

# 1

## ETUDES

### Thème et variations sur la série harmonique\*

par Daniel REISZ, IREM de Dijon

Dans les affaires de convergence et de divergence et même plus généralement en mathématiques on a souvent les correspondances suivantes :

phénomène franc et massif  $\longleftrightarrow$  démonstration facile et "grossière"  
(majorations ou minorations "coup de massue" par exemple)

phénomène fin, peu net  $\longleftrightarrow$  démonstration fine, délicate

Parfois un phénomène évident nécessite une démonstration délicate, mais plus rares sont les situations expérimentalement peu nettes dont la démonstration est d'une grande simplicité. Il en est ainsi avec la série harmonique et de certaines séries apparentées où des démonstrations élémentaires (toutes accessibles à des élèves de terminale) mettent en évidence des résultats expérimentalement non évidents, voire paradoxaux. En cela, l'étude de telles situations me paraît particulièrement motivante.

#### I— La série harmonique

Soit (s) la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

et

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Un résultat pour le moins classique en classe de terminale est le fait que cette série diverge. Plus précisément

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$$

\* Entre le moment où cet article fut écrit et celui où il est publié, est paru, aux Editions CEDIC, "Joyaux mathématiques" (tome 2) de Ross HONSBERGER. On y trouvera, parmi d'autres joyaux, quelques compléments sur la série harmonique.

Les méthodes de démonstration sont nombreuses et souvent très élémentaires. Rappelons les idées-clés de quelques-unes :

paquet de Cauchy :

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$$

somme de Riemann associée à l'intégration de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  :

$$s_n > \text{Log } n$$

théorème de la valeur moyenne :

$$\frac{1}{n+1} < \text{Log}(n+1) - \text{Log } n < \frac{1}{n}$$

En voici une autre très "convaincante" :

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{avec } 10^p \leq n < 10^{p+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{99}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{10^{p-1}} + \dots + \frac{1}{10^p - 1}\right) + \frac{1}{10^p} + \dots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Les 9 fractions de la première parenthèse sont toutes supérieures à 1/10, les 90 de la suivante à 1/100, etc. Donc

$$s_n > \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \dots + \frac{9 \times 10^{p-1}}{10^p} + \frac{1}{10^p} + \dots + \frac{1}{n}$$

soit encore

$$s_n > \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10} \quad (p \text{ termes})$$

$$s_n > \frac{9p}{10}$$

Or il résulte de  $10^p \leq n < 10^{p+1}$  que, si  $n$  tend vers l'infini, alors  $p$  tend également vers l'infini, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{9p}{10} \quad \text{et le résultat annoncé.}$$

Regardons maintenant les choses de façon expérimentale :

$s_1$	=	1
$s_2$	=	1,5
$s_3$	≈	1,83
$s_4$	≈	2,08
$s_{10}$	≈	2,93
$s_{100}$	≈	5,19
$s_{1\ 000}$	≈	7,49
$s_{10\ 000}$	≈	9,79
$s_{100\ 000}$	≈	12,09

Ces résultats ont été calculés avec une calculatrice programmable. Pour atteindre  $s_{100\ 000}$ , il faut la laisser fonctionner toute une nuit !

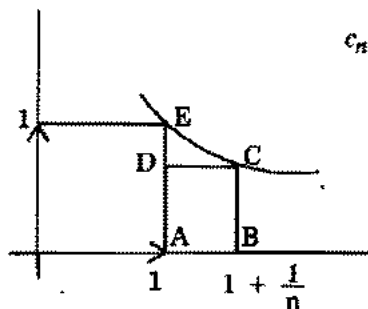
On voit ainsi une croissance qui, très rapidement, devient excessivement lente et il est vain d'espérer dépasser 20 avec une calculatrice de poche.

Essayons maintenant de mieux cerner cette lente divergence en étudiant la fameuse suite  $c_n$  définie par

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \text{Log } n = s_n - \text{Log } n$$

On démontre facilement sa convergence :

- $(c_n)$  est une suite décroissante.



$$\begin{aligned}
 c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{n+1} - \left[ \text{Log}(n+1) - \text{Log } n \right] \\
 &= \frac{1}{n+1} - \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \text{aire du rectangle } ABCD - \text{aire} \\
 &\quad \text{du trapèze curviligne } ABCE \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

- pour tout  $n$ ,  $c_n > 0$

Résultat évident puisque  $s_n$  apparaît comme la somme de Riemann majorante de

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \text{Log } n$$

donc  $s_n > \text{Log } n$ , i.e.  $c_n > 0$

La détermination d'une valeur approchée de la limite de  $(c_n)$  peut faire l'objet d'un intéressant problème d'analyse numérique et même permettre l'introduction d'un processus d'accélération de convergence (voir par exemple [2] ou [3]). Rappelons ici, sans aucune démonstration, que

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \approx 0,577 22$$

$\delta$  est connue sous le nom de *constante d'Euler* : c'est en effet Euler qui a comparé pour la première fois  $s_n$  et  $\text{Log } n$  au voisinage de l'infini et cela dans le premier traité didactique d'analyse "Introductio in Analysin Infinitorum" (1748). On s'aperçoit donc que  $s_n$  et  $\text{Log } n$  ont même comportement asymptotique et que, pour  $n$  grand,  $\text{Log } n$  est une approximation de  $s_n$  :

$$\begin{cases} s_n = \delta + \text{Log } n + u_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}$$

(On sait que  $u_n \sim \frac{1}{n}$  ; voir par exemple [2])

En réalité, pour ce qui nous préoccupe, on peut se contenter de l'encadrement trivial

$$\text{Log } n < s_n < 1 + \text{Log } n$$

obtenu par l'utilisation des sommes de Riemann attachées aux intégrales

$$\int_1^n \frac{dx}{x} \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$$

Force est alors d'accepter la lenteur de la divergence de la série harmonique alors que cette lenteur aurait plutôt induit à penser à un phénomène de convergence. Profitions de nos résultats pour donner quelques approximations numériques de  $s_n$  :

$s_{1\ 000}$	$\approx 7,49$	(déjà obtenu par calcul direct)
$s_{10\ 000}$	$\approx 9,79$	
$s_{100\ 000}$	$\approx 12,09$	
$s_{1\ 000\ 000}$	$\approx 14,40$	
$s_{10\ 000\ 000}$	$\approx 16,70$	
$s_{100\ 000\ 000}$	$\approx 19,00$	
$s_{1\ 000\ 000\ 000}$	$\approx 21,30$	

Remarquons que les approximations obtenues par la formule

$$s_n \approx \gamma + \text{Log } n \quad \text{pour } n \text{ grand}$$

sont bien supérieures aux deux décimales citées ici.

## II— Quelques séries “extraites” de la série harmonique

Puisque la série harmonique diverge très lentement, on est intuitivement amené à penser qu'il suffit de pas grand chose pour la rendre convergente. La différence entre ce genre d'impression et une réalité beaucoup plus complexe et parfois paradoxale est encore une situation pédagogique à exploiter.

Je n'insisterai pas sur le fait trivial suivant : la suppression d'un nombre fini de termes dans  $s_n$  n'affectera pas le comportement de la série. Je propose donc de supprimer dans  $s_n$  la « moitié » des termes, ce qui a priori est énorme et va probablement la rendre convergente.

*1ère procédure : « suppression d'un terme sur deux »*

On est alors en présence de l'une des deux suites (a) ou (b) définies par

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots + \frac{1}{2n}$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

De façon évidente :

$$a_n = \frac{s_n}{2} \quad \text{et} \quad b_n > a_n$$

et les deux suites (a) et (b) sont donc encore divergentes. La suppression de 50 % des termes de  $s_n$  ne semble donc pas suffisante. Et pourtant !

2ème procédure : « suppression de la première moitié des termes »

Soit  $(d)$  la suite définie par

$$d_n = s_{2n} - s_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

En considérant  $d_n$  comme une somme de Riemann associée à

$$\int_n^{2n+1} \frac{dx}{x} = \text{Log} \frac{2n+1}{n}$$

il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \frac{2n+1}{n} = \text{Log} 2$$

et la suite  $(d)$  est donc convergente !

Comme quoi le problème n'est pas dans la quantité des termes supprimés, mais dans leur qualité !

Abordons maintenant un aspect a priori encore plus paradoxal en considérant la suite  $(e)$  définie par

$$e_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{88} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{n}$$

obtenue en supprimant dans  $s$ , tous les termes  $1/k$  où  $k$  contient au moins une fois le chiffre 9 dans son écriture décimale. Très superficiellement, on a ainsi l'impression de supprimer 10 % des termes. En y regardant d'un peu plus près, on sent bien qu'il y en aura un peu plus (20 % , 30 % peut-être...). En réalité on les supprime "presque tous" et la suite  $(e)$  converge ! Avant de le démontrer, signalons qu'on trouvera dans [1] des éclaircissements sur ces questions ; on y démontre en particulier que « presque tous » les nombres contiennent au moins un 9 ou tout autre chiffre ou même toute séquence de chiffres (par exemple 1937 qu'il suffit de penser comme un chiffre dans la base "dix mille").

Mais revenons-en à la suite  $(e)$  et démontrons sa convergence. Écrivons  $e_n$  sous la forme

$$e_n = (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{88}) + (\frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{888}) + \dots$$

c'est-à-dire en regroupant les termes restants de la forme  $1/p$  par paquets vérifiant  $10^k \leq p < 10^{k+1}$ .

Alors

$$e_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

où tous les termes de la somme partielle  $a_k$  sont de la forme  $1/p$  avec

$$10^k \leq p < 10^{k+1} \quad \text{et } p \text{ sans chiffre } 9.$$

On peut voir que

$$a_0 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} < 9 \times 1 = \frac{9}{10^0}$$

$$a_1 = \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{88} < 9^2 \times \frac{1}{10} = \frac{9^2}{10^1}$$

$$a_2 = \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{888} < 9^3 \times \frac{1}{100} = \frac{9^3}{10^2}$$

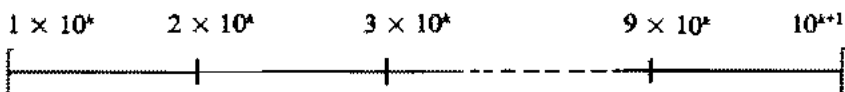
résultats qui incitent à une démonstration par récurrence, prouvant que

$$a_k < \frac{9^{k+1}}{10^k} \quad \text{pour tout entier naturel } k.$$

Pour cela, supposons

$$a_i < \frac{9^{i+1}}{10^i} \quad \text{vrai pour } i = 1, 2, 3, \dots, k-1$$

et divisons l'intervalle  $[10^k, 10^{k+1}[$  (dans  $\mathbf{N}$ ) en neuf segments.



Tous les termes du dernier segment  $[9 \times 10^k, 10^{k+1}[$  sont supprimés puisque leur écriture commence par un 9. Dans les 8 autres segments, les termes supprimés précédemment (jusqu'à  $10^k$ ), se retrouvent dans chacun d'eux, précédés du chiffre 1 dans le premier segment, du chiffre 2 dans le second segment, etc. Dans chaque segment, hypothèse de récurrence, le nombre de termes restant est inférieur à

$$9^1 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^k$$

et donc le nombre de fractions restant dans  $a_k$  est inférieur à

$$8(9^1 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^k) = 8 \frac{9(9^k - 1)}{9 - 1} = 9^{k+1} - 9 < 9^{k+1}$$

D'où le résultat.

La suite  $(e)$  est donc majorée par la série géométrique  $(e')$  définie par

$$e'_k = \frac{9^1}{10^0} + \frac{9^2}{10^1} + \frac{9^3}{10^2} + \dots + \frac{9^{k+1}}{10^k}$$

dont la limite est 90.

La convergence de  $(e)$  en résulte, mais j'ignore tout de sa limite ! (Avis aux amateurs)

Pour finir en beauté, exhibons un dernier résultat. Les élèves de terminale savent que l'ensemble des nombres premiers est infini et la manipulation du crible d'Eratosthène leur a fourni une première approche de la loi de raréfaction des nombres premiers. On peut d'ailleurs leur signaler le fameux résultat

$$\Pi(x) \sim \frac{x}{\text{Log } x} \quad \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Pi(x) \text{Log } x}{x} = 1 \right)$$

où  $\Pi(x)$  désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égal à  $x$ . La démonstration de ce résultat est pratiquement hors de leur portée, encore qu'il en existe une démonstration "élémentaire" (voir par exemple [1]).

Posez aux élèves la devinette suivante : dans un pays décidé à faire des économies d'essence, les voitures sont immatriculées de 1 à  $N$  ( $N$  grand).

Un technocrate A propose d'interdire durant un week-end la circulation des voitures dont le numéro d'immatriculation ne contient pas le chiffre 9.

Un technocrate B propose la même interdiction pour celles dont le numéro d'immatriculation est premier. Laquelle des deux mesures est la plus sévère ? Peu d'élèves penseront que c'est la seconde.

En relation avec cela, démontrons l'étonnant mais classique résultat suivant (dû, encore une fois, à Euler) :

La suite  $(q)$  définie par

$$q_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{p_n}$$

où  $p_n$  est le  $n$ ème nombre premier, est divergente.

La démonstration élémentaire proposée ici est due à Erdős. Désignons par  $N_i(x)$  le nombre d'entiers  $n$  inférieurs ou égaux à  $x$  et dont la décomposition en facteurs premiers ne contient que les nombres premiers  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i$ . (Exemples :  $N_3(20) = 14$ ,  $N_2(15) = 8$ ). Alors, en désignant par  $E(x)$  la partie entière de  $x$ ,

$$E(x) - N_i(x)$$

indique le nombre d'entiers  $n$  inférieurs ou égaux à  $x$  et qui contiennent un facteur premier  $p > p_i$ . Un entier  $n$  décompté par  $N_i(x)$  peut toujours s'écrire sous la forme

$$n = n_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} p_2^{\alpha_3} p_3^{\alpha_4} \dots p_k^{\alpha_k}$$

où  $\alpha_i = 1$  ou  $0$  (les autres facteurs premiers restants, forcément d'exposants pairs, étant regroupés en  $n_1^2$ ). Il existe  $2^k$   $k$ -uplets

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$$



et comme par ailleurs  $n_1^2 \leq x$ , soit encore  $n_1 \leq \sqrt{x}$ , on a la majoration suivante :

$$N_k(x) \leq 2^k \sqrt{x}$$

Supposons maintenant que la suite  $(p)$  converge ; il existerait alors  $k_0$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p_{k_0}} + \frac{1}{p_{k_0+1}} + \dots + \frac{1}{p_n} \right) < \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$x \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p_{k_0}} + \frac{1}{p_{k_0+1}} + \dots + \frac{1}{p_n} \right) < \frac{1}{2} x$$

Comme il existe au plus  $x/p_i$  entiers inférieurs ou égal à  $x$  et divisibles par  $p_i$ , on a

$$\begin{aligned} x - N_{k_0}(x) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{p_{k_0}} + \frac{x}{p_{k_0+1}} + \dots + \frac{x}{p_n} \right) \\ &\leq x \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p_{k_0}} + \frac{1}{p_{k_0+1}} + \dots + \frac{1}{p_n} \right) \\ &\leq \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Or

$$x - N_{k_0}(x) \leq \frac{x}{2} \implies \frac{x}{2} \leq N_{k_0}(x)$$

d'où la double inégalité

$$\frac{x}{2} \leq N_{k_0}(x) \leq 2^{k_0} \sqrt{x}$$

soit, en particulier

$$\frac{x}{2} \leq 2^{k_0} \sqrt{x}$$

visiblement fausse pour  $x$  assez grand.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HARDY and WRIGHT : An Introduction to the Theory of Numbers ; Oxford University Press (existe également en allemand)
- [2] A. ENGEL : Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique ; CEDIC.
- [3] C. WASSERER et D. REISZ : "Grand Prix de Formule I" in "Activités numériques", N° spécial du Bulletin de l'IREM de Dijon.