Bulletin de l'APMEP n°321 - Décembre 1979

5

MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ

En publiant cet article, el Bulletin prétend moins faire le point de problèmes en pleine évolution qu'apporter un élément à un débat qu'il souhaite largement ouvert.

A propos d'intelligence et de quotient intellectuel Rôle d'un "modèle additif" dans les conceptions d'inné et d'acquis

par Michèle CHOUCHAN et Albert JACQUARD, Directeur de Recherches à l'I.N.E.D.

Introduction

On peut trouver, au fil des lectures :

(1) « Il faut reconnaître que la définition de l'intelligence est assez laborieuse. Mais [...] il n'est pas nécessaire de cerner la nature d'un phénomène pour en avoir notion, usage pratique et moyen de mesure ». (*Pierre DEBRAY - RITZEN, p. 42*).

(1') « Dans bien des cas, le quotient intellectuel n'est que le cache-misère de psychologues qui quantifient l'objet de leurs études avant même de l'avoir défini, ou d'avoir vérifié qu'il est définissable ». (*Albert JACQUARD, Eloge de la différence, p. 175*).

(2) « De tous ces résultats émane la notion non absolue mais relative tout à fait acceptable que la part de l'hérédité — de l'héritabilité — dans l'intelligence [...] est d'environ 80 % ; et que, par construction, la part de l'environnement est d'environ ce qui reste : c'est-à-dire 20 %... ». (*Pierre DEBRAY - RITZEN, p. 60*).

(2') « L'intelligence est déterminée à 80 % par le patrimoine génétique et à 20 % par le milieu ». Cette phrase a été répétée tant de fois qu'elle a acquis le statut de vérité première, or, elle n'a rigoureusement aucun sens ». (*Albert JACQUARD, ibid., p. 176*).

Donc, voici deux thèses antagonistes défendues par deux personnalités se réclamant chacune d'une analyse scientifique, à propos de ce problème sans cesse repensé qui est : l'intellignce, sa définition, sa "mesure", les interactions entre inné et acquis, patrimoine génétique et environnement. Une fois de plus se pose aussi la question du droit, de la possibilité, du chercheur scientifique, à s'abstraire des contextes philosophiques, ou politiques, de ses travaux. Ne serait-ce pas d'abord à lui de démystifier, de démonter sa propre argumentation, par une description précise du cadre d'étude, du choix d'hypothèses, du choix des variables, des types de transformations ou de relations établies entre ces variables ?

Ainsi, dans divers articles, Albert Jacquard a dénoncé l'emploi qu'il juge abusif et injustifié du schéma additif dans l'étude de l'intelligence, de son héritabilité. Yves Chevallard* pense que « l'usage scientifique de modèles mathématiques additifs n'est pas seul en cause : que cet usage soit *accepté* comme "naturel", sous sa forme directe ou indirecte (par l'énoncé de ses conséquences, Cf. citation 2) par le plus large public, est un aspect très important dans la réception acritique et la validation collective des thèses ici critiquées touchant la question de l'inné et de l'acquis ». C'est aussi le sens de l'extrait suivant** : « Notre esprit domine aisément les mécanismes additifs ; est-ce une particularité "innée" de notre structure mentale ou le résultat de l'entraînement que nous avons subi lorsqu'à l'école notre premier contact avec la "science" a été l'addition ? Avant même de savoir définir un nombre nous savions que "deux et deux font quatre". Plus tard, notre apprentissage de la physique a surtout concerné les forces ; même si nous ne comprenions pas bien de quoi il s'agissait, nous savions que, si deux forces s'exercent simultanément en un même point d'un objet, elles "s'ajoutent" ; autrement dit, tout se passe comme si une seule force, égale à la somme vectorielle des deux premières, était en action. Conséquence de cette merveilleuse propriété, on peut, sans changer les données du problème, remplacer une force par deux ou plusieurs autres, pourvu que celles-ci aient une somme vectorielle égale à la

* qui a fait une critique de notre texte avant sa parution.

** *Modèle additif, génétique et idéologie*. A. JACQUARD. La pensée n° 201, Oct. 1978.

première ; le choix astucieux de la direction ou de l'intensité de ces forces partielles, les "composantes", permet bien souvent de résoudre simplement un problème apparemment complexe, d'où les "solutions élégantes" dont nous félicitaient nos professeurs du secondaire.

Le monde réel qui nous attend à la sortie de l'Université n'a malheureusement pas la merveilleuse structure simple de l'arithmétique à l'école communale, ou de la physique des forces au baccalauréat.

Méfions-nous de nos réflexes. La formulation même des questions que nous posons, à propos des phénomènes ou des processus que nous observons, risque d'impliquer une conception totalement irréaliste de ceux-ci ; les réponses à ces questions ne pourront alors être que des non-sens.

Nous constatons par exemple que tel phénomène est la résultante d'un certain nombre de "causes" ; il nous paraît naturel de poser la question : quelle part pouvons-nous attribuer à chacune de ces causes dans le déterminisme en jeu ? Cette question, d'apparence innocente, engage la réflexion dans une voie qui n'est, le plus souvent, qu'une impasse. Bien sûr, dans certains cas, la question a un sens : "Quelles sont les parts du logement et de la nourriture dans les dépenses moyennes d'un ménage ?" [...]. Mais le plus souvent cette question est absurde : "Quelles sont les parts de l'émetteur et du récepteur dans la qualité de l'image de mon poste de télévision ?" [. . .][*]

Pour que la notion de part ait un sens, il est nécessaire que le résultat puisse s'analyser en termes qui s'ajoutent ; il faut, autrement dit, que le "modèle explicatif" soit additif. S'il ne l'est pas, le recours à cette notion ne peut qu'être fautif ![**] ».

L'intelligence - Une représentation paramétrique : le Q.I.

1/ En prononçant ou écrivant "intelligence", l'on évoque tout un ensemble de caractéristiques mal définies mais ayant la particularité d'être à première vue spécifiques de notre espèce.

Pour l'homme, l'intelligence est "ce je-ne-sais-quoi par lequel il exprime sa différence par rapport aux êtres qui l'entourent".[***]

---

[*] Y. Chevallard donne l'exemple complémentaire suivant : "l'élève qui sait que $x^4 = (x^2)^2$ et $a^6 = (a^3)^2$ d'une part, que $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ d'autre part, sait alors factoriser $x^4 - a^6 = (x^2 - a^3)(x^2 + a^3)$: la "difficulté" de l'exercice est la somme des "difficultés" des deux exercices.

[**] Mais alors, ne serait-il pas important de recenser dans d'autres domaines, tels l'économie, l'utilisation du schéma additif et les hypothèses de validation utilisées ?

[***] J.F. Richard *Intelligence*. Encyclopedia Universalis, 8, 1973.

Philosophes et psychologues ont cherché à préciser ce je-ne-sais-quoi. Pour de nombreux psychologues, l'intelligence n'est pas une propriété humaine spécifique, mais un ensemble de propriétés particulièrement développées par notre espèce, moins repérables par des critères de "tout ou rien", de "présence ou d'absence", que par des paramètres quantifiables précisant un "plus ou moins".

Les raisonnements tenus alors concernent des paramètres mesurables dont on admet qu'ils sont des représentations de l'objet "intelligence". Dans ce cas, il devient essentiel de préciser quel est le choix de ces représentations, de leur quantification : ainsi en est-il du quotient de développement intellectuel, le Q.I., qui ne pourra donc être confondu avec l'intelligence elle-même.

2/ Le Q.I. : quelques définitions ; la détermination. Michel Tort* définit ainsi le Q.I. : c'est la « note obtenue par un individu en divisant son âge mental par son âge réel. Le Q.I. peut se présenter sous la forme 0,80. Cela signifie que l'individu, qui a 10 ans d'âge réel, a obtenu une note au test qui correspond à l'âge mental de 8 ans. Dans ce cas, l'individu "normal", celui qui a obtenu au test la note qui correspond à un âge mental exactement égal à son âge réel, a un Q.I. de 1.

Exemple :

$$\frac{\text{Age mental}}{\text{Age réel}} = \frac{8 \text{ ans}}{8 \text{ ans}} = 1$$

Le plus souvent, pour des raisons de commodité, on multiplie le résultat par 100. Notre premier sujet aurait alors un Q.I. de 80.

$$100 \times \frac{\text{Age mental}}{\text{Age réel}} = 100 \times \frac{8 \text{ ans}}{10 \text{ ans}} = 80$$

Le second aurait le Q.I. :

$$100 \times \frac{\text{Age mental}}{\text{Age réel}} = 100 \times \frac{8 \text{ ans}}{8 \text{ ans}} = 100\ .$$ »

Mais cet âge mental, comment le déterminer ? C'est alors qu'intervient le *test d'intelligence*. Le premier en date, le test de Binet-Simon, fut construit en 1905, pour** "dépister, parmi les écoliers, ceux qui ne pouvaient pas suivre [pour cause d'] *intelligence* insuffisante".

"Le principe de la mesure consiste à comparer les résultats d'un enfant à la moyenne des résultats obtenus par les enfants du même âge. Un enfant qui obtient un résultat inférieur à la moyenne est considéré comme *un arriéré* ; il n'obtient pas les résultats de la moyenne des enfants de son âge, mais un résultat obtenu par la moyenne des enfants plus jeunes. Cette moyenne définit *l'âge mental* de l'individu".

---

* M. Tort - *Le quotient intellectuel* - Petite Collection Maspero, 1977

** Les phrases entre guillemets sont extraites du livre de Michel Tort.

D'autres tests sont apparus depuis, dont le N.E.M.I. (nouvelle échelle métrique de l'intelligence), établi en 1949 par Zazzo et autres, qui est une révision du test de Binet-Simon. P. Debray-Ritzen cite largement le W.I.S.C., test de Wechsler, comportant "moins d'épreuves verbales [que le N.E.M.I. et incluant] des épreuves dites de *performance*. Cette innovation a été reprise dans l'E.C.N.I. [échelle collective de niveau intellectuel, mise au point en 1965 par l'Institut National d'Etudes Démographiques et l'Institut National d'Orientation Professionnelle]. Autre particularité ; Wechsler calcule directement le Q.I. sans passer par le calcul de l'âge mental, en comparant l'écart d'un enfant par rapport aux enfants de son âge."

Comment l'échelle est-elle préparée, pour un âge réel donné ? Autrement dit comment le test, après que l'*échantillonnage* a été établi, est-il *étalonné* ? La courbe de référence est une courbe de Gauss, courbe dite "en cloche", correspondant à une loi statistique dite "loi normale".

Le principe de ce choix est que "cette distribution s'observe très fréquemment dans la nature". Mais M. Tort, combattant par une analyse serrée cette option, insistera sur l'imprécision, voire l'erreur scientifique, de même que l'élitisme idéologique que cet étalonnage recouvre (en particulier, on ne traitera pas ici de la stabilité du Q.I. au cours de mesures se situant à des instants distincts ; elle est également fort sujette à caution). Par ailleurs, le barème s'utilise aussi sous forme de points s'ajoutant : "l'addition, piège à cons" (sic) est partout présente.

3/ Alors, "mesurer" le Q.I., est-ce lui attribuer une valeur d'exactitude ? Ne faut-il pas, plutôt, parler d'intervalle de confiance, comme pour une mesure physique ? D'autant qu'à en croire certains auteurs, cet intervalle risque ici d'atteindre une amplitude telle que toute interprétation ultérieure est illusoire. Par ailleurs, n'oublie-t-on pas, trop souvent, que puisque le Q.I. est un quotient, il n'y a pas de sens à parler de la somme de deux Q.I., guère de la moyenne de deux Q.I. ? Que dire alors de la description du Q.I. moyen, caractéristique de telle couche sociale* ?

4/ Considérons toutefois deux individus dont les Q.I. sont "différents". Parlons alors d'*écart* et posons-nous la question des causes à attribuer à cet écart. Puisque, mis à part le cas des *jumeaux monozygotes***, les deux individus ont nécessairement des *patrimoines génétiques**** différents, puisqu'ils n'ont pas vécu les mêmes expériences, puisque les outils intellectuels dont ils disposent sont en général différents, peut-on attribuer une "part" de causalité à l'un ou l'autre de ces facteurs ? Doit-on, peut-on, faire intervenir le concept d'héritabilité ?"

---

* Cf échelle de H. Eysenck reprise par P. Debray-Ritzen. L'aspect le plus caricatural en est le "bas" : Q.I. 100 : vendeurs de grands magasins, conducteurs de trains ou de camions,... Q.I. 90 : jardiniers, tapissiers, ...

** ou jumeaux "vrais", c'est-à-dire ayant le même patrimoine génétique.

*** Collections de gènes dont est pourvu chaque individu ; ces gènes proviennent de deux origines immédiates : le père et la mère.

Explicitons la signification des termes employés : parler d'écart, plus précisément d'écart à une valeur moyenne, conduit à un calcul de variance ; évoquer la part due à telle cause ramène (cf. l'introduction) à un modèle explicatif additif. Pour approfondir ce dernier point, on emploie la technique d'*analyse de variance*, mais en sachant, là encore, qu'il faudra en préciser le champ d'interprétation.

Inné et acquis : modèle additif

Tout individu résulte de l'action du *milieu* (on y inclut tous les facteurs intervenus dans le développement de l'individu : nourriture, éducation, affection, ...) sur un organisme construit à partir d'*une information génétique* réunie, une fois pour toutes, lors de la fécondation de l'ovule initial. On peut, par exemple, désigner par *inné* cette information génétique, par *acquis* l'ensemble des autres facteurs qui ont façonné l'individu.

Mathématisons l'ensemble de cette formulation.

Soit un caractère C "mesurable" (qui sera, par exemple, le Q.I.). Il est pratiquement toujours fonction de facteurs génétiques et de facteurs de milieu : si G et M sont des paramètres *numériques* liés aux gènes ou à l'environnement, on a $C = f(G, M)$. Préciser la "part" de G et celle de M revient à décomposer f suivant un modèle additif :

$$f(G, M) = f_1(G) + f_2(M).$$

Mais ce modèle est rarement conforme à l'observation.

On étudie alors *les écarts* ΔC entre individus d'un champ d'observation donné. On est ainsi passé d'une analyse concernant le caractère à une analyse concernant les variations du caractère, ce qui est un changement considérable : il n'est pas équivalent de disserter sur le rôle du foie dans la digestion ou de disserter sur les différences du fonctionnement du foie d'un individu à l'autre. Dans le premier discours les fonctions qui se retrouvent chez tous les individus peuvent tenir la place la plus importante ; il n'en est pas question dans le second discours.

Développons f en série de Taylor :

$$\Delta C = \sum_{i,j} k_{ij} \left[\frac{\partial^{\,i+j}}{\partial G^i \, \partial M^j} f(G, M) \right] (\Delta G)^i (\Delta M)^j$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \text{les } k_{ij} \text{ sont des coefficients numériques indépendants de } f. \\ \Delta G \text{ et } \Delta M \text{ sont les variations de facteurs génétiques d'une part,} \end{array} \right.$
de facteurs du milieu d'autre part.

Si le domaine d'observation est tel que les variations de G et M soient suffisamment petites, les termes $(\triangle G)^2$ et $(\triangle M)^2$, puis toutes les puissances supérieures, peuvent être considérées comme négligeables devant $(\triangle G)$ et $(\triangle M)$; on peut alors écrire la formule précédente de façon très simplifiée :

$$\triangle C = k_{10}\left(\frac{\partial f}{\partial G}\right)\triangle G + k_{01}\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)\triangle M$$

$$\text{soit}\quad \begin{cases} \triangle C = a\,\triangle G + b\,\triangle M \\ \text{avec } a = k_{10}\left(\dfrac{\partial f}{\partial G}\right) \text{ et } b = k_{01}\left(\dfrac{\partial f}{\partial M}\right) \end{cases}$$

On a donc ramené la variation $\triangle C$ à un modèle additif, et ceci quelle que soit la complexité de la fonction f.

Quelle en est la signification ?

Considérer que les termes $(\triangle G)^2$ et $(\triangle M)^2$ sont négligeables revient à analyser les écarts $\triangle C$ à l'intérieur d'un groupe génétiquement assez homogène, soumis à un environnement peu différencié. Toute généralisation de cette méthode à des groupes de patrimoines génétiques trop différents, ou répartis dans des milieux physiques, sociologiques, éducatifs, dissemblables, devient un leurre. D'autant que les constantes a et b dépendent de f, donc du champ local d'observation de C*.

Etude des variations ΔC - Deux techniques d'analyse de variances

Dans ce qui précède, on a fait apparaître une variation $\triangle C$ qui peut être considérée comme un écart à une valeur moyenne déterminée dans un champ d'observation donné. $\triangle C$ dépend des variations de deux paramètres, G et M, numériques. Pour préciser davantage le rôle de chaque para-

---

* Y. Chevallard note ici la remarque suivante : "Qu'est-ce qui nous empêche de penser que, *du point de vue qui nous intéresse ici* (i.e. la légitimité de l'usage d'un modèle additif), l'ensemble des variétés humaines confondues formerait un "groupe bien homogène" à la fois par son patrimoine génétique et son milieu ? [...] Comment se décider — sinon pour des raisons idéologiques aussi "évidentes" les unes que les autres pour ceux qui y croient — entre les deux positions suivantes :
— entre les individus, des différences objectives faibles (donc le modèle additif est légitime), *donc subjectivement importantes* (Debray-Ritzen et consorts)
— entre les individus, des différences objectives importantes (donc le modèle additif est illégitime), *donc subjectivement négligeables.* (A. Jacquard)".

mètre dans la dispersion des valeurs prises par C, on calcule la variance V, c'est-à-dire l'expression

$$V = \frac{1}{kl} \sum_{G,M} (C - \overline{C})^2$$

où k est le nombre de valeurs prises par G
où l est le nombre de valeurs prises par M
où $C - \overline{C}$ est l'écart entre la valeur de $C = f(G, M)$ et la valeur moyenne $\overline{C}$ de C dans le champ d'observation.

1/ Deux techniques d'analyse de variance sont utilisables :

— On fixe l'un des paramètres, par exemple G. On calcule les valeurs moyennes de C correspondant aux diverses valeurs de M, puis la variance V_G de ces moyennes. Elle caractérise la dispersion due à l'environnement. De même, on calcule V_M, caractérisant la dispersion due à des variations génétiques.

Soit K tel que $V = V_G + V_M + K$

— On fixe l'un des paramètres, soit G, sur une valeur donnée g_i et on calcule la variance V_{g_i} correspondante. On fait ensuite la moyenne $\overline{V}_G$ des V_{g_i}. On a alors une indication de l'effet moyen de la dispersion des types de valeurs dues au milieu.

De même on calcule $\overline{V}_M$, moyenne des V_{m_j}.

On constate que $V = \overline{V}_G + \overline{V}_M - K$

2/ Explicitons ces calculs à partir du tableau suivant, où trois valeurs m_1, m_2, m_3 sont attribuées à M, deux valeurs g_1, g_2 sont attribuées à G. On suppose des répartitions équiprobables de ces valeurs.

Caractère C

M / G	m_1	m_2	m_3	Moyenne C_G (M)	Variance V_G (M)
g_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{g_1}	V_{g_1}
g_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{g_2}	V_{g_2}
Moyenne C_M (G)	C_{m_1}	C_{m_2}	C_{m_3}	Moyenne g^{ale} $\overline{C}$	Moyenne $\overline{V}_G$
Variance V_M (G)	V_{m_1}	V_{m_2}	V_{m_3}	Moyenne $\overline{V}_M$	

Ainsi

$$V_G = \frac{1}{2}\left[(C_{g_1} - \overline{C})^2 + (C_{g_2} - \overline{C})^2\right]$$

$$V_M = \frac{1}{3}\left[(C_{m_1} - \overline{\overline{C}})^2 + (C_{m_2} - \overline{\overline{C}})^2 + (C_{m_3} - \overline{\overline{C}})^2\right]$$

$$\overline{V}_G = \frac{1}{2}(V_{g_1} + V_{g_2})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(C_{11} - C_{g_1})^2 + \frac{1}{3}(C_{12} - C_{g_1})^2 + \frac{1}{3}(C_{13} - C_{g_1})^2\right] + \frac{1}{2}V_{g_2}$$

$$\overline{V}_M = \frac{1}{3}(V_{m_1} + V_{m_2} + V_{m_3})$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(C_{11} - C_{m_1})^2 + (C_{21} - C_{m_1})^2\right] + \frac{1}{3}V_{m_2} + \frac{1}{3}V_{m_3}$$

3/ Le coefficient K caractérise l'interaction entre les variables G et M. Il faut prendre le cas très particulier où cette interaction peut être considérée comme nulle, c'est-à-dire seulement le cas où le modèle est additif*, pour avoir deux démarches d'analyse équivalentes qui, toutes deux, conduisent à l'égalité :

$$V = V_G + V_M = \overline{V}_G + \overline{V}_M$$

4/ Mais si l'on pose, à propos du Q.I., la question des rôles respectifs de l'inné et de l'acquis, on s'aperçoit qu'il est impossible de les quantifier, donc de les considérer comme les paramètres G et M précédents. Par suite, on ne pourra mesurer de valeurs moyennes de Q.I. suivant ces paramètres. On peut seulement affirmer que, pour des jumeaux monozygotes, $\triangle G = 0$; et la variance de leur écart de Q.I. est alors une approximation de V_G (et encore, à la condition d'admettre que les écarts $\triangle M$ sont analogues à ceux de personnes tirées au hasard). Cela ne permet pourtant pas, mathématiquement, de calculer V_G, variance des moyennes conditionnées par une valeur G fixée.

En conclusion

Le fait qu'une recherche aboutisse à une "mesure" n'entraîne pas nécessairement qu'elle soit scientifique, opportune ou même simplement inoffensive. Peut-on, à titre de mise en garde, conclure par le texte adopté en 1976 par la Genetics Society of America :

"— L'interprétation du Q.I. est particulièrement difficile lorsque les comparaisons sont effectuées entre des groupes de cultures différentes ; ces limites doivent être gardées à l'esprit dans toute analyse génétique.

* Cf Note in fine

— Bien que, de l'avis général, des facteurs génétiques soient responsables, dans une certaine mesure, des différences de Q.I. constatées à l'intérieur des populations, ceux qui ont soigneusement étudié ce problème ont des avis divergents sur l'importance relative des influences génétiques et environnementales et sur leur interaction.

— Il n'existe aucune preuve convaincante permettant d'affirmer qu'il y a ou qu'il n'y a pas de différence génétique appréciable de l'intelligence entre les races.

— Nous pensons que les généticiens peuvent et doivent s'exprimer en s'opposant au mauvais usage de la génétique en vue d'objectifs politiques et à l'attitude qui consiste à tirer des conclusions d'ordre social à partir de données inadéquates."

Peut-on accepter encore une affirmation telle que :
"J'essaie d'être un scientifique, je ne suis pas un politique... Ne prenez pas mes thèses en terme d'idéologie ; je le répète, je n'ai pas d'idées politiques ; je les récuse ; je me contente des faits que je ne choisis pas selon un engouement, une tendance, une secrète satisfaction ; ces faits ne me font pas plaisir ; ils sont, voilà tout." (P. Debray-Ritzen, dans l'ouvrage déjà cité, page 17).

*** Note de P.L. HENNEQUIN**

Soient G et M deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition :

$$F(g, m) = P(G < g, M < m) = P(G < g)\, P(M < m) = F_1(g)\, F_2(m)$$

et soit $C = f(G, M)$ une troisième variable aléatoire définie comme fonction f des deux autres.

La moyenne de C, $\overline{C}$, est donnée (si elle existe) par

$$\overline{C} = \iint f(g, m)\, d\, F_1(G)\, d\, F_2(m)$$

Introduisons les moyennes conditionnelles :

$$C_g = \int f(g, m)\, d\, F_2(m) \qquad \text{et} \qquad C_m = \int f(g, m)\, d\, F_1(g)\ ;$$

on a, par le théorème de Fubini (permutation des intégrations) :

$$\overline{C} = \int C_g\, d\, F_1(g) = \int C_m\, d\, F_2(m).$$

Considérons maintenant, si elle existe, la variance V de C donnée par :

$$V = \iint (f(g, m) - \overline{C})^2\, d\, F_1(g)\, d\, F_2(m).$$

On peut écrire : $\qquad f(g, m) - \overline{C} = f(g, m) - C_g + C_g - \overline{C}$

donc
$$(f(g, m)-\overline{\overline{C}})^2 = (f(g, m)-C_g)^2 + (C_g-\overline{\overline{C}})^2 + 2(f(g, m)-C_g)(C_g-\overline{\overline{C}})$$
Or
$$\iint (f(g, m) - C_g)(C_g - \overline{\overline{C}})\, d\,F_1(g)\, d\,F_2(m)$$
$$= \int (C_g - \overline{\overline{C}}) \left\{ \int (f(g, m) - C_g)\, d\,F_2(m) \right\} d\,F_1(g) = 0$$
par définition de C_g.

Il reste
$$V = \iint (f(g, m) - C_g)^2\, d\,F_1(g)\, d\,F_2(m) + \iint (C_g - \overline{\overline{C}})^2\, d\,F_1(g)\, d\,F_2(m),$$
égalité connue sous le nom de "formule de l'analyse de la variance" : elle exprime V comme la somme de $\overline{V}_G$, moyenne des variances de C pour chaque g fixé, appelée "variance intraclasse", et de V_G, variance de C_g, appelée "variance interclasse" (elle vaut d'ailleurs même si G et M ne sont pas indépendantes).

On a donc $V = \overline{\overline{V}}_G + V_G$ et de même, en permutant les rôles de M et G, $V = \overline{\overline{V}}_M + V_M$.

Proposons-nous maintenant de comparer V_G et $\overline{\overline{V}}_M$ (ou $\overline{\overline{V}}_G$ et V_M).

De
$$\overline{\overline{C}} = \int C_m\, d\,F_2(m),$$
on déduit :
$$C_g - \overline{\overline{C}} = \int \{f(g, m) - C_m\}\, d\,F_2(m)$$
d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et compte tenu de $\int d\,F_2(m) = 1$,
$$(C_g - \overline{\overline{C}})^2 \leqslant \int \{f(g, m) - C_m\}^2\, d\,F_2(m),$$
l'inégalité étant stricte, sauf si $f(g, m) - C_m = C_g - C$, F_2 – presque partout.

En intégrant terme à terme par rapport à F_1, on en déduit :
$$V_G = \int (C_g - \overline{\overline{C}})^2\, d\,F_1(g) \leqslant \iint \{f(g, m) - C_m\}^2\, d\,F_2(m)\, d\,F_1(g) = \overline{\overline{V}}_M$$
On a donc toujours $V_G \leqslant \overline{\overline{V}}_M$, donc $K = \overline{\overline{V}}_M - V_G = \overline{\overline{V}}_G - V_M \geqslant 0$, l'inégalité étant stricte, sauf si $f(g, m) - C_m = C_g - \overline{\overline{C}}$, $F_1 \otimes F_2$ – presque partout.

On en conclut que si $K = 0$, ($F_1 \otimes F_2$ – presque partout), $f(g, m)$ est la *somme* d'une fonction C_m de m seul et d'une fonction $C_g - \overline{\overline{C}}$ de g seul, c'est-à-dire que le modèle est *additif* ; la réciproque est immédiate :

si $f(g, m) = a(g) + b(m)$

avec $\int a(g)\, d\,F_1(g) = a$ et $\int b(m)\, d\,F_2(g) = b$,

alors
$$C_g = a(g) + b,\ C_m = a + b(m),\ \overline{\overline{C}} = a + b \text{ et } K = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

Quelques titres

A. de BENOIST. "Hérédité de l'intelligence : le débat est ouvert", Le Figaro, 19-20 nov. 77, p. 26.

C. BOCQUET. "Sélection", Encyclopaedia Universalis, 14, p. 849-851.

C. BURT. "The Genetic Determination of differences in intelligence : A study of monozygotic twins reared together and apart", Brit. J. Psychol., 57, 1966, p. 137-153.

A. CHAPMAN et A. JACQUARD. "Un isolat d'Amérique Centrale : les Indiens Jicaques du Honduras", Génétique et Populations, Paris, PUF-INED, 1971, p. 163-185.

P. DAGUE. "La mesure de l'intelligence", Actes du Colloque "Génétique et mesure de l'intelligence", Paris, MURS, 1977.

P. DEBRAY-RITZEN. *Lettre ouverte aux Parents des Petits Ecoliers*, Albin Michel, 1978.

H. EYSENCK. *L'inégalité de l'homme*, Paris, Copernic, 1977.

J.P. HEBERT. *Race et intelligence*, Paris, Copernic, 1977.

A. JACQUARD. *Génétique des Populations Humaines*, Paris, PUF, 1974.

A. JACQUARD. *Eloge de la différence*, Paris, Seuil, 1978.

A. JACQUARD. *Concepts en génétique des populations*, Paris, Masson, 1977.

A. JENSEN. "How can we boost IQ and Scholastic Achievement ?", Harvard Educ. Rev., 39, p. 1-123.

L. KAMIN. "Heredity, intelligence, politics and psychology I", *The IQ Controversy*, New-York, Pantheon Books, 1976, p. 242-264.

J. LARMAT. *La génétique de l'intelligence*, Paris, PUF, 1973, rééd. 1979.

J. LAWLER. *Intelligence, génétique, racisme*, Ed. Sociales, Paris, 1978.

R. LENONTIN. "The Analysis of variance and the analysis of causes", *The IQ Controversy*, New-York, Pantheon Books, 1976, p. 179-193.

J.F. RICHARD. "Intelligence", *Encyclopaedia Universalis*, 8, 1973, p. 1081-1084.

P. THUILLIER. "Les Scientifiques et le Racisme", La Recherche, Paris, mai 1974.

M. TORT. *Le Quotient intellectuel*, Paris, Maspero, 1977.

N. WADE. "IQ and heredity : suspicion of fraud beclouds classic experiment", Science, 1976, p. 916-919.