1

ETUDES

Les applications f de R dans R telles que, pour tout couple (x,y) de nombres réels, f(x+y) = f(x)+f(y)

par J. LEGRAND, IREM de Bordeaux *

Toute application $\mathbb{R}$-linéaire f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $f : x \to ax$. Alors, pour tout couple (x,y) de nombres réels,

(1) $$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Ainsi, f est un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ et, dans le cas où $a \neq 0$, un automorphisme de ce groupe.

La question se pose de déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation (1), autrement dit, tous les endomorphismes du groupe additif $\mathbb{R}$.

I. Etude des endomorphismes du groupe additif R.

1. *Soit f un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$. Alors, pour tout nombre réel x et pour tout nombre rationnel r,*

(2) $$f(rx) = rf(x).$$

En effet, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0).$$

D'où $f(0) = 0$. On en déduit par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$f(nx) = n\,f(x).$$

D'autre part, la fonction f est impaire, car

$$f(x) + f(-x) = f[x + (-x)] = f(0) = 0.$$

* *J.L. OVAERT* a contribué à l'article sous forme de remarques.

Il en résulte que, pour tout élément n de $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$,

$$f(nx) = -f(-nx) = -(-nf(x)) = nf(x).$$

La relation (2) est donc vérifiée lorsque r est un entier rationnel, i.e. un élément de $\mathbf{Z}$. Soit maintenant r un nombre rationnel, que nous pouvons écrire sous la forme $r = p/q$, où $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. D'après ce qui précède,

$$q\,f(\frac{p}{q}\ x) = f(px) = pf(x).$$

Donc
$$f(\frac{p}{q}\ x) = \frac{p}{q}\ f(x).$$

En spécialisant la relation (2) au cas où $x = 1$, nous obtenons le résultat suivant :

Soit f un endomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$. *Alors, pour tout nombre rationnel r,*

$$f(r) = r\,\mathrm{f}(1).$$

Autrement dit, l'application f induit sur $\mathbf{Q}$ une homothétie.

2. *Les endomorphismes continus du groupe additif* $\mathbf{R}$ *ne sont autres que les applications* $\mathbf{R}$*-linéaires, c'est-à-dire de la forme $x \longmapsto ax$.*

Ce résultat, dû à Cauchy [1], est une conséquence de ce que l'on vient de voir, et du fait que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Soit en effet f une fonction numérique continue sur $\mathbf{R}$ et vérifiant la relation (1). Soit x un nombre réel. Il existe une suite (r_n) de nombres rationnels convergeant vers x. Puisque f est continue sur $\mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n).$$

Mais $f(r_n) = r_n\mathrm{f}(1)$. Posons $a = \mathrm{f}(1)$. Alors

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} (ar_n) = a \lim_{n \to +\infty} r_n = ax.$$

REMARQUE. Soit f un endomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$. *Si f est continue en un point x_o, alors f est continue sur* $\mathbf{R}$.

En effet, pour tout couple (x,h) de nombres réels,

$$f(x + h) = f(x) + f(h) \quad \text{et} \quad f(x_o + h) = f(x_o) + f(h).$$

D'où
$$f(x + h) - f(x) = f(x_o + h) - f(x_o),$$

ce qui implique :

$$\lim_{h \to 0} [f(x + h) - f(x)] = \lim_{h \to 0} [f(x_o + h) - f(x_o)] = 0,$$

d'où la continuité de f au point x.

3. *Soit f un endomorphisme du groupe additif* **R**. *S'il existe un intervalle de* **R** *non réduit à un point sur lequel f est majoré ou minoré, alors f est* **R**-*linéaire*.

Soit en effet f une fonction numérique vérifiant la relation (1). On suppose qu'il existe un intervalle $[x_o - h, x_o + h]$, où $h > 0$, et un nombre réel positif A tels que, pour tout point x de cet intervalle, $f(x) \leqslant A$. Alors, pour tout élément u de $[-h, h]$,

$$f(u) = f(x) - f(x_o) \leqslant A - f(x_o).$$

Mais, comme f est impaire,

$$-f(u) = f(-u) \leqslant A - f(x_o).$$

Il en résulte que

$$|f(u)| \leqslant A - f(x_o).$$

Soit t un nombre réel non nul. Puisque **Q** est dense dans **R**, il existe un nombre rationnel r tel que

$$\frac{|t|}{h} \leqslant r \leqslant 2\frac{|t|}{h}.$$

D'après la relation (2),

$$f(t) = f\left[r\left(\frac{t}{r}\right)\right] = rf\left(\frac{t}{r}\right).$$

Comme $\frac{|t|}{r} \leqslant h$, $\frac{t}{r}$ appartient à $[-h, h]$. D'où

$$|f(t)| = r\left|f\left(\frac{t}{r}\right)\right| \leqslant r[A - f(x_o)] \leqslant 2\frac{|t|}{h}[A - f(x_o)].$$

Finalement, pour tout nombre réel non nul t,

$$|f(t)| \leqslant \frac{2}{h}[A - f(x_o)]|t|.$$

Nous en déduisons que $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$,

ce qui montre que f est continue en 0, et donc sur **R**, d'après la remarque précédente.

Si f est minorée sur $[x_o - h, x_o + h]$, alors $-f$ est majorée sur cet intervalle, et $-f$ vérifie la relation (1). Par suite, $-f$ est **R**-linéaire ; on en conclut que f est encore **R**-linéaire.

4. *Soit f un endomorphisme du groupe additif* **R**, *mesurable (au sens de Lebesgue) sur un intervalle de* **R** *non réduit à un point. Alors f est* **R**-*linéaire*.

D'après la partie 3, il suffit de montrer que tout endomorphisme f du groupe additif **R** mesurable sur $[x_o - 2h, x_o + 2h]$, où $h > 0$, est majoré sur $[x_o - h, x_o + h]$.

La démonstration qui suit est assez élaborée (voir aussi [4]) ; elle repose sur le lemme suivant :

Soit f un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$, *mesurable sur* $[x_o - 2h, x_o + 2h]$, $h > 0$. *Pour tout élément* x_1 *de* $[x_0 - h, x_0 + h]$, *l'ensemble*

$$E_{x_1} = \{x \mid x \in [x_1 - h, x_1 + h] \text{ et } f(x) \geqslant f(x_1)\}$$

est mesurable, et mes $E_{x_1} \geqslant h$.

L'ensemble E_{x_1} est mesurable, puisque $[x_1 - h, x_1 + h]$ est inclus dans $[x_o - 2h, x_o + 2h]$, et que f est mesurable sur ce dernier intervalle.

Soit E'_{x_1} l'ensemble symétrique de E_{x_1} par rapport à x_1. Considérons un élément x de $[x_1 - h, x_1 + h]$; alors $x = x_1 + u$, où $|u| \leqslant h$. De plus,

$$f(x_1 + u) + f(x_1 - u) = f(2x_1) = 2f(x_1).$$

Il en résulte que l'un au moins des nombres $x_1 + u$ et $x_1 - u$ appartient à E_{x_1}. En effet, dans le cas contraire,

$$f(x_1 + u) < f(x_1) \text{ et } f(x_1 - u) < f(x_1),$$

d'où :

$$f(x_1 + u) + f(x_1 - u) < 2\, f(x_1),$$

ce qui contredit l'égalité obtenue plus haut.

Si $x_1 + u \in E_{x_1}$, il est évident que $x \in E_{x_1} \cup E'_{x_1}$.

Si $x_1 - u \in E_{x_1}$, alors $x = x_1 + u \in E'_{x_1}$, d'où $x \in E_{x_1} \cup E'_{x_1}$.

Finalement, $[x_1 - h, x_1 + h] \subset E_{x_1} \cup E'_{x_1}$.

Comme mes E'_{x_1} = mes E_{x_1}, on en conclut que

$$2h < \text{mes}\,(E_{x_1} \cup E'_{x_1}) \leqslant \text{mes}\,E_{x_1} + \text{mes}\,E'_{x_1} = 2\,\text{mes}\,E_{x_1}.$$

Le lemme est ainsi démontré. Voici comment on en déduit qu'un endomorphisme f du groupe additif $\mathbb{R}$ et mesurable sur $[x_o - 2h, x_o + 2h]$ est majoré sur $[x_o - h, x_o + h]$. Pour tout entier naturel non nul n, soit F_n l'ensemble des éléments x de $[x_o - 2h, x_o + 2h]$ tels que $f(x) \geqslant n$. D'après l'hypothèse, F_n est mesurable. En outre, $F_{n+1} \subset F_n$; donc

$$\text{mes}\,F_{n+1} \leqslant \text{mes}\,F_n.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} \text{mes}\,F_n = \text{mes}\,(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n).$$

Soit y un élément de $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$. Pour tout entier $n_0 > f(y)$, $y \notin F_{n_0}$. Ainsi, $y \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$. Autrement dit, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \phi$, ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \text{mes } F_n = 0.$$

Il existe donc un entier naturel non nul n_1 tel que mes $F_{n_1} < h$.

Montrons que f est majorée par n_1 sur $[x_0 - h, x_0 + h]$. Supposons par l'absurde qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors un élément x_1 de $[x_0 - h, x_0 + h]$ tel que $f(x_1) > n_1$. D'où $E_{x_1} \subset F_{n_1}$ et

$$\text{mes } E_{x_1} \leqslant \text{mes } F_{n_1} < h,$$

alors que, d'après le lemme, mes $E_{x_1} \geqslant h$.

II. Applications à divers problèmes.

1. *Soit g une fonction numérique continue sur* **R** *telle que, pour tout couple* (x,y) *de nombres réels,*

$$(3) \qquad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[g(x) + g(y)].$$

Alors g est affine.

Soit en effet f la fonction définie par la relation

$$f(x) = g(x) - g(0).$$

Alors :

$$f(x+y) = g(x+y) - g(0) = \frac{1}{2}[g(2x) + g(2y)] - g(0).$$

En remplaçant y, puis x, par 0, nous obtenons :

$$f(x) = \frac{1}{2}g(2x) - \frac{1}{2}g(0) \quad \text{et} \quad f(y) = \frac{1}{2}g(2y) - \frac{1}{2}g(0).$$

Nous en déduisons que :

$$f(x) + f(y) = \frac{1}{2}[g(2x) + g(2y)] - g(0) = f(x+y).$$

La fonction f est continue, et elle vérife la relation (1) ; elle est donc **R**-linéaire. Finalement, g est affine.

2. *Les fonctions numériques f définies sur* **R** *et telles que, pour tout couple* (x,y) *de nombres réels,*

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

sont l'identité et la fonction nulle. En particulier, l'identité est le seul endomorphisme de l'anneau **R**.

Montrons d'abord que f est croissante. Comme f est un endomorphisme du groupe additif **R**, il suffit de prouver que, pour tout nombre réel positif x, $f(x) \geqslant 0$. Or, il existe un nombre réel positif y tel que $y^2 = x$. Dans ces conditions,

$$f(x) = f(y^2) = [f(y)]^2 \geqslant 0.$$

La fonction f, étant croissante sur **R**, est majorée sur tout intervalle fermé borné de **R**. D'après les résultats de la partie I.3, f est **R**-linéaire. Donc :

$$f(x) = x\, f(1).$$

Mais $$f(1) = f(1 \times 1) = [f(1)]^2.$$

D'où $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$. Le résultat annoncé en découle.

3. *Les fonctions numériques* g *continues sur* **R** *à valeurs strictement positives, telles que, pour tout couple* (x,y) *de nombres réels,*

(5) $$g(x + y) = g(x)g(y)$$

ne sont autres que les fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$.

Autrement dit, les fonctions exponentielles sont les seuls morphismes continus du groupe additif **R** dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$.

Posons $f = \log_a g$. Alors f vérifie la relation (1), et f est continue sur **R**. Par suite, f est **R**-linéaire, donc de la forme $x \mapsto bx$. La relation $g = \exp_o f$ s'écrit $g(x) = e^{bx} = a^x$, où $a = e^b$.

REMARQUE. Les fonctions numériques g *continues sur* **R** *et vérifiant la relation (5) ne sont autres que la fonction nulle et les fonctions exponentielles.*

En effet, pour tout nombre réel x,

$$g(x) = g(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = [g(\frac{x}{2})]^2 \geqslant 0\,.$$

Donc g est à valeurs positives. Mais si g s'annule en un point x_o, alors g est la fonction nulle. En effet, pour tout nombre réel x,

$$g(x) = g(x_o + x - x_o) = g(x_o)g(x - x_o) = 0.$$

4. *Les fonctions numériques* h *continues sur* $\mathbf{R}_+^*$ *telles que, pour tout couple* (x,y) *de nombres réels,*

(6) $$h(xy) = h(x) + h(y)$$

ne sont autres que la fonction nulle et les fonctions logarithmes.

Posons $f = h \circ \exp$. Alors f vérifie la relation (1), et f est continue sur $\mathbf{R}$. Par suite, f est $\mathbf{R}$-linéaire, donc de la forme $x \longmapsto bx$. D'où $h = f \circ \log$, soit $h(x) = b \log x$. Si $b = 0$, h est la fonction nulle. Si $b \neq 0$, $h(x) = \log_a(x)$, où $a = e^{1/b}$.

REMARQUE. La fonction nulle est la seule fonction numérique h continue sur $\mathbf{R}$ et vérifiant la relation (6). Les fonctions numériques h continues sur $\mathbf{R}^*$ et vérifiant la relation (6) ne sont autres que les fonctions paires dont la restriction à $\mathbf{R}_+^*$ vérifie (6).

En effet, si h est définie sur $\mathbf{R}$, alors, pour tout nombre réel x,

$$h(0) = h(x) + h(0),$$

d'où

$$h(x) = 0 .$$

Si h est définie sur $\mathbf{R}^*$, alors, pour tout nombre réel non nul x,

$$h(x^2) = 2h(x) = 2h(-x),$$

d'où

$$h(-x) = h(x).$$

REMARQUE FINALE. Les résultats du II sont inchangés lorsqu'on remplace la condition de continuité par l'une des suivantes :

— *continuité en un point ;*
— *majoration ou minoration sur un intervalle non réduit à un point ;*
— *mesurabilité sur un intervalle non réduit à un point.*

III. Cas des endomorphismes quelconques du groupe additif R.

Dans ce qui précède, les seuls endomorphismes du groupe additif $\mathbf{R}$ que l'on a obtenus sont les applications $\mathbf{R}$-linéaires. On peut se demander s'il en existe d'autres. Si f est un endomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$ sans être $\mathbf{R}$-linéaire, nous savons que f est discontinue en tout point de $\mathbf{R}$; en outre, f n'est ni majorée, ni minorée, ni mesurable sur les intervalles de $\mathbf{R}$ non réduits à un point. On a peine à concevoir une telle fonction, d'allure assez paradoxale, et en fait on ne peut en prouver l'existence que grâce à l'axiome du choix.

Nous utiliserons le théorème suivant :

Soit E *un espace vectoriel sur un corps* K. *Alors tout sous-espace vectoriel* E_1 *de* E *admet un sous-espace vectoriel supplémentaire* E_2, *c'est-à-dire tel que*

$$E = E_1 \oplus E_2 .$$

Lorsque E n'est pas de dimension finie, la démonstration repose de manière essentielle sur l'axiome du choix. Voir par exemple [2] ou [3].

Dans ces conditions, tout vecteur x de E se décompose d'une manière et d'une seule sous la forme $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. L'application $f : x \mapsto x_2$ est un endomorphisme de E tel que

$$\mathrm{Ker}\,(f) = E_1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f) = E_2 .$$

Par suite, lorsque $E_1 \neq \{0\}$ et que $E_1 \neq E$, f est une application non nulle, non injective et telle que, pour tout couple (x,y) de vecteurs de E,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Cette remarque étant faite, considérons $\mathbf{R}$ comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels ; cet espace vectoriel n'est pas de dimension finie. En prenant par exemple $E_1 = \mathbf{Q}$, nous déduisons de ce qui précède l'existence d'une application non nulle f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout couple (x,y) de nombres réels,

(1) $$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

et qui n'est pas injective. Cette dernière condition montre que f ne peut être de la forme $x \mapsto ax$, où $a \neq 0$.

REMARQUE. Dans l'exemple précédent, f n'est pas injective. Voici un exemple où f est bijective, sans pour autant être $\mathbf{R}$-linéaire. (Cela prouve l'existence d'un automorphisme discontinu du groupe additif $\mathbf{R}$).

L'ensemble E_1 des nombres réels de la forme $\lambda_1 + \lambda_2\sqrt{2}$, où λ_1 et λ_2 parcourent $\mathbf{Q}$, est évidemment un sous-espace vectoriel du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$. Il existe un sous-espace vectoriel E_2 supplémentaire de E_1 dans $\mathbf{R}$. Tout nombre réel x s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $x = x_1 + x_2$, où $x_1 = \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{2} \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par la relation

$$f(x) = x_1^* + x_2 \quad , \text{ où } \quad x_1^* = \lambda_2 + \lambda_1\sqrt{2} \in E_1 \quad .$$

La fonction f est un endomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$. En outre, f est involutive. En effet, pour tout nombre réel x,

$$(f \circ f)(x) = f(x_1^* + x_2) = \lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2 + x_2 = x_1 + x_2 = x \quad .$$

En particulier, f est bijective.

Supposons par l'absurde que f soit de la forme $x \mapsto ax$. D'après la définition de f,

$$f(1) = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad f(\sqrt{2}) = 1,$$

ce qui entraîne $a = \sqrt{2}$ et $a\sqrt{2} = 1$, et enfin $2 = 1$.

REMARQUE FINALE. Ce dernier résultat est dû à Hamel (Math. Annalen 1905). Hamel utilise une base de $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$, base dont l'existence repose elle aussi sur l'axiome du choix.

En fait, l'axiome du choix fort (i.e. non dénombrable) est indispensable *pour démontrer l'existence d'endomorphismes discontinus du groupe additif* $\mathbf{R}$. *En effet, les travaux de R. Solovay (Annals of Mathematics 1970) ont montré que l'existence de parties non mesurables de* $\mathbf{R}$ *repose de façon essentielle sur cet axiome. Nous ne pouvons préciser ici cet aspect de la question, car cela nécessiterait des développements assez importants de logique mathématique.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.-L. CAUCHY, *Cours d'analyse à l'Ecole polytechnique. Tome I. Analyse algébrique* (1821).

[2] L. CHAMBADAL et J.-L. OVAERT, *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle,* Dunod (1968).

[3] S. LANG, *Algebra,* Addison-Wesley (1965).

[4] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques,* Hermann (1938).