Des problèmes et des outils pour les résoudre

par Daniel LEHMANN, U.E.R. de mathématiques, Université des Sciences et des Techniques, Lille

Mon intention n'est pas de faire une conférence technique sur la façon de rédiger un texte de problème ou d'en faire chercher la solution, mais plutôt de discuter la façon dont le rôle que l'on attribue aux problèmes peut commander toute la philosophie que l'on a des mathématiques ainsi que la vision qu'on en transmet aux élèves, via l'enseignement : science ou scientisme ? Telle est la question. Une étude technique ne peut avoir de sens qu'en fonction d'un tel choix philosophique, fait au préalable, en toute connaissance de cause. Or, aussi curieux que cela puisse paraître, très rares sont les étudiants de mathématiques à qui l'on a demandé de réfléchir sur ce que c'était que "faire des mathématiques", de sorte qu'une fois devenus professeurs, leur enseignement repose souvent sur une idéologie qu'ils n'ont pas vraiment choisie, ne l'ayant pas vraiment explicitée.

J'en veux pour preuve une petite expérience faite à différentes reprises avec des professeurs stagiaires à l'IREM ou avec des étudiants de maîtrise. Je proposais parfois aux uns et aux autres de débattre entre eux sur un thème donné. Parmi ces thèmes, l'un d'eux était rédigé ainsi, de façon volontairement ambiguë : "Quel est le rôle de l'axiomatique et du formalisme par comparaison avec les autres types d'activités mathématiques ?" Il s'est passé à chaque fois le même phénomène : la majorité des participants au débat étaient bloqués dès le départ parce qu'ils se demandaient quels pouvaient bien être "ces autres types d'activités mathématiques" auxquels il était fait allusion. Tant bien que mal, ils finissaient par penser à des activités de rangement ou classement à l'école maternelle, ou bien à des applications des mathématiques à d'autres disciplines. Mais, dès qu'on restait à l'intérieur des mathématiques, et à un niveau au moins égal à celui de l'enseignement secondaire, il y avait, dans l'esprit de la majorité, identification à peu près complète entre "mathématiques" et "formalisme". Il ne s'agit pas ici de leur jeter la pierre : ils ne font que refléter l'état d'esprit de l'enseignement qu'ils ont reçu et dont nous sommes responsables. Simplement, leur réaction est significative de cet état d'esprit. [Je dois d'ailleurs à la vérité d'ajouter qu'il s'est trouvé aussi, à chaque fois, une petite minorité pour défendre une conception moins scholastique et replacer le formalisme dans son contexte, mais il était clair que sa thèse commençait par choquer].

Bien entendu, le sujet même de cet exposé, consacré aux problèmes et exercices, suggère d'accorder à ceux-ci une certaine place dans l'activité mathématique et son enseignement, ne serait-ce que pour réagir contre la conception, unanimement dénoncée, d'un enseignement magistral administré à des élèves passifs. Tant qu'on en reste à ce niveau de généralité, tout le monde sera d'accord (du moins en principe, car en pratique, avec des programmes qui ne s'y prêtent pas, le manque de temps et la routine, c'est une autre affaire !). Mais dès que l'on approfondit un petit peu le rôle véritable des exercices et des problèmes, les choses sont loin d'être aussi simples. Glaeser en a proposé par exemple une classification en six catégories, selon l'attitude qu'il s'agit de susciter chez l'élève : apprendre, chercher, s'entraîner, appliquer la théorie, bricoler, faire valoir ses aptitudes et connaissances. Mais il faudrait aussi discuter de l'ambiguïté de certaines de ces attitudes. Sans même insister sur le fait que la dernière (faire valoir ses aptitudes et connaissances) influence toutes les autres, tant il est vrai que la fonction éducative de l'enseignement est aliénée par sa fonction sélective, que signifient par exemple des expressions comme "apprendre" ou "appliquer la théorie" ? La question est moins académique qu'il n'y paraît. Glaeser précise dans le même article : "La pédagogie de l'exposition n'apprécie guère l'insertion d'exemples d'illustration dans un exposé théorique : ce serait une digression qui dérangerait l'Architecture de la Mathématique. Le pédagogue a cependant de multiples raisons pour chercher à appliquer ce qu'il enseigne". Et Glaeser, après avoir évoqué de façon nuancée parmi ces raisons "la nécessité de la formation professionnelle", cite ensuite la motivation : "Les applications jouent, dit-il, un rôle publicitaire, un rôle de propagande vis-à-vis de certains élèves ; principalement ceux qui ne se sentent pas intéressés par l'étude de mathématiques pour elles-mêmes".

Sans ergoter sur le fait que certaines motivations et certaines applications peuvent aussi être internes aux mathématiques, on peut résumer cette thèse ainsi : "Les exemples et exercices d'application permettent de mieux faire comprendre et apprendre la théorie". En fait, sous son apparence anodine, ce lieu commun suggère implicitement qu'enseigner les mathématiques consisterait d'abord à transmettre un certain savoir constitué essentiellement par les théories, tandis que les exercices et problèmes correspondants (quand ils existent !) ne seraient plus alors, dans la majorité des cas, que de simples techniques pédagogiques destinées à faciliter l'assimilation de ce savoir. Il est une autre conception, qui consiste à partir de problèmes que l'on peut amener les élèves ou les étudiants à se poser plus ou moins naturellement, et à forger avec eux l'outil — en l'occurrence la théorie — qui permettra de résoudre ces problèmes ainsi que d'autres du même genre (et qui d'ailleurs en engendreront d'autres à leur tour : c'est une question sur laquelle nous reviendrons plus loin). Dans le premier cas, on privilégie un savoir formel, dont on pourrait croire que c'est presque un miracle qu'il ait des applications. Ces applications, d'ailleurs, on n'aura pas forcément le temps de les traiter, si l'on veut terminer le programme, celui-ci faisant en général beaucoup plus référence aux théories formelles, voire à de simples définitions, qu'à leurs applications à des résultats profonds et à la résolution de problèmes. Le mot "application" contient à lui seul une connotation de hiérarchie qui renforce ce phénomène [cette hiérarchie se matérialisant très explicitement dans l'enseignement supérieur par le fait que l'on y confie souvent le cours théorique (dit "magistral") aux professeurs et maîtres de conférences, laissant les applications, exercices et problèmes aux assistants]. Dans le second cas, au contraire, on part du principe que l'essentiel des mathématiques consiste à poser, chercher et résoudre des problèmes, à conjecturer des résultats, à les démontrer ou à les infirmer en construisant des contre-exemples. Que, pour cela, on puisse avoir besoin d'outils, tels par exemple une définition qui permet de mieux formuler une question ou un énoncé, une axiomatisation qui permet de mieux analyser le champ de validité d'un raisonnement et d'être en mesure de l'utiliser dans d'autres situations que celles prévues initialement, ou de sorites* et lemmes techniques qui permettent d'avoir l'esprit plus libre une fois débarrassé de certaines vérifications fastidieuses, c'est absolument évident ! Mais ces définitions et ces théories, axiomatisations, constructions formelles, sorites, ne devraient rester que des outils et non constituer une fin en soi, ou être développés à un point tel que les vrais problèmes, ravalés au rang de simples "applications", n'auraient même plus toujours le temps d'être abordés : des outils n'ont d'intérêt que si l'on s'en sert, et non si l'on se contente de suggérer qu'ils admettent des "applications". Ce mot, d'ailleurs, dont nous avons plus haut signalé le danger, est finalement impropre au moins dans un grand nombre de cas : un outil ne s'applique pas, il s'utilise ! Bien entendu, il est arrivé souvent, historiquement, que le développement d'une théorie — conçue initialement pour résoudre certains problèmes — ait engendré sa propre problématique, qui a parfois supplanté l'ancienne. Ceci ne nous paraît pas contradictoire avec ce qui précède, l'essentiel étant en effet de partir d'une problématique, et d'une problématique "naturelle". Evidemment, cette notion est très subjective, aussi subjective que celle de "motivation", et doit donc être adaptée à chaque classe, si ce n'est à chaque élève : elle n'en a pas moins une signification pédagogique très claire !

Nous allons maintenant tenter d'illustrer notre thèse, en choisissant des exemples à des niveaux variés. Nous parlerons successivement :

— de l'enseignement des fractions et nombres rationnels à l'école élémentaire et au collège,

— de la géométrie élémentaire dans l'enseignement secondaire,

— de topologie générale, ainsi que d'autres théories, telles les distributions, la théorie de Galois, ou la géométrie différentielle dans l'enseignement supérieur.

Commençons donc par l'enseignement des fractions, au cours moyen de l'école élémentaire. L'idée a paru séduisante, au moins aux auteurs du programme 1970, d'essayer de donner — des fractions — une définition à la fois simple et rigoureuse, permettant de bannir les discours — jugés

* Il paraît que le mot "sorite" est mal connu. On désigne par là un résultat dont la démonstration est automatique (c'est-à-dire consiste en vérifications immédiates à partir des définitions), et dont l'intérêt ressort plutôt du lemme technique que du théorème fondamental (exemple : la linéarité de la dérivation).

oiseux — sur les parts de tarte. Actuellement, 3/4 est officiellement, au cours moyen, l'opérateur qui consiste à composer la multiplication par 3 et la division par 4 (dans l'ordre que l'on voudra, bien entendu) ; l'égalité des fractions 3/4 et 6/8 tient à l'égalité des opérateurs ; quant au produit des fractions 3/4 et 5/6 par exemple, on le définit a priori comme le composé des 2 opérateurs correspondants ; puisque la division par 1 est l'opérateur identité, l'inclusion des naturels dans l'ensemble des nouveaux nombres introduits (qu'on les appelle "rationnels", "fractionnaires", ou tout ce qu'on voudra, peu importe pour l'instant !), ainsi que la propriété qu'a le produit des fractions de prolonger le produit des naturels, se voient sans difficulté. Remarquons tout d'abord que la simplicité de la méthode n'est qu'apparente, si l'on veut que la présentation soit rigoureuse (ce qui semble bien être son but) : l'opérateur 3/4 n'est en effet défini, a priori, que sur les multiples de 4, tandis que 6/8 l'est sur les multiples de 8 ; le composé des opérateurs 3/4 et 5/6 n'est — de même — défini a priori que sur les multiples du PPCM 12 des dénominateurs 4 et 6 ; ce n'est qu'a posteriori que ces opérateurs peuvent (et devraient) être prolongés à l'ensemble de tous les naturels et même de tous les nombres rationnels. Eh bien, je ne souhaiterais pas avoir à expliquer personnellement ces nuances à des élèves du cours moyen ! Mais ce n'est pas tout : l'addition des fractions, s'intégrant mal à ce contexte, a été — purement et simplement — supprimée du programme, et n'est censée être étudiée actuellement qu'en classe de Troisième. Qu'on me comprenne bien ! Le fait de supprimer une rubrique d'un programme n'est pas choquant en soi : ce qui est choquant, c'est la raison de la suppression. A ma connaissance, en effet, personne n'a encore défendu la thèse que l'addition des fractions ne servait plus à rien, ou était bien moins utile que le produit. La seule raison de sa suppression du programme du C.M. est son inadéquation à la méthode des opérateurs imposée a priori, alors qu'au contraire cette inadéquation aurait dû être perçue comme le symptôme de l'inadaptation de cette méthode (cet "outil") à un but, c'est-à-dire à une problématique qu'on aurait dû définir a priori. C'est donc bien un exemple de déification de l'outil, au détriment de l'objet dont il est censé permettre l'étude.

Je connais en gros, trois méthodes de présentation des fractions et nombres rationnels :

— celle des opérateurs, évoquée ci-dessus,

— celle des classes d'équivalences de couples (p, q) pour la relation $pq' = p'q$,

— celle des "changements d'unité".

A quelles problématiques peuvent correspondre chacune de ces trois propositions ?

— La méthode des "opérateurs" semble bien adaptée au problème suivant : étant donné un entier q plus grand que 0, la division par q est une application qui n'est définie a priori que sur les entiers multiples de q ; on désire agrandir l'ensemble des nombres pour pouvoir la définir sur l'ensemble de tous les entiers. J'avoue avoir quelques doutes sur la possibilité de faire comprendre ce problème à des enfants du cours moyen, et de leur donner envie de le résoudre. Or, sans cette problématique prise comme point de départ, la méthode relève de l'artifice pur et simple, car pourquoi composer sinon des multiplications et des divisions, pourquoi pas des extractions de racine carrée avec des soustractions ou toute autre opération que l'on voudra ? [On pourrait, en particulier, construire les entiers relatifs par composition d'additions et de soustractions. Pourquoi cette construction est-elle jugée trop abstraite pour le C.M. et pas celle des nombres rationnels fondée sur le même principe ?].

— La méthode des classes d'équivalence de couples d'entiers (p,q) $(q \neq 0)$ pour la relation $pq' = p'q$ semble fournir la construction précise dont on a besoin pour vérifier les propriétés classiques de $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Q}^+$ (plus ou moins résumées dans l'énoncé suivant : $\mathbf{Q}$ est un corps commutatif, de caractéristique 0, totalement ordonné, archimédien). L'utilité éventuelle de la méthode relève donc de ce qu'on appelle communément "les règles du calcul algébrique". Le problème de préciser définitivement ces règles, même limité à certaines d'entre elles, ne se pose guère avant que les nombres sous-jacents aient été suffisamment manipulés, si l'on veut que ces règles ne paraissent pas artificielles et ne soient pas parachutées. En pratique, cela signifie qu'il ne saurait être question de faire allusion à ce genre de présentation avant les classes de Quatrième ou Troisième. Même à ce niveau, les difficultés pédagogiques de la méthode sont considérables : citons-en deux à titre d'exemple. La première concerne le processus mental qui consiste à définir un objet comme une classe d'équivalence : beaucoup d'élèves de faculté n'en sont pas capables. La seconde concerne la définition de l'addition : conformément aux programmes actuels, certains élèves de Quatrième n'ont encore jamais vu l'addition des fractions ; leur parachuter la règle $(p,q) + (p', q') = (pq' + qp', qq')$ sans aucune motivation, comme on le fait parfois, relève alors du délire : quel rapport l'élève de Quatrième peut-il y voir avec la fraction de tarte constituée par l'addition d'un tiers plus un quart ?

— La troisième méthode, dite des "changements d'unité", correspond précisément à la manipulation des parts de tarte, des quarts d'heure, des mi-chemins, et des millimètres : on introduit de nouvelles unités, qui sont des fractions de l'ancienne : on apprend à utiliser des millimètres aussi bien que des kilomètres, des soixantièmes de minutes aussi bien que des heures, etc... La "réduction des fractions au même dénominateur" n'est évidemment rien d'autre que l'expression de deux grandeurs dans la même unité. Quant à l'abstraction qui consiste à passer du tiers de tarte au nombre $1/3$, elle est exactement la même que celle — réclamée des élèves dès le cours préparatoire — qui consiste à passer d'un ensemble de 3 billes au nombre 3. C'est dire qu'à mon avis, seule cette troisième méthode peut relever d'une problématique naturelle pour des enfants du cours moyen, la théorie des gâteaux d'anniversaire étant, ma foi, tout aussi noble que celle des extensions d'un ensemble de nombres ou celle des corps totalement ordonnés. Elle est certainement beaucoup plus motivante pour des enfants de dix ans, et je dirai même qu'il faut l'avoir d'abord assimilée pour comprendre les théories suivantes. Bien sûr, elle présente des difficultés, que les instituteurs connaissent mieux que moi. Mais ces difficultés sont inhérentes au sujet étudié, qui est difficile, et les masquer par des artifices n'est pas une façon sérieuse de les résoudre.

Discutons à présent de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire à partir de la Quatrième. Quelle est la situation actuelle ? On y développe essentiellement en Quatrième et Troisième un échafaudage axiomatique "élémentaire" (c'est-à-dire à base d'axiomes de type heuristique, et non d'algèbre linéaire), de type affine en Quatrième et métrique en Troisième. Puis, à partir de la Seconde, on y introduit progressivement l'axiomatique des espaces affines associés à un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3, avec produit scalaire. Ces programmes contiennent surtout des définitions, et fort peu de résultats "intéressants" (j'entends par "intéressants" : capables d'"accrocher" les élèves auxquels ils s'adressent parce qu'ils sont à la fois faciles à énoncer dans un langage simple et à voir sur une figure, et en même temps suffisamment curieux ou étonnants pour faire comprendre aux élèves la nécessité d'une démonstration). Il semblerait que le but de l'axiomatique élémentaire proposée en Quatrième et en Troisième soit de préparer à celle de l'algèbre linéaire avec produit scalaire ; quant à celle-ci — introduite dans le second cycle — il semblerait qu'elle prépare à des calculs de géométrie analytique (au sens de Descartes), qui seront faits plus tard, à l'université. Tout ceci repose sur un gigantesque malentendu, fondé sur une ignorance complète de l'utilité des axiomatiques en géométrie, de ce qu'est la géométrie et des motivations accessibles aux élèves.

Tout d'abord la distinction(*) "affine" en Quatrième et "métrique" en Troisième est — à ce niveau — une absurdité aussi bien scientifique que pédagogique : une propriété affine (resp. métrique) est, en effet, une propriété invariante par le groupe affine (resp. par le groupe métrique ou conforme). Faute de définir le groupe affine par exemple (et ce serait bien abstrait de commencer par là la géométrie de Quatrième), la notion de propriété affine n'a strictement aucun sens ; elle se traduit par des interdits imposés aux élèves de façon purement artificielle : ils ont "le droit" de voir des parallèles, des milieux de segments, des rapports de longueur de segment à condition (Dieu sait pourquoi !) que ceux-ci soient portés par des droites parallèles ; mais il leur est interdit de voir des longueurs, des perpendiculaires, des cercles, des angles (alors qu'ils en ont manipulé depuis longtemps).

Ensuite, il n'est pas besoin d'être parti d'une axiomatique élémentaire, "à la Choquet", pour arriver à celle des espaces vectoriels avec produit scalaire. C'est par des manipulations géométriques qu'on amènera progressivement les élèves à un niveau où les axiomes de l'algèbre linéaire devien-

(*) Le dernier projet officiel, dont je viens d'avoir connaissance, supprime heureusement cette distinction.

dront faciles à admettre, et non par la démonstration rigoureuse d'une équivalence entre deux axiomatiques, dont la première — qualifiée d'élémentaire — est très lourde et pénible à manier. De toute façon, l'introduction du produit scalaire ne saurait être le but ultime de la géométrie pendant deux ans. Il pourrait être cependant intéressant d'étudier certains axiomes élémentaires, tels l'axiome d'incidence (par deux points distincts passe une droite et une seule) ou l'axiome d'Euclide (par tout point passe une parallèle à une droite donnée et une seule), dans le but de comparer la géométrie euclidienne avec d'autres géométries suffisamment simples (telles celle de la sphère — la Terre en géographie —, celle du cône ou du cylindre), à condition bien entendu de se moquer éperdument d'avoir un système d'axiomes complet (à la Hilbert). Hélas, cette comparaison n'est nullement suggérée dans les programmes actuels, ni d'ailleurs dans les projets dont j'ai connaissance. Quant à l'axiomatique des espaces vectoriels avec produit scalaire, introduite dans le second cycle, chacun sait qu'elle est extrêmement puissante et utile. Mais utile à quoi ? Il semble malheureusement que la question ne soit pas posée, car nul usage sérieux n'en est ensuite recommandé (mis à part la démonstration d'une ou deux formules trigonométriques du type $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$). On a même l'impression, dans la pratique, que le but ultime semble être d'avoir — enfin — une définition "rigoureuse" des angles grâce au produit scalaire, ce qui signifie qu'on les aurait ignorés avant. J'en veux pour preuve cette prétention que l'on a parfois en Seconde de classer toutes les formes bilinéaires symétriques définies positives que l'on peut mettre sur un espace de dimension 2.

Quel rapport cette classification a-t-elle avec l'utilisation d'un produit scalaire précis, d'origine heuristique, pour démontrer des propriétés de figures ? Car enfin, c'est là que réside le principal malentendu. La géométrie, c'est d'abord l'étude de figures (dans l'espace de dimension 2), ou plus généralement de "configurations" (dans un espace de dimension quelconque). Que l'axiomatique des espaces affines avec un produit scalaire, ou l'étude des transformations de ces espaces, puissent être des outils très puissants pour étudier ces figures, c'est évident ! Que l'on puisse également se passer de démontrer tous les résultats de la géométrie traditionnelle, je l'accorde bien volontiers, à condition toutefois qu'il en reste à démontrer, et qui soient "intéressants" (au sens que j'ai précisé plus haut). Mais je suis en désaccord complet avec Dieudonné quand il préconise de remplacer les figures par les transformations : les transformations doivent précisément servir à étudier les figures, et la meilleure façon (et la seule à ma connaissance !) de suggérer par le dessin ce qu'est une transformation, c'est précisément de dessiner une figure et sa transformée. Dieudonné méprise enfin les théorèmes classiques de géométrie, sous prétexte qu'ils sont devenus faciles à démontrer, ou que les chercheurs actuels en mathématiques n'en font nul usage. J'ai plusieurs objections majeures à ce point de vue. La première, c'est que l'intérêt d'un résultat est une notion toute relative, qu'on ne saurait juger en fonction du seul critère de l'état actuel de la recherche mathématique ou de la difficulté de sa démonstration. Il est d'abord incohérent d'introduire un bel outil, susceptible de rendre "trivial" la démonstration d'un résultat jugé autrefois difficile, et de négliger ensuite cette démonstration sous le prétexte qu'elle est devenue triviale : comparer les deux démonstrations du résultat relèverait d'une meilleure pédagogie et justifierait mieux la construction de l'outil. Ensuite, un résultat peut être intéressant de par son énoncé, indépendamment de la difficulté de sa démonstration : j'ai parlé tout à l'heure de l'avantage pédagogique qu'il pouvait y avoir à allécher un néophyte en lui montrant des curiosités qui se voient et s'énoncent facilement, mais ne sont pas "évidentes" a priori. Enfin, la difficulté, en mathématique, n'est pas toujours de démontrer un résultat, mais souvent de le conjecturer. Je serais curieux de savoir, par exemple, dans quelle catégorie il faut classer un théorème comme la constance de l'arc capable $\widehat{AMB}$ quand M parcourt un cercle (ou arc) passant par A et B. Est-ce un théorème qui n'intéresse plus les chercheurs d'aujourd'hui, ou qu'ils n'ont pas besoin de connaître ? Faut-il ne le démontrer que par des calculs de géométrie analytique, et alors dans quelle classe ? Au lycée ? En faculé ? Faut-il se faire une règle absolue de ne surtout pas faire de dessin en l'énonçant ? Ce qui me choque surtout dans la thèse de Dieudonné, telle qu'il l'a développée dans son livre "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire", c'est que les problèmes qu'il suggère, en remplacement de ceux qu'il fustige, relèvent presque tous — sauf oubli de ma part — de l'algèbre, et non de la géométrie. Son livre, dans lequel il s'est fait un point d'honneur de ne pas mettre une seule figure, est une illustration parfaite (si j'ose dire !) de cette déification de l'outil au détriment des problèmes, ou — si l'on préfère — relève d'une sorte "d'adoration du veau d'or" qui consiste à remplacer la géométrie par sa représentation algébrique. Même en ce qui concerne les préoccupations actuelles des chercheurs en mathématiques, je ne partage pas le point de vue de Dieudonné. D'une part, si certains des résultats algébriques qu'il suggère ont une portée très générale et des applications fécondes, tel n'est pas le cas de tous, et j'imagine volontiers l'un de ses successeurs qui vitupérera dans cinquante ans contre ce fatras de résultats dignes du "musée" ! D'autre part, s'il est normal que les chercheurs d'aujourd'hui s'intéressent en priorité aux problèmes ouverts et non à ceux qui sont résolus, tel n'est pas nécessairement le cas de leurs étudiants qui n'ont aucune raison de connaître a priori les problèmes résolus, dès lors qu'on ne leur en a jamais parlé ! En outre, la recherche actuelle de ces problèmes ouverts suppose la connaissance de pas mal de résultats classiques, que connaissent Dieudonné et les autres académiciens qui suivent plus ou moins son point de vue, qui leur fournissent des exemples et un support matériel implicite. Les mêmes théories actuelles enseignées à des étudiants ne disposant pas de ces exemples en arrière-pensée seront pour eux bien formelles et relèveront en général du verbalisme pur et simple. Et puis les problèmes sont aussi affaire de goût personnel. En fonction de quel critère, après avoir fait référence "aux grands problèmes que nous ont légués nos aieux", décrétera-t-on que les problèmes de construction à la règle et au compas sont sans intérêt et dignes du musée, tandis que l'utilisation des nombres de Fermat en arithmétique est d'un intérêt primordial ? On a vu, dans le numéro 315 du Bulletin de l'A.P.M.E.P., le lien qui existait entre les deux !

Dieudonné me semblait mieux inspiré dans son livre de "Calcul infinitésimal" qui contient une foule de beaux résultats classiques d'analyse. "Quand on a vu, écrit-il dans la préface, un étudiant de 2ème ou 3ème année de faculté des Sciences peiner pendant dix minutes pour faire un changement de variables ou une intégration par parties, on ne peut qu'être prodigieusement agacé, surtout (comme c'est parfois le cas) si le même étudiant assaisonne son ignorance d'un jargon prétentieux et inutile qu'il n'a pas su davantage assimiler". Il sait aussi que les étudiants ne font souvent que singer de mauvais maîtres : "Les mathématiciens, ajoute-t-il, en effet, qui font de l'abstraction pour l'amour de l'abstraction sont le plus souvent des médiocres" et il explique que c'est pour résoudre les "grands problèmes que nous ont légués nos prédécesseurs" que l'on a été amené à développer de nouvelles notions abstraites en assez grand nombre. Ainsi Dieudonné confirme bien que le formalisme et les abstractions ne sont que des outils pour résoudre des problèmes, et que sans les problèmes les outils sont parfaitement vains et pédants. Voyons, en effet, ce qui se passe dans l'enseignement supérieur. Bon gré, mal gré, celui-ci sert plus ou moins de modèle aux futurs maîtres et ces défauts que nous avons constatés dans les enseignements élémentaire et secondaire (à savoir, essentiellement, le manque de problématique, et l'excès de formalisme), ne sont souvent que le reflet des mêmes défauts, qui ont eu d'abord cours dans l'enseignement supérieur et sont loin d'y avoir été toujours corrigés. Commençons par l'exemple de la topologie générale. Il est bien clair que les mathématiciens en font maintenant un usage universel, y compris en arithmétique et en algèbre. Mais, initialement, lorsque la théorie qu'on enseigne maintenant sous ce nom a été mise au point, on avait essentiellement deux grandes catégories d'espaces topologiques en arrière-pensée, correspondant à deux problématiques assez distinctes :

— d'une part, en analyse les espaces fonctionnels

— d'autre part, en géométrie les variétés topologiques de dimension finie (courbes, surfaces, etc...).

Prenons, plus particulièrement, une notion comme celle de compacité. Quel est son intérêt ?

— en analyse, elle est destinée essentiellement à fournir des théorèmes d'existence (par exemple, le théorème de la représentation conforme ou l'existence de solutions à certaines équations intégrales) ;

— en géométrie, elle est destinée surtout à restreindre la catégorie des variétés étudiées qui serait souvent — sinon — beaucoup trop vaste pour qu'on puisse en dire quoi que ce soit d'un peu sérieux.

Il est clair que ces utilisations de la notion de compacité doivent être indissolublement liées à son enseignement, qu'elles seules la justifient et qu'il y aurait donc lieu de distinguer clairement trois types de résultats la concernant :

— ceux qui fournissent des critères de compacité (que ces critères soient des sorites comme par exemple le fait que toute partie fermée d'un compact est compacte, ou des théorèmes plus difficiles à démontrer comme celui d'Ascoli ou celui sur les familles normales de Montel),

— ceux qui fournissent le moyen d'utiliser la compacité en pratique :

• toute fonction numérique sur un compact est bornée et atteint sa borne supérieure,

• tout espace compact est complet,

• toute fonction continue sur un compact est uniformément continue,

— ceux, enfin, qui utilisent explicitement la compacité pour démontrer des théorèmes en analyse ou en topologie ou plus généralement en dehors de la topologie générale.

Sans ces distinctions et cette classification, que j'avoue être le premier à n'avoir pas su toujours faire, et sans ces utilisations, l'enseignement de la compacité n'est qu'un magma informe, donnant une piètre idée de l'intérêt de la théorie. Les exemples analogues sont nombreux dans l'enseignement supérieur. Pourquoi, par exemple, enseigner des sorites formelles sur les espaces vectoriels topologiques et les distributions, si leur rôle d'outil n'apparaît nulle part (par exemple, disposer d'espaces fonctionnels suffisamment grands pour que certaines équations aux dérivées partielles puissent y avoir des solutions) ? Pourquoi traiter de la théorie des extensions de corps, si l'on ne s'en sert pas pour des problèmes pratiques comme par exemple les problèmes de construction à la règle et au compas ou la résolution par radicaux d'une équation algébrique (il faut et il suffit que le groupe de Galois soit résoluble ; qu'est-ce que cela cela veut dire ? Pourquoi ne l'est-il pas pour l'équation la plus générale de degré n dès que $n \geqslant 5$?). A quoi sert un cours de géométrie différentielle où l'on se contente de manipuler des sorites et des définitions, sans jamais rien démontrer de profond ? Pourquoi un cours de topologie algébrique, si l'on n'y fait que définir des foncteurs qu'on n'a "plus le temps" d'utiliser ensuite aux vrais problèmes de topologie qui en ont motivé l'introduction ? Il est pourtant fréquent de voir commettre ces erreurs pédagogiques à l'université (et je dois bien reconnaître les avoir parfois commises !), qui consistent à oublier les problèmes, ou plutôt à ignorer les raisons initiales de l'introduction d'une théorie, qui étaient, en général, de servir dans d'autres branches des mathématiques, pour développer une problématique interne à la théorie et — comme telle — totalement coupée du passé scolaire et universitaire des étudiants à qui elle s'adresse. On pourrait multiplier les exemples.

On aura pu constater que certains principes pédagogiques ont une portée générale, de l'école élémentaire (si ce n'est de la maternelle) à l'université, conformément d'ailleurs au slogan de l'A.P.M.E.P., ce qui prouverait — s'il en était besoin — que celui-ci, loin d'être démagogique, traduit en fait un besoin profond !