $Q_n(x)/P_n(x)$ tend vers $f(x)$ (sans condition pour la topologie x^{-1}-adique, sous certaines conditions pour la convergence ponctuelle).

Illustrons ces calculs par deux choix explicites de la mesure μ.

Exemple 1 : On prend

$$d\mu(t) = \begin{cases} dt \text{ sur } [0, 1] \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Les polynômes $P_n(x)$ sont alors les polynômes de Legendre :

$$P_n(x) = \frac{1}{n\,!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n(1-x)^n),$$

et la fonction f est

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x-t} = -\log(1 - \frac{1}{x}).$$

En particulier, la suite de nombres rationnels $-Q_n(-1)/P_n(-1)$ converge suffisamment rapidement pour établir l'irrationalité de Log 2 (voir [4], [7] et [8]).

Exemple 2 : On choisit

$$d\mu(t) = \begin{cases} e^{-t}\,dt & \text{pour } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Laguerre :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n\,!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

La théorie conduit alors naturellement à la fraction continue dont il a été fait mention au paragraphe 3 :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1^2}{4 - \cfrac{2^2}{6 - \cfrac{3^2}{8 - \ddots}}}}$$

Venons-en maintenant à la preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$ suivant F. Beukers, laquelle s'inspire des idées développées ci-dessus.

7. *Irrationalité de $\zeta(3)$* (d'après F. Beukers [5])

Notons que

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-xy}$$

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log(xy)}{1-xy}\,dx\,dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{1-(1-xy)z}$$

(Pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(x) \operatorname{Log} x \, dx$,

on peut calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\, x^\sigma \, dx$, puis dériver par rapport à σ

et faire tendre σ vers 0).

La démonstration de l'irrationalité de ζ (3) repose sur le résultat suivant :

Lemme

Soient $P(x)$ et $Q(y)$ deux polynômes de degré inférieur à n et à coefficients entiers. Si d_n dénote le plus petit commun multiple de 1, 2,..., n, on a :

1°) $$\int_0^1 \int_0^1 \frac{P(x)\, Q(x)}{1 - xy} \, dx \, dy = \frac{A + B\,\zeta(2)}{d_n^2}$$

2°) $$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P(x)\, Q(x)}{1 - (1-xy)z} \, dx \, dy \, dz = \frac{A + B\,\zeta(3)}{d_n^3}$$

où A et B sont des entiers.

Preuve :

Par linéarité, on est amené à calculer les intégrales :

$$I_{rs} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s \, dx \, dy}{1 - xy}$$

$$J_{rs} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s \, dx \, dy \, dz}{1-(1-xy)z} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 - \frac{\operatorname{Log}(xy)\, x^r y^s}{1 - xy} \, dx \, dy$$

On établit facilement les résultats suivants :

Si $r = s$:
$$I_{rr} = \zeta(2) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$J_{rr} = \zeta(3) - \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{r^3}\right)$$

Si $r > s$:
$$I_{rs} = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \ldots + \frac{1}{r}\right)$$

$$J_{rs} = \frac{1}{r-s} \left[\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \ldots + \frac{1}{r^2}\right]$$

Si r et s sont des entiers n'excédant pas n, les intégrales considérées ont bien la forme annoncée dans le lemme.

Choisissons maintenant P et Q égaux au n^e polynôme de Legendre P_n :

$$P(x) = Q(x) = P_n(x) = \frac{1}{n\,!} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(1-x)^n\right] .$$

On vérifiera que ce polynôme est à coefficients entiers :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, C_{n+k}^k \, (-x)^k .$$

Il s'agit alors d'évaluer l'intégrale triple

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)\, P_n(y)}{1-(1-xy)z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

En intégrant n fois par parties par rapport à x, on obtient :

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n \, (1-x)^n \, P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Le changement de variable

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$$

conduit à

$$I_n = \frac{1}{2}(-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^n \, (1-w)^n \, \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}w.$$

Enfin, en intégrant n fois par parties par rapport à y, I_n se met sous la forme

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n \, y^n \, w^n \, (1-x)^n \, (1-y)^n \, (1-w)^n}{(1-(1-xy)\,w)^{n+1}} \quad \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}w$$

Il est facile de montrer que :

$$0 < \frac{xyw(1-x)(1-y)(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq (\sqrt{2} - 1)^4$$

pour tout x, y, $w \in \left]0, 1\right[$.

On en déduit :

$$0 < |A_n + B_n \, \zeta(3)| \, \mathrm{d}_n^{-3} < \zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}$$

où A_n et B_n sont des entiers.

On sait d'autre part que le nombre d_n satisfait pour tout n l'inégalité

$$d_n \leqslant 3^n$$

(Pour une démonstration élémentaire de ce résultat, voir [10]).

On a alors

$$\begin{aligned} 0 < |A_n + B_n \, \zeta(3)| &< \zeta(3) \, 3^n (\sqrt{2}-1)^{4n} \\ &< \zeta(3) \left(\frac{4}{5}\right)^n \end{aligned}$$

prouvant l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Références

[1] **R. Apéry**, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque 61, 1979, 11-13 (exposé compact et elliptique).

[2] **E.J. Barbeau**, *Euler subdues a very obstreperous series*, Amer. Math. Monthly, 86, 1979, 356-372.

[3] **J. Bass**, *Cours de Mathématiques*, tome I, Masson, 2e édition, 1961.

[4] **C. Batut**, *Sur les approximations du logarithme*, communication au 104e congrès Soc. Sav. à Bordeaux, 1979, à paraître.

[5] **F. Beukers**, *A note on the irrationnality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc., II (démonstration sans doute la plus rapide et la plus claire).

[6] **E. Borel**, *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthier-Villars, 1901 (en particulier, chapitre 2).

[7] **G. Choodnovsky**, *Approximations rationnelles des logarithmes de nombres rationnels*, C.R. acad. Sc. Paris, 288, 1979, série A, 607-609.

[8] **G. Choodnovsky**, *Formules d'Hermite pour les approximations de Padé...*, C.R. acad. Sc. Paris, 288, 1979, série A, 965-967.

[9] **H. Cohen**, *Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$*, séminaire Théorie des nombres, 1978-79, Grenoble, VI.1 - VI.9 (démonstration remarquablement claire, dépouillée et précise, d'inspiration apérienne).

[10] **D. Hanson**, *On the produit of the primes*, Canad. Math. Bull. 15, 1975, 33-37.

[11] **G.H. Hardy**, *Divergent series*, Oxford (en particulier pages 26-29 et 196).

[12] **G.H. Hardy, E.M. Wright**. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Clarendon press, 4e édition, 1968.
(Ouvrage de base de la théorie des nombres. Voir chapitres 4, 10 et 11).

[13] **M. Mendes France**, *Roger Apéry et l'irrationnel*, La Recherche 1979, 97, 170-172.
(Ne contient aucune démonstration. Compte rendu style France-Soir écrit par un envoyé spécial qui n'était pas sur les lieux !)

[14] **P. Montel**, *Leçons sur les récurrences*, Gauthier-Villars, 1957 (en particulier chapitre 10).

[15] **T.J. Stieltjes**, *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sc. Toulouse 8, 1894 et 9, 1895.

[16] **A. Van der Poorten**, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$*. The new Mathematical Intelligencer, 1979, 195-203.
(Compte rendu coup pour coup de la démonstration d'Apéry, parsemé de commentaires très pertinents. Une remarquable analyse).

[17] **H.S. Wall**, *Analytic theory of continued fractions*, Chelsea, 1973.