2

ETUDES DIDACTIQUES

Quantités physiques et structures numériques
Mesures et quantifications : les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes

par Janine ROGALSKI, chargée de recherche CNRS ;
Centre d'Etude des Processus cognitifs et du Langage,
Laboratoire mixte CNRS/EHESS

Introduction *

Le problème des liens entre nombre et mesure se pose tout au long de l'enseignement. Certes les premières acquisitions sur les nombres entiers, les longueurs, surfaces et volumes ont lieu essentiellement dans l'enseignement élémentaire ; mais le travail sur ces notions se poursuit dans le premier cycle du second degré. Nombre de notions sous-jacentes interviennent ultérieurement dans l'enseignement : par exemple, la dimension d'une ligne, d'une surface, d'un volume. On les retrouve aussi bien lors de l'étude des intégrales définies, simples et multiples, par exemple, que pour la compréhension de la notion d'"équation aux dimensions" en physique.

La connaissance des obstacles conceptuels que l'enfant doit franchir pour s'approprier des notions en apparence aussi simples que les nombres entiers, les longueurs, les surfaces et les volumes ne concerne donc pas seulement les enseignants de l'école élémentaire : bien des échecs ultérieurs peuvent être mieux compris, analysés et surmontés en sachant où l'enfant a pu buter.

---

* *Note liminaire* — Dans les pages qui suivent, des questions sont insérées dans le cours du texte. Elles correspondent à des problématiques d'ordres variés. Certaines appellent des vérifications expérimentales simples ou la "publicité" de telles vérifications déjà faites ; d'autres nécessitent le développement d'une recherche plus importante, au sens où elle poserait des questions théoriques plus complexes.

Par leur origine même dans le développement cognitif de l'enfant, nombre, longueur, surface et volume ont le double statut de quantités physiques ou de qualités d'éléments physiques (avec ou sans "dimension") et de mesures mathématiques (sur les ensembles finis, **R**, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ ...). Issues du monde physique : la "numérosité" des collections finies d'objets, pour le nombre, la "taille" (1) des objets pour les mesures spatiales — ces quantités ne cessent de s'y référer. De leur construction même dans le développement génétique restent des traces dans les opérations ultérieures ; le point d'arrivée n'est pas isolable des voies d'accès ; bien des expériences interprétées comme des "régressions" par rapport à un "acquis" opératoire témoignent de cet effet "historique". Selon le contenu auquel vont s'appliquer les "mêmes" structures additives ou multiplicatives ou tout au moins les "mêmes" opérations d'addition et de multiplication, des différences profondes, quant aux concepts qui doivent être mis en œuvre dans la résolution d'un problème, vont marquer le résultat même de cette résolution. Les recherches de Vergnaud sur les problèmes de type multiplicatif fournissent nombre de résultats expérimentaux (cf. Bulletins 307 et 313).

Le but de cet exposé n'est pas de verser d'autres résultats expérimentaux au dossier mais d'analyser, en fonction des recherches menées dans le domaine du développement cognitif et de l'épistémologie génétique, le contenu des différenciations. Le but étant double : mettre en évidence les obstacles conceptuels que l'enseignement doit contribuer à faire franchir à l'enfant, indiquer des voies de recherche ou d'exploration des conséquences éventuelles de ces obstacles.

I. Le nombre et les mesures spatiales : statut différentiel des "unités", donc du calcul numérique selon les quantités concernées

Dans les cardinaux finis, la notion d'unité à la fois est évidente (et très précoce : "1" rond, "1" jouet) et n'apparaît pas dans les opérations de dénombrement : dans la mise en correspondance terme à terme, comme dans le décompte "sériel", le choix du mesurant ne se pose pas : 1 est 1. En revanche, qu'il s'agisse de la longueur, de la surface, du volume, le choix d'un "mesurant" (donc d'une unité) a un rôle très important. Les expériences de Piaget sur la construction de l'espace montrent que, pour la longueur par exemple, le mesurant est d'abord lié au corps propre de l'enfant ("distance des 2 mains écartées" par exemple), avec toutes les

(1) L'existence de plusieurs sens possibles pour un couple comme "grand-petit" témoigne de la complexité de différenciation de "qualités" simultanément présentes dans l'objet. On dit "un grand crayon" comme un "grand cercle" ou un "grand cube" ... Nous reviendrons plus loin sur les conséquences impliquées par cette remarque.

non-conservations du mesurant que cela entraîne, avant d'être un mesurant fixe. Suivant la mesure, suivant le mesurant, il est ou non possible d'aboutir à un décompte numérique entier comme : "cette table fait 4 fois ce crayon". Il y a donc un hiatus entre le concept de longueur, surface, volume, concept qui s'applique a priori à tout objet, et la possibilité effective d'un calcul numérique. Chacun sait d'ailleurs à quel point la liaison ultérieure entre les *décimaux* et avec les *unités décimales successives* est lente et difficile à établir.

On peut s'attendre en conséquence à ce que l'addition de décimaux soit plus facile quand ils peuvent être interprétés comme correspondant aux mêmes unités de mesure que lorsque ce n'est pas le cas. Ainsi, 1,50 + 1,25 (en mètres, centimètres) doit être plus facile que 1,5 + 1,25 qui lui est équivalent. D'ailleurs, on peut faire effectuer l'addition ci-dessus pour des mètres-centimètres, avant même l'introduction de décimaux proprement dits. Ici aussi nous pensons que cet historique marquera un certain temps les performances ultérieures des enfants.

La nature même des concepts de longueur, surface, volume, introduit des différenciations particulières qui interviendront dans la mise en œuvre des opérations numériques. Après l'analyse de ces différenciations, nous analyserons les conséquences prévisibles des relations existant entre les trois mesures spatiales et qui ont évidemment beaucoup à voir avec les structures numériques multiplicatives (calculs de volumes et surfaces, c'est-à-dire la notion de mesure-produit).

1.1 Longueur et distance

La longueur a un double caractère dans sa construction génétique : c'est une quantité associée à des objets "linéaires" (règles-crayons (2)), mais sur une droite elle s'identifie avec la distance.

Tracer un segment de 7 cm, c'est d'abord représenter une certaine partie de ligne droite, c'est aussi joindre deux points distants de 7 cm (les extrémités). Or, si les longueurs s'additionnent sans problèmes majeurs, les distances ne s'additionnent pas ...

Ainsi, les deux problèmes suivants correspondent au "même" problème additif mais ne sont pas identifiables sur le plan conceptuel : périmètre d'un triangle et longueur totale d'un segment. Dans le cas du segment, la possibilité d'une mesure directe de la distance des extrémités est un élément important de contrôle du lien entre la "mise bout à bout" des longueurs pour les ajouter et le calcul numérique lui-même.

(2) On ne parle de la longueur d'un cahier que lorsqu'on évoque en même temps sa largeur.

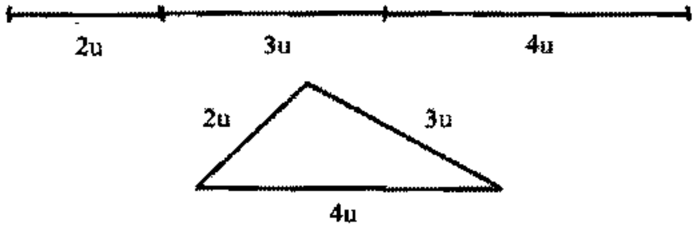


fig.1

(Question : observe-t-on bien une différence : 3 billes + 4 billes + 5 billes "aussi facile" que 3 cm + 4 cm + 5 cm pour le segment, mais plus facile que 3 cm + 4 cm + 5 cm pour le périmètre ?)

1.2 La surface

Si l'opération pratique de "mensuration" des longueurs rectilignes a un caractère itératif voisin du décompte numérique (reports successifs d'un mesurant, crayon par exemple), il est loin d'en être de même pour la surface et a fortiori le volume. Un "mesurant" pour la surface ne peut concrètement être mis en œuvre que s'il s'agit d'une figure qui peut "paver" le plan et il ne peut opérer concrètement comme une unité à partir de laquelle se fait un décompte que si la surface à mesurer est elle-même pavable. C'est le cas où le mesurant est un "carré" et les "mesurés" des rectangles [3].

Mais pour l'enfant, comme pour l'adulte, un disque, bien que non pavable pour le mesurant "carré" (ni pour tout autre pavage [régulier ?] par un "bon" pavé — compact, d'intérieur non vide, connexe, sans trou) n'en a pas moins une surface. Donc [indépendamment du fait que la mesure soit au bout du compte entière ou non], on ne peut mesurer directement la surface d'aucun disque. Il faut des procédures indirectes physiques (passer par le poids par exemple), ou mathématiques (passage à la limite), qui sortent du simple caractère additif et ordonné. Par contre, pour un enfant comme pour un adulte, il y a des rectangles pavables, et il faut un effort pour en imaginer d'autres (non pavables). Néanmoins, le fait qu'on puisse physiquement faire des pavages recouvrant une surface à mesurer (en superposant 2 "plans"), permet de s'appuyer sur le dénombrement pour faire des additions de surfaces, voire pour calculer la surface d'un rectangle quand on double la longueur ; cela ouvre la voie aux procédures de mesure par le produit.

---

(3) Le fait que la figure "pavée" soit un carré porte sur sa "forme", non sur le fait que cette unité soit liée à l'unité de longueur par la relation multiplicative μ surface = (μ longueur)^2. D'ailleurs, on retrouve ce fait dans le langage des mesures anciennes : "arpent = 900 toises" où la toise est ici la mesure carrée. (A "toise" : toise = 6 pieds = 1,949 m) (Littré).

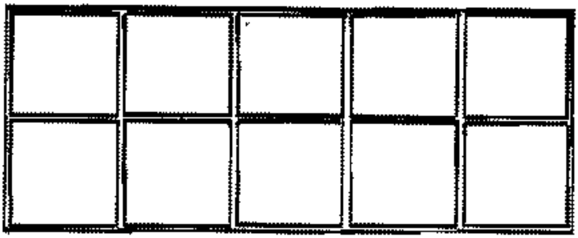
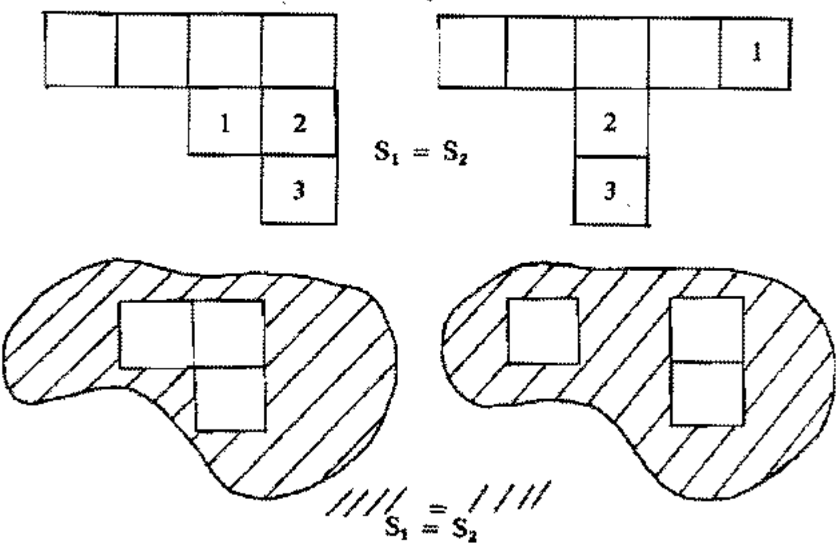


fig. 2

Les travaux effectués sur la conservation des surfaces ont montré que le caractère de dénombrement d'unités de surface facilitait effectivement les conservations quand on déplace les éléments les uns par rapport aux autres ; et ceci contraste avec les expériences de conservation où une partie au moins de la surface n'était pas ainsi "carrelée".



(les surfaces hachurées sont égales)
fig. 3

La conservation des surfaces par différence est d'ailleurs plus difficile que par simple déplacement.

Remarques

1. Cette distinction entre « concept de surface » et « mesurabilité possible », c'est-à-dire passage au calcul, concerne la surface « spatiale » ; je ne sais pas s'il y a pour l'enfant une surface « quantité de matière », analogue à ce qu'est la capacité (quantité) des liquides par rap-

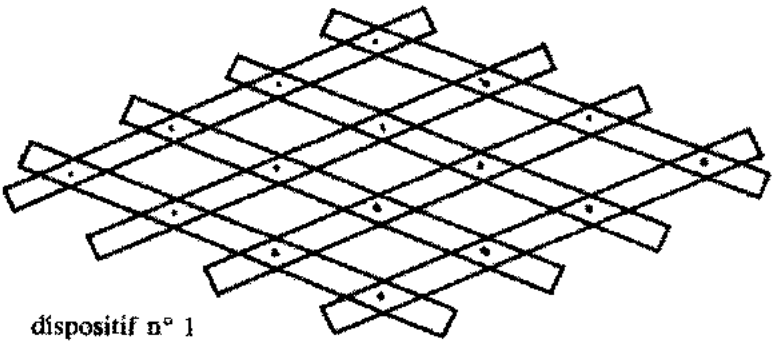
port au volume (voir plus loin). Néanmoins, je vais citer une anecdote qui donne le thème d'une expérience possible sur la conservation de « deux » « surfaces » distinctes : à l'exposition italienne des Journées A.P.M.E.P. à Limoges, les deux dispositifs suivants étaient présentés :

Dispositif n° 1 :

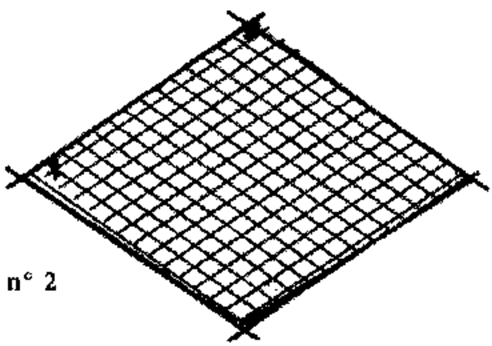
Lattes de bois articulées, avec un montage permettant de passer du carré à la juxtaposition des lattes (la surface des « trous » devenant égale à zéro) ;

Dispositif n° 2 :

Carré articulé, sur lequel est fixé une surface d'un tissu plastifié type « moustiquaire » et déformable en losange (dans certaines limites : si l'on étire trop la surface, elle cesse d'être plane).



dispositif n° 1



dispositif n° 2

fig. 4

A la question posée à un enfant de 8 ans et demi, de savoir si la surface se conservait, la réponse a été la suivante : « oui » pour les lattes, au début de la déformation, puis « non » lorsqu'il y a eu passage à la limite (surface nulle) ; pour le second dispositif, la réponse a toujours été une réponse de conservation, même après une réponse négative concernant le premier dispositif.

Il me semble que dans le premier cas la surface (« non conservée ») est la surface « spatiale » des losanges vides, alors que dans le deuxième cas la surface (« conservée ») est celle globale du tissu-matière. En fait c'est parce que le tissu n'est pas continu et que ses mailles lui donnent une certaine élasticité que le dispositif n° 2 se déforme sans conservation de la surface (les mailles s'étirent nettement).

2. Sur le plan des pratiques sociales, les noms des « mesures » utilisées avant les réformes de la Convention témoignent de la coexistence de deux sortes de mesures liées aux surfaces : les unes sont explicitement des mesures produits, d'autres ont un caractère que j'appellerai « unidimensionnel », au sens où elles ne sont liées à aucun produit. Exemple :

Arpent (1) = 900 toises carrées (toise carrée : produit de mesures linéaires).

Arpent (2) = surface labourable en une journée par un couple de bœufs (appelée aussi « couple de bœufs », « journeaux »...) : mesure non liée au produit.

Bien entendu, cela ne signifie pas que le mode de mesure soit effectivement le labourage ! mais que l'usage de cette surface est liée aux échanges agricoles, « taxes » et autres. Littré la fait remonter aux mesures gréco-romaines. Pour cette mesure la forme de la surface est d'ailleurs relativement secondaire, l'essentiel est la quantité de blé produit.

Le Littré cite également l'existence de deux toises, l'une utilisée pour la mesure linéaire du bois par les charpentiers et qui vaut cinq pieds et demi, et l'autre utilisée pour les mesures de surface des murs par les maçons et qui vaut 6 pieds pour « faire la toise carrée » (Thaumassière - Coutumes du Berry).

1.3. Le volume

Si l'on peut faire pratiquement avec de bons dallages et dans le cas de bonnes surfaces un recouvrement d'une surface en « passant dans $\mathbf{R}^3$ », la structure même de l'espace pratique de nos gestes quotidiens nous interdit la même facilité pour le volume. Il n'y a strictement aucun moyen pour un volume physique (parallélépipède de bois par exemple) de le paver concrètement de cubes unité... Et même, dès l'instant où l'on a composé un cube physique avec des cubes unité, on n'en voit plus que la surface extérieure [4] (et encore pas tout à la fois).

La mesure du volume spatial ne peut pas s'appuyer sur une « mensuration » concrète au même titre que la surface. Cela donne au volume spatial une complexité spécifique d'ordre à la fois conceptuel et pratique.

---

(4) Ici encore les textes sur les mesures anciennes sont intéressants. Littré (1840-65) : « toise cube » = cube dont chaque face est une toise carrée, toise : « par extension, quantité de matière équivalente à celle qui est renfermée dans un corps cubique de 6 pieds... » (sous-entendu de côté).

La représentation de la composition et/ou de la décomposition est nécessaire au concept de mesure par rapport à une unité.

Dans l'« échelle métrique de l'intelligence », on trouve une épreuve introduite par Zazzo : le comptage de cubes, où il s'agit de se représenter tous les cubes — même non visibles — d'un ensemble. Son étalonnage montre qu'à 10 ans très peu d'enfants réussissent complètement et que, jusqu'à 14 ans, elle reste une épreuve difficile.

Les implications sur le plan de la didactique sont l'effort à faire sur la **représentation de l'espace** nécessaire à une bonne conceptualisation du **volume**, avant les problèmes de son **calcul**.

— Travail systématique sur des cubes en fil de fer, des solides transparents, des solides démontables ;

— Usage des codes de représentation graphique : pointillés :

— Reconstitution de cubes avec des parallélépipèdes variés.

(Attention : le caractère « développable » de la surface du cube peut accentuer une identification du cube et de la surface avec laquelle on est en contact et gêner la représentation proprement volumique des solides).

D'autre part, si $\mathbf{R}^3$ est « homogène », l'espace physique — et même l'espace « spatial » des représentations — ne l'est pas. Le couple verticale-plan horizontal joue un rôle très spécifique. Dans la structuration de l'espace, l'émergence du couple « verticale/plan horizontal » à partir des données physiques liées à la pesanteur est un des premiers éléments de constitution du caractère « euclidien » de la représentation spatiale (Piaget, « Représentation de l'espace »).

La hauteur n'est pas mise en relation avec chacune des deux dimensions du plan « horizontal », mais avec leur composition : la surface de base elle-même.

La question « Un cylindre B est deux fois plus haut que A, quel est son volume ? » ne s'identifie pas à « Il est deux fois plus large », car le « deux fois plus large » ne s'applique pas spontanément à une seule des dimensions de la base, mais à une quantité unidimensionnelle, (c'est-à-dire une mesure dans $\mathbf{R}^2$ a priori non envisagée sous la forme d'un produit de mesures), mal ou pas différenciée de la surface.

Nous reviendrons plus loin sur cette question à propos des relations multidimensionnelles. Car un autre caractère du volume intervient : nous avons considéré des volumes physiques pleins et « solides », ou des volumes spatiaux « vides », mais le « volume » est aussi une qualité/quantité dissociée de la forme : pour l'eau, les grains, le sable, il y a aussi le concept de « volume-capacité » qui, s'il est lié au volume spatial des formes, ne lui est pas identique.

Pour ce « volume liquide », l'additivité est sans rapport direct avec la position respective des 2 volumes ajoutés : 1 litre d'eau + 1 litre d'eau = 2 litres d'eau, et la question de la place de l'un par rapport à l'autre ne se pose pas. Mais — revers de la médaille — le lien entre « volume liquide » et « volume de la forme occupée » doit être construit. Les divergences entre expériences de conservation de volumes par déplacement de parties et celles testées par le niveau d'eau quand on immerge le volume témoignent d'une construction distincte dans le temps, et d'une coordination tardive.

On retrouve cette différence dans les unités de mesures elles-mêmes puisque cohabitent : le litre avec ses centilitres, le mètre cube et ses décimètres cubes, le décimètre cube et ses centimètres cubes. Ils entretiennent, chacun s'en souvient, des relations délicates, alors même qu'ils appartiennent les uns et les autres au système décimal...

Dans les expériences de conservation de Piaget, la conservation des quantités « continues » (liquides) est très précoce (voisine de celle du nombre entier), alors que la conservation des volumes (de cubes arrangés différemment par exemple) est plus tardive. Les relations entre la quantité et le « volume occupé », la « place prise », mettent un certain temps à s'établir. Les recherches en psychologie génétique n'ont pas à l'heure actuelle explicité le « comment » de l'établissement de ces relations, ni les activités de l'enfant qui y conduisent. Il y a néanmoins un « constat » qu'existent à un certain âge une différence entre deux concepts « volumiques », et, plus tard, un « seul » volume.

Remarque

Lorsqu'on mesure le volume d'un solide par l'intermédiaire du niveau du liquide déplacé quand on immerge le solide dans le liquide, il faut pouvoir poser l'égalité :

volume du solide = volume total — volume du liquide.

Cela suppose que, si l'on peut mesurer le volume total (par le niveau atteint par le liquide, par exemple) et si l'on peut mesurer le volume du liquide (par le niveau atteint par l'immersion du solide), le complément du liquide dans le volume total est lui aussi mesurable. Cela n'est pas équivalent directement au fait que la mesure est additive : le fait qu'une famille d'ensembles mesurables soit stable par union et intersection n'implique pas qu'elle soit stable par passage au complémentaire.

Par ailleurs, une mesure s'appuyant sur le déplacement du niveau de liquide suppose la conservation du volume du liquide, l'incompressibilité du liquide et celle du solide quand on l'immerge.

(Question : en fonction de ce qui précède, le calcul de 2l + 6l + 4l est-il bien du même ordre de difficulté que le calcul de 2m + 6m + 4m, et la difficulté de calcul de 2 cm^3 + 6 cm^3 + 4 cm^3 peut-elle varier selon la forme initiale donnée au problème ?)

II. Longueur - surface - volume : changement d'unité et produit numérique par un scalaire.

2.1. Changement d'unité pour les longueurs et « capacités » (volume « liquide »).

Le passage d'une mesure en mètres à une mesure en centimètres (ou mètres en kilomètres), ou d'une mesure en litres à une mesure en centilitres fait partie des premiers changements d'unité. Cela se traduit sur le plan numérique par une multiplication liée au système même d'écriture (les mesures décimales étant faites pour cela...). Les unités (numériques) deviennent des centaines (resp. des mille), et réciproquement pour le changement inverse d'unité. C'est sans doute le premier accès aux décimaux.

(Questions : 1. A-t-on là-dessus des résultats expérimentaux en classe sur l'accès assez précoce à des additions de type 1,50 + 1,20 en liaison avec les changements d'unités ?

2. Trouve-t-on les mêmes résultats pour les longueurs et les capacités sur ce problème ?).

En un certain sens, il n'y a pas de multiplication réellement **associée à ces changements d'unité**, par leur nature même. Et les difficultés considérables rencontrées dans l'enseignement de la physique pour de « vrais » changements d'unités viennent peut-être aussi du fait que, pour ces mesures — correspondant à des concepts proches des premières pratiques de l'enfant —, le concept de changement d'unité de mesures lié à la multiplication ou la division numérique, c'est-à-dire par un scalaire, est « gommé » par son caractère décimal.

Signalons néanmoins un point : le fait que certaines des unités décimales n'ont pas de réelle existence pratique ne doit pas être sans conséquence : le décamètre comme le décimètre ne sont pas de vraies mesures pour les activités pratiques... même si les enfants mesurent avec un dénommé « double décimètre » dont ils utilisent d'ailleurs essentiellement les centimètres !

Remarquons ici la polysémie du mot « mètre » qui signifie aussi bien l'unité de mesure qu'un instrument de mesure (qui a suivant les cas 1 m, 1,50 m ou 2 m !) : on s'en sert plus souvent pour « lire » des centimètres que pour reporter une succession de « mesurants » (mètre ès-qualités ou instrument).

2.2. Surface et volume - Changement d'unité.

Qu'il s'agisse des unités de surface — cm^2, m^2, are, hectare — ou de volumes — cm^3, m^3... : les passages d'une unité à une autre restent essentiellement théoriques. On calcule en mètres et mètres carrés, ou cm, cm^2, cm^3, et les conversions éventuelles passent — mal — par « l'équation aux dimensions », $S = L^2$ ou $V = L^3$, dont nous allons parler plus loin. Le passage direct d'une mesure de surface à une autre ne se fait guère (5).

Remarquons d'ailleurs que la description des surfaces qu'on fréquente couramment se fait dans la pratique, non par la mesure de la surface (qui ne donne qu'une information globale), mais par la donnée d'un produit : une table de 0,70 sur 1 m, une feuille de $21 \times 29{,}7$, une pièce de 3 m sur 4 : la surface comme « forme » ne se réduit pas à sa mesure. C'est quand il s'agit d'acheter du bois, du terrain, un appartement, ou de peindre une surface que la « surface - mesure » est nécessaire.

En fait, les mesures de surface ou volumiques interviennent ès-qualités quand on les met en bijection avec une autre mesure « unidimensionnelle » (des francs, des kilos, des litres...) par un « isomorphisme de mesures » où interviennent d'autres produits par des scalaires.

A. Szeminska, dans des expériences de conservation du nombre chez des enfants de 5 à 6 ans, trouve une « conservation » du nombre qui précède la conservation des correspondances terme à terme lorsqu'on présente une collection de jetons à échanger contre des « sous ». La quantité de « sous » est conservée comme quantité globale « d'argent » de même que le nombre de jetons est conservé comme quantité globale de « l'achat », argent et achat étant des mesures mises en isomorphisme par l'échange. La distinction entre cette « mesure numérique » globale et le nombre cardinal d'ensemble nous semble pour partie d'une nature analogue à celle existant entre des « mesures spatiales globales » et les mesures produits.

La différence conceptuelle qui existe entre la « surface-forme », la « mesure-surface » (en tant que mesure simple calculable additivement par rapport à une unité), et la « surface-produit » peut se traduire par des difficultés différentes de problèmes de calcul de surfaces.

On peut par exemple demander de trouver la surface d'un rectangle de dimensions doubles d'un rectangle dont on donne la surface. Il suffit de reconnaître que la « grande » surface-forme est recouverte par quatre « petites » surfaces-formes pour pouvoir calculer :

$$S' = S + S + S + S = 4\,S.$$

Par ailleurs, la question posée sous la forme : « Il faut un pot de peinture pour peindre le petit rectangle ; combien en faut-il pour le grand ? » — mesure « simple » isomorphe avec la mesure quantité de peinture — peut être plus facile que la question directe : « Le petit rectangle a une surface de tant de cm^2 ; quelle est la surface du grand ? ».

(5) Aux 16^e-17^e siècles, de vrais changements d'unités étaient nécessaires, mais touchaient à la vie sociale, directement en liaison avec les structures féodales et les droits et taxes qui leur étaient liés : ainsi 1 acre = 160 perches carrées, avec une perche de 22 pieds carrés, (c'est-à-dire 22×22). On a aussi 100 perches carrées = 1 arpent. Problèmes analogues avec les capacités.

Enfin, le calcul de la surface d'un rectangle de 2 mètres sur 20 centimètres peut être encore plus difficile.

III. La « combinatoire » des propriétés, les mesures spatiales et les structures multiplicatives.

Tout le monde est bien convaincu qu'une multiplication n'en vaut pas une autre et que les problèmes dont la solution appelle la mise en œuvre des structures multiplicatives sont loin d'être équivalents pour l'élève, même lorsqu'on se limite aux structures multiplicatives d'entiers « naturels ».

Les recherches effectuées en psychologie génétique sur la « combinatoire » — précisément sur le produit cartésien ensembliste (fini) —, et sur l'espace, permettent de mieux cerner sur quelles bases conceptuelles l'enfant peut ou ne peut pas s'appuyer quand il cherche à résoudre tel problème « multiplicatif » particulier, et comment sont liés entre eux les différents concepts concernant le monde physique, concepts qui caractérisent sur le plan cognitif le terrain sur lequel se situent les interventions didactiques elles-mêmes, et particulièrement les résolutions de problèmes « multiplicatifs ».

3.1. Le « produit cartésien », la « combinatoire » et le produit numérique.

Dans une série d'expériences portant sur des enfants de 5 ans et demi à 10 ans, j'ai étudié quelle réponse donnaient les enfants à la construction des « formes colorées » obtenues à partir de 3 formes et de 4 couleurs et quelle représentation ils se faisaient du résultat. Un des résultats directement pertinent au problème du lien « combinatoire - structures numériques » est le suivant, même quand la construction est réussie :

— La possibilité de savoir sans décompte combien de formes colorées ont été faites à partir de 3 formes et 4 couleurs est tardive et est précédée de plusieurs étapes :

a) Dans un premier temps, l'enfant n'est même pas certain que le problème ait une solution nécessaire. (En gros, moins de 6 ans.)

b) Plus tard, il n'a pas de procédure de vérification, ni de prévision, et fonctionne par « essais » et « erreurs ». Le petit nombre d'éléments est décisif sur l'existence d'un résultat complet. Il est alors incapable de savoir sans les compter s'il doit y avoir 3 rouges, 4 carrés... Le fait de vérifier qu'il y a 3 rouges, 3 bleus... ne l'amène pas à la conclusion qu'il y a aussi 3 jaunes (6-7 ans).

c) Ensuite, pour l'une des dimensions forme ou couleur — selon le matériel technique utilisé — il sait qu'il doit y avoir 3 formes pour chaque couleur, ou 4 couleurs pour chaque forme, mais il ne sait pas nécessairement qu'il y a : et 3 formes par couleur, et 4 couleurs par forme (asymétrie du produit $F \times C$). Son décompte des éléments de $F \times C$ es alors additif : $3 + 3 + 3 + 3$.

d) C'est ensuite seulement que $F \times C = C \times F$ (alors que les « tables de multiplication » pour les mêmes sujets sont enseignées depuis plus de 2 ans...) (9-10 ans).

La « combinatoire » réussie (toutes les formes colorées faites) précède la connaissance du produit cartésien et de son cardinal comme produit de nombres.

(Question : a-t-on un recueil de données sur le fait que dans les opérations strictement numériques, c'est-à-dire qui ne sont pas issues d'un problème à résoudre, l'asymétrie du produit : $3 \times 4 \neq 4 \times 3$ *précède bien la commutativité, au sens où on ne peut pas prédire* $n \times p$ *connaissant* $p \times n$ *?)*

Les expériences de Francine Mannoni sur les décomptes d'objets rangés par lignes et colonnes (où la dissymétrie initiale des rôles de la forme et de la couleur ne se pose pas a priori) font état des difficultés des enfants à prévoir l'égalité des regroupements par lignes et celui par colonnes : les procédures ne sont pas équivalentes : p fois $n \neq n$ fois p.

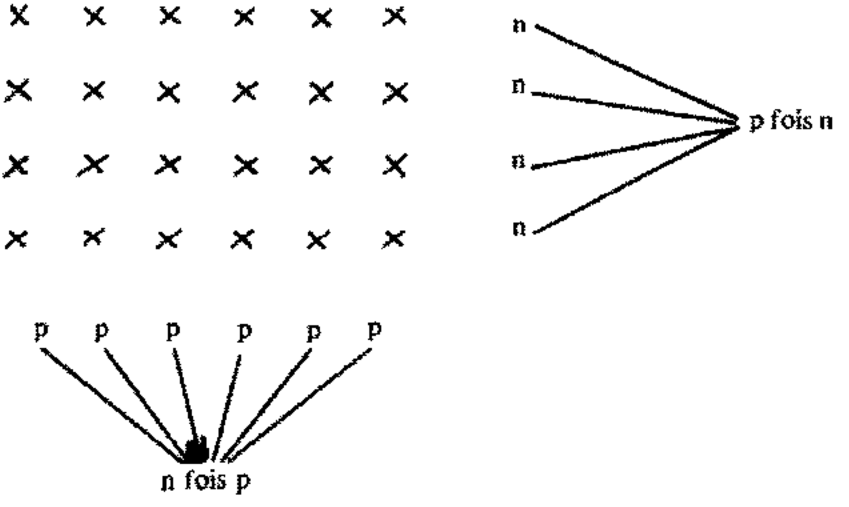


fig. 5

Une question très importante de didactique des mathématiques me semble ouverte concernant ce problème : en présentant le produit par les opérateurs : 6×4 représenté par l'opérateur ($\times$ 6) appliqué à 4, aide-t-on l'enfant à en acquérir la pratique parce qu'on s'appuie sur ses représentations du produit où 6 fois 4, c'est $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$? Ou bien n'entretient-on pas ainsi ces représentations qui sont insuffisantes pour progresser et pour s'appliquer aux situations où la multiplication est liée à un produit de mesures et non à un opérateur sous une forme ou sous une autre (scalaire/fonction, cf. G. Vergnaud). Ou autrement posé : à quel moment est-il utile et nécessaire de s'appuyer sur les concepts que l'enfant s'est préalablement construits par une voie ou une autre, et à quel moment devient-il nécessaire de choisir des situations problématiques où il doit dépasser ces représentations ?

3.2. Calcul de surfaces (et volumes) par un produit de scalaires après donnée d'une unité qui permet le pavage.

Lorsque la surface est pavée par une unité donnée, un calcul peut être effectué sans que pour autant la mesure surface concernée soit une mesure produit. C'est le nombre des unités qui peut être décompté par un produit de scalaires (le nombre d'unités par ligne, et le nombre de lignes, par exemple).

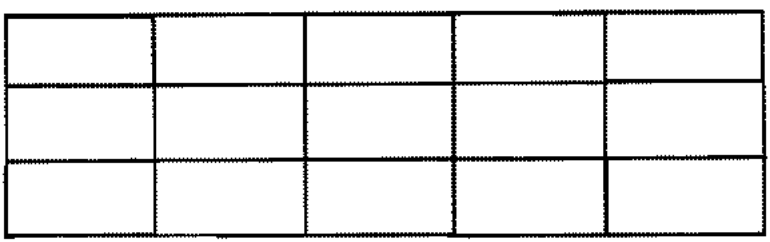


fig. 6

Ici la surface est 15 (sous-entendu : carreaux).

Modulo le problème de la représentation, la situation est analogue pour les volumes. Une liaison se fait ainsi entre la mesure (« addition » ou décompte d'unités) et le produit de scalaires (nombres « sans dimension » : cardinal du produit cartésien d'ensembles finis).

3.3. Homothétie, dimensions de longueur, surface et volume et multiplication par un scalaire.

En supposant la conservation des mesures spatiales par déplacement, ce sont les transformations homothétiques qui relient la dimension physique des mesures spatiales et les opérations multiplicatives.

La question est la suivante : si l'on prend un carré ou un cercle (resp. cube ou boule) homothétique d'un témoin, que deviennent, selon le rapport d'homothétie, le périmètre, la surface (resp. le volume) ?.

On a les transformations et les opérations suivantes :

côté ou diamètre	$l \xrightarrow{\times\ n}$ côté nl
périmètre	$P \xrightarrow{\times\ n} nP$
surface	$S \xrightarrow{\times\ (n\ \times\ n)} (n \times n)S$
volume	$V \xrightarrow{\times\ (n\ \times\ n\ \times\ n)} (n \times n \times n)V$

Les produits fonctionnent ici comme des opérateurs scalaires ; le choix du bon opérateur est lié à la dimension même des mesures concernées.

(Question : lorsqu'on part d'un témoin carré (resp. cube), le carré (resp. cube) résultat d'une homothétie à coefficient entier est pavable par le carré (resp. cube) témoin. La conservation du même opérateur lorsqu'on passe du carré au disque (resp. du cube à la boule) ne témoigne-t-elle pas de l'acquisition de la « dimensionnalité » de la surface (resp. du volume) ?)

En liaison avec la remarque faite plus haut, qu'une unité propre de surface ou de volume apparaissait plus « naturellement » dans le cas d'isomorphisme avec des mesures unidimensionnelles (francs, kilos, ...), la question précédente doit être différente si de telles mesures y interviennent.

Exemples

— On met 1 heure pour faire le tour du carré (cercle) témoin ; combien pour un carré (cercle) de côté (diamètre) 2 fois plus grand ?

— Il faut 1 kilo de peinture pour peindre ce carré (disque) témoin ; combien pour un carré (disque) de côté (diamètre) 2 fois plus grand ?

— 1 litre remplit ce cube (cette boule) ; combien contient ce cube (boule) de côté (diamètre) 2 fois plus grand?

L'intervention d'un isomorphisme de mesures apparaît ajouter de la complexité au problème ; mais, d'après un sondage plus anecdotique qu'expérimental, il semble que ce type de question soit plus simple néanmoins qu'une question « directe » sur le périmètre, la surface ou le volume. Celle-ci utilise dans la langue courante des expressions verbales comme « deux fois plus long », « quatre fois plus grande ». Or ces expressions coordonnent une formule multiplicative : « 2 fois » et une formule additive : « plus », et des expériences de F. Jaulin - Mannoni ont montré que — pour certains élèves au moins — ces coordinations étaient des sources de confusions considérables. Pour ces enfants, « 2 fois plus grand que B » peut se traduire par **l'adjonction** de 2 (et non le produit). 2 B devient B + 2 avec une confusion entre la mesure (qui a une dimension) et le résultat numérique de cette mesure (qui est un scalaire sans dimension).

Dans certaines classes, on élimine le mot « plus » en disant : la longueur du tour est deux fois la longueur de... ; la mesure de la surface (l'aire) est deux fois celle de...

Il est difficile néanmoins de faire produire spontanément des réponses de ce type si l'enseignement ne l'a pas induit.

Le nombre est à la fois moyen de calcul, et — accompagné de l'unité — résultat d'une certaine mesure ; les opérations effectuées à l'un ou l'autre titre ne sont isomorphes que si le concept de nombre comme résultat d'une mesure déterminée est bien acquis : les concepts physiques en jeu sont pour cela décisifs. Le langage courant peut être un mauvais véhicule pour distinguer les deux notions. Par le mélange de formulations additives (qui, en principe, respectent les dimensions) et de formulations multiplicatives (produit par un nombre, sans dimension), il peut contribuer au maintien de cette confusion, lorsque la relation entre le numérique et les quantités physico-spatiales est encore mal dégagée.

Or cette distinction entre le nombre qui intervient dans un produit par un scalaire et les nombres résultats de mesures que l'on ajoute est à la base de la notion d'« homogénéité des formules » (on respecte les dimensions quand on effectue des additions, ou quand on écrit des égalités [6]). Il ne faut pas tirer la conclusion qu'il suffit d'utiliser un langage plus formalisé : cela n'a jamais empêché le langage du siècle d'exister pour l'élève. Mais il faut en tirer au clair le contenu en permettant à l'enfant de maîtriser mieux les notions sous-jacentes.

---

(6) Il est bien connu des enseignants de physique — et hélas, mal des élèves/étudiants — que les calculs dits littéraux ont intérêt à être conduits le plus loin possible avant de substituer aux quantités leur valeur : cela permet aux dimensions de rester explicitées — et donc d'être respectées au long des calculs. Le respect des dimensions : dans les additions, on n'ajoute pas des mètres et des nombres, ou dans les multiplications (quand on multiplie des mètres par des mètres on a des mètres « carrés », non des mètres), porte donc loin dans le développement des connaissances. D'où l'importance de bien « assurer » les **concepts** liés à l'espace, dont l'enfant peut avoir la pratique la plus immédiate et permanente, car en quelque sorte, ils peuvent servir de « paradigme » pour les autres « équations aux dimensions ».

3.4. Produits par un scalaire et linéarité des mesures de surface et volume par rapport à chaque dimension.

3.4.1. Surface, bilinéarité et dimension de la mesure.

A une constante près (correspondant au choix de l'unité), il est équivalent de dire que la surface d'un rectangle ($L \times l$) est le produit des longueurs des côtés ou qu'elle est linéaire par rapport à chacune des 2 dimensions.

Cependant, cette équivalence n'est pas nécessairement une donnée pour l'enfant : elle fait partie de la construction de la notion de surface et de sa mesure (7).

Les expériences sur les conservations spatiales — et celles de Vinh Bang en particulier sur les surfaces — montrent qu'il y a pour l'enfant une difficulté intrinsèque à coordonner deux relations, avec de plus :

— une difficulté à distinguer des compensations additives (longueur + 2 m, largeur − 2 m) avec les compensations multiplicatives (longueur × 2, largeur : 2) — ce qui recoupe une remarque précédente sur la confusion entre 2 × B et B + 2 ;

— une difficulté à coordonner des relations « inverses » au sens suivant (multiplier la longueur par 2 et diviser la largeur par 2), ce qui donne une constante pour la surface (cette difficulté ne semble pas due exclusivement au caractère « inverse ») ; quand les relations sont de « même sens » (× 2 et × 3 par exemple) la difficulté est certainement moindre.

(Question : le calcul indépendant :

$$L \longrightarrow 2L \text{ implique } S \longrightarrow 2S$$
$$\text{et } l \longrightarrow 3l \text{ implique } S \longrightarrow 3S$$

ne conduit pas nécessairement à la composition

$$(L \longrightarrow 2L,\ l \longrightarrow 3l) \text{ implique } S \longrightarrow (2 \times 3)\ S$$

qui exprime bien le caractère multiplicatif de la surface.

Y a-t-il une évolution spontanée ?

Observe-t-on une phase où les enfants commencent par ajouter entre eux les résultats des deux opérations ?.)

Les expériences sur le produit cartésien montrent que l'établissement de relations indépendantes entre facteurs de deux produits cartésiens n'implique pas d'emblée une relation multiplicative.

---

(7) Dans l'enseignement primaire, quand on aborde ces notions, on cherche à distinguer surface et mesure de la surface (aire), volume et mesure du volume (qui n'a pas de nom particulier) pour préciser qu'il y a un « objet » dont on parle et le résultat (nombre) d'une mesure. Dans tout ce texte, surface et volume sont mis pour surface-mesure et volume-mesure.

De même il faut ici coordonner la multiplication de L par 2 avec celle de l par 3 selon un schéma commutatif qui fait apparaître l'opération ($2 \times L$, $3 \times l$) qui opère sur l'ensemble de la forme de S **de façon non additive** alors que $2 \times L$ comme $3 \times l$ peuvent se traduire de façon additive.

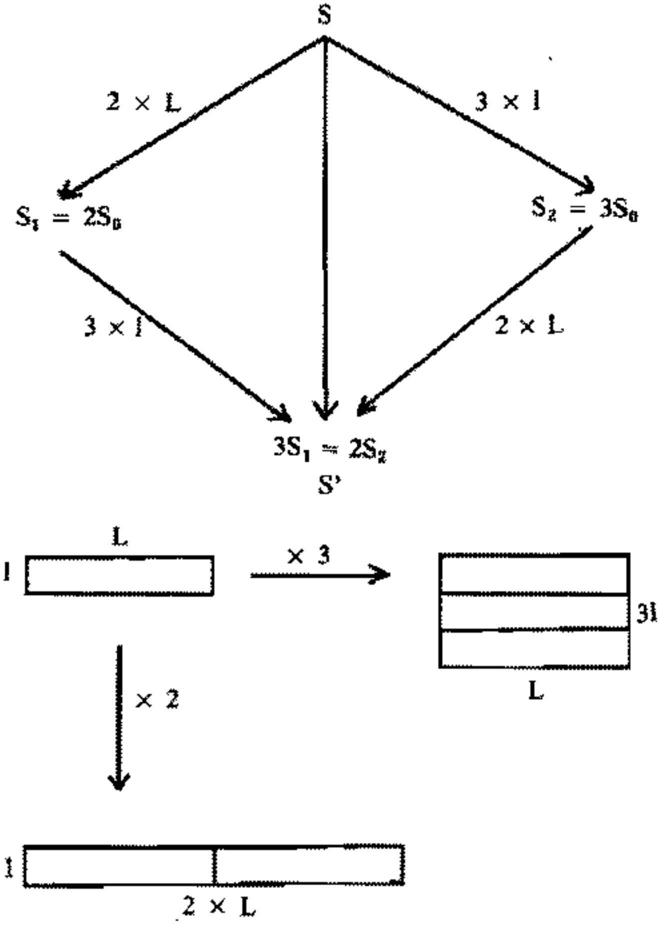


fig. 7

3.4.2. Le volume

Les difficultés, que nous venons d'évoquer, tenant au passage de la propriété de bilinéarité au fait que la mesure de la surface est un produit de mesures se retrouvent pour le volume.

Comme produit $S \times h$ (surface $\times$ hauteur) le volume est bilinéaire par rapport à deux dimensions : la hauteur et la surface. Le problème de composition de ces deux propriétés de linéarité est donc posé.

Les travaux de Piaget (Représentation de l'Espace, 1948) sur la conservation des volumes signalent le même ordre de difficultés que celles rencontrées dans le cas des surfaces. Pour parvenir au volume produit tridimensionnel, il faut ensuite coordonner les propriétés de la bilinéarité par rapport à la surface et la hauteur, avec les propriétés de cette bilinéarité de la surface par rapport à la largeur et à la longueur. Cette coordination introduit a priori une difficulté supplémentaire.

(Question : y a-t-il possibilité d'un passage « direct » de la linéarité par rapport à chacune des trois dimensions au volume comme produit des 3 mesures linéaires : $V = L^3$?

Cette problématique nous paraît liée à la question de l'intervention pédagogique préalable pour instaurer la symétrie de rôle des 3 dimensions « contre » l'asymétrie initiale entre d'une part la hauteur comme dimension « verticale » et les longueur et largeur comme dimensions « horizontales », cette intervention permettant une meilleure représentation du volume dans l'espace).

La composition des deux propriétés de linéarité pose un problème particulier au volume, en raison de l'impossibilité d'effectuer un « recouvrement » du volume étudié par d'autres volumes (comme on peut le faire pour la surface).

Si h est multipliée par 3, par exemple, on ne peut pas représenter 3 volumes identiques superposés de la même manière qu'on peut visualiser l'intégralité de la surface obtenue en multipliant par 3 la largeur d'un rectangle.

Il faut se représenter le volume. Le passage à la bilinéarité sera encore plus compliqué au point de vue de la représentation.

En ce qui concerne la linéarité par rapport à la surface, la représentation peut être de même nature que celle du pavage de la surface, mais la différenciation entre la mesure comme surface ou comme volume peut être mise en cause, selon les rapports entre les dimensions de hauteur et de surface : si h est trop petite par rapport à la surface, la question posée sur le volume peut être comprise comme une question posée sur une surface : il n'est alors plus question de linéarité par rapport à la surface mais de simple additivité de celle-ci.

Un sondage conduit sur des adultes non naïfs semble confirmer un traitement différenciel selon le rapport hauteur/diamètre. Il serait intéressant de voir chez les enfants quel est le seuil où on passe de la surface (un « rond ») au volume affirmé (un « cylindre »).

Plus généralement, l'isomorphisme de mesure $1 \times S$ (volume, avec hauteur unité) avec S (et $1 \times 1 \times L$ avec L) introduit une difficulté particulière quant au rôle de la troisième dimension. Cet isomorphisme, s'il n'est pas représenté en tant que tel pour l'enfant, risque d'aboutir à l'addition de « surfaces » avec des « longueurs » ou de « surfaces » entre elles, conduisant à des calculs qui paraissent alors aberrants, alors qu'il peut s'agir du calcul du nombre de cubes construits sur une surface.

La forme du calcul peut cacher la nature de ce qui est réellement « mesuré » par un décompte (et mal mesuré parce que mal représenté).

Conclusion

Nombre de travaux expérimentaux sur le développement cognitif de l'enfant indiquent l'existence d'obstacles conceptuels multiples dans l'acquisition des mesures de surface et de volume comme produits de mesures.

En ce qui concerne les quantités numériques et spatiales, nous avons signalé ainsi ceux des obstacles qui sont en relation avec :

— la dimensionalité

— le statut des unités de mesure (et leur lien avec l'unité de longueur)

— la constitution du produit cartésien ensembliste.

De nombreuses questions se posent concernant les conséquences de ces obstacles, encore davantage sur les conditions qui permettent à l'enfant de les franchir. Il nous semble néanmoins que l'acquisition des concepts correspondants est une condition nécessaire pour que le calcul des mesures produits de surface et de volume devienne opératoire, c'est-à-dire applicable dans des conditions variées. En fonction des données expérimentales parfois en apparente contradiction, l'hypothèse que nous faisons est la suivante : il n'y a pas un développement linéaire mais c'est la coordination de trois acquis conceptuels qui conduit à la **mesure produit** :

— la « dimensionalité » de la mesure

— le décompte du nombre des unités par un produit de scalaires

— le lien de l'unité de mesure des surfaces et volumes avec l'unité de mesure des longueurs.

Le calcul peut alors se faire sans que la représentation d'un pavage en unités soit nécessaire. Cela permet par exemple de calculer la surface de rectangles pour des longueurs non entières, de calculer la surface de triangles, de disques. Ce dernier calcul nécessite l'intervention de la continuité, concept dont nous pensons qu'il se construit vers 9-10 ans, c'est-à-dire la période de construction des notions spatiales sur les surfaces et volumes.

Cet ensemble d'acquisitions conceptuelles — où l'enseignement a un rôle très important à jouer —, est une condition pour que les « calculs numériques » et les « résolutions de problèmes » soient soutenus par une connaissance que l'élève s'est appropriée, et ne soient pas seulement le résultat plus ou moins instable d'un apprentissage. Car il est bien connu depuis longtemps que : « concept mal acquis ne profite jamais ».

Le résumé des différentes interventions du nombre (« sans dimension ») dans les quantités spatiales (longueur, surface, volume) est donc le suivant :

1. La mesure cardinale est un préalable.

2. Le scalaire exprime le décompte d'une « mensuration » effectuée avec un mesurant (ou une unité).

3. L'addition de scalaires correspond au caractère additif de la mesure (dépend de l'existence d'une unité et de la « pavabilité »).

4. L'homogénéité — qui donne un sens à l'addition — est liée à la notion de « dimension » de la quantité longueur, surface ou volume concernée.

5. Le produit d'une mesure par un scalaire peut correspondre à plusieurs opérations ;

a) à un changement d'unité (avec les unités décimales, il s'agit du passage des entiers aux décimaux, et réciproquement) ;

b) au résultat d'un opérateur d'homothétie pour des mesures spatiales (lié à la notion de « dimension ») ;

c) à l'application de la linéarité de la mesure surface ou volume par rapport à chaque dimension.

Dans les deux derniers cas, l'opérateur « produit par un scalaire » est étroitement lié à l'additivité des mesures et au décompte du nombre d'unités contenues dans l'objet mesuré.

6. Le produit de 2 scalaires intervient :

a) pour le calcul du cardinal d'un ensemble produit cartésien ;

b) dans la composition de la linéarité par rapport à chaque dimension ;

c) pour le calcul d'une surface, ou d'un volume, « pavables » par une unité donnée, en passant par le calcul du cardinal d'un produit ensembliste (« sans dimension ») (dans ce dernier cas il peut s'agir d'un véritable produit de scalaires, l'unité étant fixée, ou du produit d'une mesure par un scalaire).

d) pour le calcul d'une surface ou d'un volume comme mesures produits, à partir des mesures de la dimension de base : la longueur (pour la surface), ou à partir de deux dimensions : la longueur et la surface (pour le volume).

Bien entendu, les mesures spatiales peuvent également intervenir en tant que telles dans des relations avec d'autres mesures, avec des produits liés aux isomorphismes de mesures (cf. Vergnaud).

Bien entendu aussi, les inverses des opérations précédentes d'addition et de multiplication interviennent également et leur propre statut dépend de celui de l'opération directe par rapport aux quantités spatiales concernées.

Les difficultés des opérations elles-mêmes et celles rencontrées dans leur inversion vont dépendre étroitement des concepts sous-jacents.

Bibliographie

LE NOMBRE

Problèmes de la construction du nombre

Etude V - Enfants de 5 à 8-9 ans. Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant. P. Gréco - description détaillée des épreuves et réponses textuelles d'enfants. *Etudes d'Epistémologie Génétique* XI, Paris, P.U.F., 1960.

Structures numériques élémentaires

Même remarque que pour l'étude V du XI. Un exemple de la complexité différente de contenus qui s'expriment les uns et les autres avec des nombres (enfants de 5 à 8 ans), E.E.G. XIII, Paris, P.U.F., 1962.

La formation des raisonnements récurrentiels

E.E.G. XVII, Paris, P.U.F., 1963.

J. PIAGET et A. SZEMINSKA - **La genèse du nombre chez l'enfant**, Neuchâtel - Paris, Delachaux et Niestlé (1941).
Les expériences « princeps » sur la correspondance « un à un » et la « conservation du nombre ».

L'ESPACE

J. PIAGET et B. INHELDER - **La représentation de l'espace chez l'enfant** (580 p.), P.U.F., 1948.

J. PIAGET, B. INHELDER, A. SZEMINSKA - **La géométrie spontanée de l'enfant** (508 p.), P.U.F., 1948.

L'épistémologie de l'espace (280 p.), E.E.G. XVIII, Paris, P.U.F., 1964.

Les conservations spatiales (150 p.), E.E.G. XIX, Paris, P.U.F., 1965. Etude détaillée des relations périmètre/surface.

M. LAURENDEAU et A. PINARD - **Les premières notions spatiales chez l'enfant.** Examen des hypothèses de J. Piaget ; Delachaux et Niestlé, 1968 - Une reprise des expériences piagétiennes sur l'espace.

L'APPRENTISSAGE ET LES CONSERVATIONS

J.F. WOHLWILL - Un essai d'apprentissage dans le domaine de la conservation du nombre, E.E.G. IX, Paris, P.U.F., 1959.

B. INHELDER, H. SINCLAIR et M. BOVET - **Apprentissage et structures de la connaissance,** P.U.F. 1974 (avec tout l'éventail des épreuves de conservation et leurs résultats principaux).

C. COMITI - Approche du nombre naturel chez l'enfant de 6 à 7 ans. Communication au Séminaire de Didactique des Mathématiques 1978. A paraître (en anglais) dans **Educational Studies in Mathematics.**

F. JAULIN-MANNONI - Recherches sur les fondements d'une pédagogie authentique, 1978. Rapport C.O.R.D.E.S., 233, bd St-Germain, 75007 Paris. Méthodologie « clinique » et enseignement.

F. JAULIN-MANNONI - « Les quatre opérations, base des mathématiques », Editions E.S.F.

L. MAURY et J. ROGALSKI - Produit cartésien et complément, étude génétique. **L'Année Psychologique,** 1970, I. (Enfants du primaire de 5 ; 6 à 9 ; 10).

L. MAURY, E. PORRO et J. ROGALSKI - Autour d'une étude génétique sur la négation conjonctive - **Bulletin de Psychologie, 314,** XXVIII, I (1974-1975), p. 213-229.

G. RICCO - Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans. Thèse de 3ème cycle, ronéo : Centre d'Etude des Processus cognitifs et du Langage, 1979 (avec une grande bibliographie de travaux sur les opérations numériques).

G. RICCO, V. GUZMAN et E. PORRO - Etude du raisonnement portant sur l'inversion de transformations arithmétiques additives, in Travaux du Centre d'Etude des Processus cognitifs et du Langage, (M.S.H. 54, bd Raspail, 75270 Paris Cedex 06), 1975.

A. SZEMINSKA - De l'identification à la conservation opératoire, **Bulletin de Psychologie**, 327, XXX, 1976-1977, « Hommage à Jean Piaget », p. 369-375. Des exemples intéressants sur la signification d'une conservation numérique.

G. VERGNAUD et al. - Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des « structures multiplicatives » élémentaires ? Un sondage. **Bulletin de l'A.P.M.E.P.** n° 313, avril 1978, p. 331-357.