8

EXAMENS ET CONCOURS

Le **Bulletin** *est d'autant plus heureux de publier l'article du Professeur Choquet que le souci marqué par celui-ci dans son analyse rejoint le nôtre à propos de tous les sujets d'examen ou de concours. Ajoutons que l'A.P.M.E.P. n'est pas spécialement attachée à l'institution du Concours général. Ce qui ne nous empêche pas de saluer avec plaisir le succès (2ème prix, le premier n'ayant pas été décerné) du fils de notre Collègue et ancien Président François Colmez ; cordiales félicitations au fils et aux parents.*

Le texte du problème est en annexe.

Le problème du Concours général 1979

par Gustave CHOQUET, Université Paris VI

Six longues pages pour ce problème en 5 parties ! Or les cinq ou six questions des Olympiades tiennent en général en moins de deux pages ; elles sont courtes, stimulantes, et faciles à comprendre ; elles permettent de déceler les qualités d'imagination et de rigueur.

Faut-il vraiment que notre Concours général prenne pour modèle les problèmes du bac C, presque toujours longs et fastidieux et où le travail est si bien mâché qu'ils ne permettent souvent de juger que des qualités de soin et de résistance à l'ennui.

A quoi servent les qualités d'invention quand dès le début on vous prend par la main et qu'on vous impose un itinéraire ? C'est bien dommage, surtout quand cet itinéraire n'est pas le meilleur possible.

Et pourtant le thème de ce problème est bien séduisant et susceptible de développements intéressants à tous les niveaux ; Bac C, Concours général, Agrégation... et même Recherche.

Il s'agit de déterminer l'espace vectoriel E des fonctions réelles f sur $]-1, 1[$ vérifiant pour tout x la relation :

$$(1) \qquad f(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Dans ce commentaire, nous noterons E_o le sous-espace de E constitué par les fonctions continues, et par E_c le sous-espace de E_o constitué par les fonctions qui ont un prolongement continu en -1 et 1.

Le I est la construction d'une $f \in E_o$ affine par morceaux. Pourquoi l'auteur n'a-t-il pas éclairé sa lanterne en intervertissant I et II ? En effet, le II établit que toute $f \in E$ est déterminée par sa restriction $\tilde{f}$ à $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (ou même plus généralement à $\left]b, b+1\right]$, où $b \leqslant 0$), et que $\tilde{f}$ peut être donnée arbitrairement sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
En outre, on a $f \in E_o$ si $\tilde{f}$ est continue, avec :

$$(2) \qquad \tilde{f}(0) = \tilde{f}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{f}\left(-\frac{1}{2} + 0\right)$$

Ce II est une clef, et quand on l'a compris, le I, s'il lui succède, cesse d'être un parcours dans le brouillard.

On passe dans le III à la détermination des $f \in E_c$; ici encore l'auteur refuse d'éclairer sa lanterne, et c'est doublement dommage : d'une part il impose une relation $g(x) = t(2x) - t(x)$ dont on ne voit pas l'origine ; d'autre part il laisse l'impression de n'avoir construit ainsi que certaines solutions, alors qu'en fait il les a toutes obtenues.

Et puis, pourquoi ne jamais « annoncer la couleur », et par exemple commencer ce III en disant : « On se propose maintenant de déterminer les $\tilde{f}$ de $\mathcal{C}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ associées à une $f \in E_c$? » Or rien n'est ici mystérieux : pour toute $f \in E_c$, une récurrence facile montre qu'on a :

$$(3) \qquad f(1-\lambda) = f(1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} f\left(\frac{-\lambda}{2^i}\right) \text{ pour tout } \lambda \in [0,2]$$

et une relation analogue en remplaçant 1 par -1, et λ par $-\lambda$. La fonction $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{1}^{n} f\left(\frac{x}{2^i}\right)$ est donc définie et continue sur $[-2, 2]$, et $f(x) = s(2x) - s(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Cette s peut être un élément arbitraire de $\mathcal{C}[-1, 1]$ soumis à la seule restriction que $f(0) = f(\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})$, ce qui s'écrit :

$$s(1) + s(-1) = s(\frac{1}{2}) + s(-\frac{1}{2})$$

C'est ce dernier point qui est l'objet du III.

Le IV est fort long et peu excitant ; il consiste en l'étude détaillée de deux éléments de E_o ; sa motivation semble être de calculer diverses limites.

C'est le V qui m'a paru le plus intéressant, simplement parce qu'on n'y guide pas trop le candidat. Il s'agit de l'étude des fonctions Ψ sur $]-1, 1[$ à dérivée continue, et telles que :

$$\Psi(x) = 2\Psi(\frac{x-1}{2}) + 2\Psi(\frac{x+1}{2})$$

(par dérivation, le lien avec l'espace E_o est évident). Essentiellement on y fait étudier la fonction Ψ (et son graphe) telle que Ψ' soit la fonction affine par morceaux étudiée au I.

Cela, enfin, conduit à un peu de géométrie !

Conclusion. J'ai dit que le thème du problème me semblait séduisant, et l'essentiel de mes critiques nait du regret que l'auteur se soit plié aux canons actuels du Bacc. C, au lieu de donner aux candidats quelques heures de plaisir par sa très belle idée de départ.

Pourquoi s'enliser dans les calculs du IV au lieu de s'orienter vers des questions bien naturelles :

— Montrer qu'aucun élément de E_c (autre que $x \longmapsto kx$) n'a une dérivée continue.

— Construire les éléments de E à dérivées continues jusqu'à l'ordre p, ou indéfiniment dérivables, etc.

Pour montrer la richesse, à tous les niveaux, de l'équation (1), je terminerai en posant à mon tour un problème :

Problème : Etudier les solutions de (1) (autres que $x \longmapsto kx$) qui sont analytiques sur $]-1, 1[$: domaine d'holomorphie, représentation explicite, etc.

Annexe

SESSION DE 1979

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classes terminale C et terminale E)

DURÉE : 6 heures

Toutes les applications considérées dans le problème prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels; tous les intervalles envisagés sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Les figures demandées, exécutées à l'échelle indiquée, seront présentées sur feuille intercalaire. La rigueur des démonstrations, la clarté de la rédaction, constituent des éléments importants d'appréciation.

I

1° Étudier l'application u :

$$u : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 1 - 2x + 2|x| - |1 - 4x|$$

et la représenter graphiquement (repère orthonormé, unité : 8 cm).

2° On considère l'application :

$$\left]-1, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 4x + 2 & \text{si } x < -\dfrac{1}{2} \\ u(x) & \text{si } x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Démontrer que c'est la seule application v, définie sur $\left]-1, \dfrac{1}{2}\right]$, prolongeant u et vérifiant la propriété :

$$\forall x \in]-1, 0], \quad v(x) = v\left(\frac{x-1}{2}\right) + v\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

3° Démontrer qu'il existe une unique application w, définie sur $]-1,1[$, prolongeant l'application v précédente et vérifiant la propriété :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad w(x) = w\left(\frac{x-1}{2}\right) + w\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Expliciter, pour tout élément x de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, la valeur $w(x)$.

L'application w est-elle continue?

Tracer la représentation graphique de w (on achèvera la figure commencée au 1°).

4° Pour tout élément x de $]0,1[$ on pose :

$$Y(x) = \int_0^x w(\xi)\, d\xi, \quad Z(x) = \int_{-x}^{x} w(\xi)\, d\xi.$$

Sans chercher à expliciter les fonctions Y et Z, établir l'existence de limites de ces fonctions au point 1, et calculer ces limites.

II

On considère l'ensemble E constitué des applications f, définies sur l'intervalle $]-1,1[$, qui vérifient la propriété :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1° Démontrer que si deux applications, éléments de l'ensemble E, ont même restriction au segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, elles sont égales.

2° On considère un réel positif ou nul α, et un réel strictement positif β, dont la somme est au plus égale à 1.

Démontrer que, si un élément de l'ensemble E s'annule en tout point de l'intervalle $]-1+\alpha, 1-\beta]$, alors cet élément de E s'annule en tout point de l'intervalle $\left]-1+\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\beta}{2}\right]$; en déduire qu'il est exactement l'application nulle sur l'intervalle $]-1,1[$.

3° On considère un réel a appartenant à l'intervalle $[-1\ ,\ 0[$.

Démontrer que toute application φ, définie sur l'intervalle $]a\ ,\ a+1]$, admet un unique prolongement $\overline{\varphi}$ à l'intervalle $]-1\ ,\ 1[$ qui est élément de l'ensemble E.

On suppose l'application φ continue; est-ce suffisant pour que $\overline{\varphi}$ le soit?

III

1° Étant donné une application t, définie sur le segment $[0\ ,\ 1]$ et continue au point 0, on suppose qu'une application g, élément de l'ensemble E, vérifie la propriété :

$$\forall x \in \left[0\ ,\ \frac{1}{2}\right],\quad g(x) = t(2x) - t(x).$$

Pour tout entier naturel n, calculer la valeur $g\left(-1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Plus généralement, on choisit un réel λ dans l'intervalle $]0\ ,\ 1]$.

Démontrer que la différence $g\left(-1 + \frac{\lambda}{2^n}\right) - t\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)$ est indépendante du naturel n.

2° L'application t étant donnée, démontrer qu'il existe une unique application g, élément de l'ensemble E, vérifiant :

$$\forall x \in \left[0\ ,\ \frac{1}{2}\right],\quad g(x) = t(2x) - t(x),$$

et prolongeable par continuité au point -1.

Pour tout élément x de $]-1\ ,\ 0[$, expliciter la valeur $g(x)$.

3° On considère l'application w obtenue en I. 3°. Vérifier qu'il existe une application τ, définie sur $[0\ ,\ 1]$ et s'annulant au point 0, telle que l'on ait :

$$\forall x \in \left[0\ ,\ \frac{1}{2}\right],\quad w(x) = \tau(2x) - \tau(x).$$

4° A tout couple (r, s) d'applications polynômes, s'annulant au point 0, on associe l'élément f de E déterminé par les propriétés :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right], \quad f(x) = r(2x) - r(x),$$

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = s(2x) - s(x).$$

Quels sont les seuls couples (r, s) pour lesquels cette application f est prolongeable par continuité en chacun des deux points -1 et 1?

IV

On désigne par h et k les deux éléments de l'ensemble E déterminés respectivement par les propriétés :

$$\forall x \in]-1, 0], \quad h(x) = -3x^2 - \frac{3}{2}x;$$

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right], & k(x) = -3x^2 - \frac{3}{2}x, \\ \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], & k(x) = 0. \end{cases}$$

1° Déterminer une application polynôme q vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(2x) - q(x) = -3x^2 - \frac{3}{2}x.$$

2° On considère un réel μ appartenant à l'intervalle $[1, 2[$. Pour tout naturel non nul n, expliciter les valeurs :

$$h\left(1 - \frac{\mu}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad k\left(1 - \frac{\mu}{2^n}\right).$$

En particulier calculer les valeurs :

$$h\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \quad k\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \quad h\left(1 - \frac{3}{2^{n+1}}\right), \quad k\left(1 - \frac{3}{2^{n+1}}\right).$$

L'application h est-elle continue? Est-elle prolongeable par continuité au point 1?

3° On considère un réel v appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Pour tout naturel non nul n, expliciter la valeur $k\left(-1+\frac{v}{2^n}\right)$; en particulier calculer $k\left(-1+\frac{1}{2^n}\right)$ et $k\left(-1+\frac{3}{2^{n+2}}\right)$.

L'application k est-elle continue? Est-elle prolongeable par continuité au point -1? au point 1?

4° On désigne par H et K les courbes représentatives respectives des applications h et k dans un même repère orthonormé d'un plan affine euclidien.

Vérifier qu'il existe trois paraboles Π, Π_1, Π_2 telles que, pour tout naturel n :

- le point de H d'abscisse $1-\frac{1}{2^n}$ appartient à Π;
- le point de H d'abscisse $1-\frac{3}{2^{n+1}}$ appartient à Π_1 (et, en ce point, H et Π_1 sont tangentes);
- le point de K d'abscisse $1-\frac{3}{2^{n+1}}$ appartient à Π_2 (et, en ce point, K et Π_2 sont tangentes).

Tracer sur une même figure (unité : 8 cm) les cinq courbes H, K, Π, Π_1, Π_2.

5° Pour tout naturel non nul n, calculer les intégrales :

$$A_n = \int_{1-\frac{1}{2^{n-1}}}^{1-\frac{1}{2^n}} [h(\xi) - k(\xi)]\, d\xi \quad , \quad B_n = \int_{-1+\frac{1}{2^{n+1}}}^{-1+\frac{1}{2^n}} [h(\xi) - k(\xi)]\, d\xi.$$

Utiliser ces résultats pour obtenir, en justifiant leur existence, les limites :

$$\lim_{x \to 1} \int_0^x [h(\xi) - k(\xi)]\, d\xi \quad , \quad \lim_{x \to -1} \int_0^x [h(\xi) - k(\xi)]\, d\xi.$$

V

On considère l'ensemble F constitué des applications ψ, définies sur l'intervalle $]-1\,,1[$, qui sont dérivables et qui vérifient la propriété :

$$\forall x \in]-1\,,1[\,, \quad \psi(x) = 2\,\psi\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\,\psi\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1° Déterminer toutes les applications polynômes dont la restriction à l'intervalle $]-1\,,1[$ est élément de l'ensemble F.

2° On considère l'application p :

$$p :]-1, 0] \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x^2 + 2x + b & \text{si } x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\[2ex] c & \text{si } x > -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Démontrer qu'il existe un unique couple $(b\,,c)$ de réels, qu'on déterminera, permettant de prolonger p à l'intervalle $]-1\,,1[$ en un élément de l'ensemble F. Vérifier que ce prolongement est unique; on le désigne par ϖ.

3° Pour tout naturel n, calculer les valeurs $\varpi\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\varpi\left(1-\dfrac{3}{2^{n+1}}\right)$, ainsi que les nombres dérivés $\varpi'\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\varpi'\left(1-\dfrac{3}{2^{n+1}}\right)$.

L'application ϖ est-elle prolongeable par continuité au point 1?

4° Pour tout élément x de l'intervalle $]0\,,1[$, expliciter la valeur $\varpi(x)$.

La courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la restriction de ϖ à l'intervalle $[0\,,1[$ est la réunion d'arcs de paraboles. Placer ces arcs par rapport à la droite Δ représentant la fonction affine $x \longmapsto \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{6}$. Comment les arcs situés d'un même côté de Δ peuvent-ils se déduire de l'un d'eux ?

Tracer la courbe représentative de l'application ϖ (unité : 12 cm).