4

ECHANGES

Manifeste pour un enseignement naturel de la géométrie

par André DELEDICQ, Claude LASSAVE, Claudie et Didier MISSENARD

Le voile, le parachute ou le bolide ?

Les méthodes d'enseignement de la géométrie dans le premier cycle tout au long des années 70 trouvent leurs justifications dans l'argumentation résumée ci-dessous :

<table>
<tr><td>METHODE V</td><td rowspan="2">(V1) On regarde (et on fait regarder à l'élève) l'espace autour de soi, on dessine des figures ...
(V2) On idéalise certains objets de cet espace et on extrait de l'observation un certain nombre de propriétés de ces objets.
(V3) On formalise l'étape (V2) par la pose de définitions (d'objets abstraits) et d'axiomes (relations entre ces objets).
Le jeu mathématique peut alors commencer.
(V4) A partir des axiomes, on déduit scrupuleusement un ensemble de propriétés considérées comme importantes. Si ces nouvelles propriétés mathématiques correspondent bien à des propriétés concrètement vérifiables, on a tout lieu d'être satisfait : le "modèle mathématique" bâti est un bon modèle de notre espace.
(V5) Muni d'un modèle qui a notre confiance, on peut alors franchement se lancer dans une activité déductive plus créatrice.</td></tr>
<tr><td>LA METHODE DU VOILE PEDAGOGIQUE
</td></tr>
</table>

Les qualités de cette méthode sont bien connues : une apparente volonté de bâtir sur l'"expérience vécue", une forte cohérence, un déroulement exemplaire de l'activité mathématisante, ... — à tel point que la quasi totalité des documents de cette époque font référence à ce type de présentation.

Une variante intéressante est ci-dessous décrite.

METHODE P	Les deux premières étapes sont réduites au minimum considéré comme décent (éventuellement vide).
LA METHODE DU PARA-CHUTAGE 	(P3) On pose des définitions (d'objets abstraits) et des axiomes (relations entre ces objets). Le "jeu mathématique" peut alors commencer. (P3) On s'assure que l'étape *P3* traduit une certaine réalité et que donc les choix ne sont pas aussi arbitraires qu'il y paraissait. Cette étape remplace l'observation a priori (V1 et V2) par un contrôle a posteriori. (P4) = V4 (P5) = V5

La méthode P peut paraître *abrupte* ; l'expérience montre d'ailleurs qu'elle n'est acceptée que par quelques élèves déjà bien motivés. Toutefois, il faut reconnaître qu'elle a le mérite de *l'honnêteté*, ce qui n'est pas le cas (on le verra) de la méthode V. L'objectif est au moins clair et précis : on déroule une certaine mathématique et on sait que cette mathématique est importante.

Les utilisateurs des méthodes P et V se sont vite aperçus qu'il était beaucoup trop long de tout démontrer à partir des axiomes, de sorte que les activités intéressantes et les applications pratiques de la théorie (étape V5) ne sont généralement pas atteintes en classe.

En quelques mots, le déshabillage de la géométrie ressemble de bien près aux mauvais spectacles de strip-tease : on finit par quitter la salle, fatigué d'attendre les moments singuliers de l'existence desquels on finit par douter !

Certains ont alors pensé accélérer le processus par une méthode telle que la suivante :

METHODE B

LA METHODE DU BOLIDE ENTRE LES ILOTS

B1 = V1

B2 = V2

B3 = V3

B4 On fait remarquer aux élèves qu'il serait fastidieux de tout vouloir démontrer. On ne déroule donc que certains "morceaux choisis" de théorie. Parmi les théorèmes énoncés, certains sont donc acceptés ou simplement justifiés ; si les élèves le réclament, on peut évidemment les démontrer.

B5 = V5

Quelques questions

Dans la méthode V (ou B), quel est le critère de choix des axiomes parmi d'autres propriétés naturelles ?

Aide : Se demander en quoi l'énoncé d'Euclide est plus "immédiat" que l'énoncé "si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre" ou que la transitivité du parallélisme. Comment un élève pourrait-il imaginer entre eux une relation d'antériorité tant qu'il n'a pas toute la construction devant lui ? Et à ce moment-là, la construction est si vaste qu'il ne voit rien.

Dans les méthodes V, P ou B, on pense communiquer aux élèves l'idée de ce qu'est un modèle mathématique ; le fait-on raisonnablement ?

Aide : Montrer une chose, est-ce l'enseigner ?

Un des objectifs explicites de l'enseignement de la géométrie en quatrième-troisième est l'apprentissage de l'activité de démonstration ; cet apprentissage est-il réalisable avec les méthodes précédentes ?

Aide : L'activité de démonstration est une activité difficile ; l'élève doit donc en voir clairement les objectifs et les avantages ; dans un premier temps, est-il donc bon de la mettre en œuvre pour démontrer des "propriétés" tout aussi naturelles que les "axiomes" ?

La réponse à ces questions est assez simple. La résolution des problèmes qu'elles soulèvent aussi !

SI nous sommes bien d'accord sur les objectifs essentiels de l'enseignement de la géométrie en quatrième-troisième, c'est-à-dire :

O1 "SAVOIR SE DEBROUILLER" en situation plus ou moins confuse, c'est-à-dire être capable d'agir, d'observer, d'exprimer des conjectures ... et cela, alors même que l'on n'est pas capable d'écrire une liste ordonnée de justifications de ses actions.

O2 CONNAITRE UN STOCK DE THEOREMES, assez bien définis d'ailleurs par l'intersection de ceux qui sont énoncés dans les manuels de quatrième.

O3 SAVOIR DISTINGUER ce qui est du domaine de l'observation ("je vois que ..."), ce qui est du domaine de la conjecture ("il me paraît que ce que je viens de remarquer sur un ou plusieurs cas sera vrai dans tous les cas ..."), et ce qui est du domaine de la démonstration.

O4 ETRE CAPABLE DE REALISER UNE DEMONSTRATION bien construite, à partir d'une situation particulière et en utilisant un stock de résultats déjà connus, ou susceptibles d'être formulés.

O5 IMAGINER LA POSSIBILITE D'ORGANISER L'EDIFICE GEOMETRIQUE : comprendre ce qui différencie une définition, un axiome, un théorème et avoir pressenti l'existence de liens "logiques" entre certains énoncés.

O6 ETRE CONSCIENT DE LA RELATIVITE DE TOUTE CERTITUDE :
— au niveau de l'expérience concrète, en fonction des outils de construction et de mesure,
— au niveau d'un morceau de monde et d'un de ses modèles, en fonction des hypothèses d'adéquation de l'un et de l'autre,
— au niveau de la théorie, en fonction des axiomes et des règles de déduction.

(Ces deux derniers objectifs seront rarement atteints, même peut-être jamais !... Ils peuvent être "finalités du second cycle", mais ils peuvent déjà éclairer nos réflexions personnelles et enrichir les activités des élèves dans le premier cycle.)

...ALORS, une méthode d'enseignement naturellement définie s'en déduit. La voici :

POUR UN ENSEIGNEMENT NATUREL DE LA GEOMETRIE

G_1 = V_1 (observation - expérimentation)

G_2 = V_2 (idéation) (conjectures)

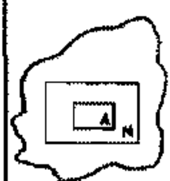
G_3 (écriture). L'étape G_3 conduit à la prise de possession d'un ensemble N de définitions et de propriétés considérées comme "naturelles" (en ce sens que, dans tout modèle abstrait ultérieurement construit, toutes ces propriétés seront vérifiées).
L'écriture pas à pas du catalogue N serait, bien naturellement, très fastidieuse et donc "démobilisatrice". Elle ne doit pas devenir l'activité principale.

G_4 (apprentissage de la démonstration).
On fait fonctionner (en graduant les difficultés d'utilisation des règles classiques de déduction) le schéma "Si N, alors ..." pour démontrer à partir de N d'autres propriétés relatives à des situations particulières ou générales.

On a ici un double avantage :
— pouvoir choisir des situations dont on sait qu'elles présentent un intérêt didactique ;
— motiver l'apprentissage de la déduction par l'obtention de résultats non immédiats.

La non-apparition de conséquences aberrantes renforce la confiance que l'on pouvait avoir placée dans les propriétés N. A ce stade on a appris d'une part à manipuler les règles de déduction, d'autre part à relativiser la "vérité" des propriétés démontrées à la "vérité" des propriétés N.
A aucun moment de cette phase, il n'est oublié que *"l'éducation de la rigueur se fait progressivement. Dans les premiers temps, il est évident que des hypothèses non formulées (et non formulables ou qu'il n'est pas souhaitable de formuler alors) interviennent. C'est petit à petit que l'apprenti géomètre deviendra plus exigeant, qu'il sera capable de voir de plus en plus finement ses présupposés."* (Ch. Pérol)

G_5 (la possibilité d'une construction axiomatique)
On peut alors montrer que certaines propriétés de N permettent de démontrer d'autres propriétés de N (et la motivation pédagogique est ici la surprise — car il est curieux que des propriétés ayant le même statut d'évidence mentale puissent être déduites l'une de l'autre).



C'est donc qu'il est possible d'organiser déductivement les énoncés, ce qui ne veut pas dire qu'il est nécessaire de le faire effectivement en premier cycle. Certains énoncés prennent ainsi plus d'importance que d'autres et il n'est pas ridicule de rechercher un noyau A de propriétés permettant de démontrer les propriétés N.
La volonté de minimisation du cardinal de A est une affaire de mathématiciens ; *il suffira pour l'élève de faire quelques pas vers la diminution du nombre d'énoncés à admettre.*

G_6 On pourrait alors disposer, si le nombre d'heures le permettait, d'un modèle mathématique dans lequel la validité des théorèmes est clairement liée à celle des axiomes A et des règles de déduction logique. Ce modèle pourrait alors être franchement développé pour obtenir des résultats dont la traduction concrète est non triviale, utile ou simplement belle ... CE SERA POUR LE SECOND CYCLE !

LA PROPOSITION CI-DESSUS N'EST QU'UN SCHEMA d'action certainement incomplet dans la mesure où il ne précise pas les ensembles N et A.

Remarquons cependant que :

— la précision d'un ensemble A particulier n'offre aucun intérêt en quatrième-troisième. Les histoires tournant autour du choix de telle ou telle axiomatique ne nous paraissent avoir aucun sens pédagogique ;

— l'ensemble N est a priori assez subjectif ; il est intéressant que chaque classe puisse préciser progressivement le sien et discuter de ses "frontières". La discussion est ici particulièrement éducative puisqu'elle va déboucher sur la justification de l'activité déductive.

*

* *

Et nous souscrivons pleinement aux lignes suivantes dues à Charles PEROL :

"Votre article me suggère un modèle beaucoup plus relatif (exprimant ce qui se passe à un moment donné).

— Un champ de pré-supposés :
- la plupart inexprimés (consciemment par le maître).
- quelques-uns exprimés.

— Des activités exigeant la mobilisation de plus en plus poussée de ces pré-supposés.

Tout l'art du maître consiste à proposer (ou à accepter) des situations à la fois motivantes (et de ce fait souvent confuses) et mettant prioritairement (mais pas nécessairement exclusivement) en œuvre le champ des pré-supposés exprimés (et leurs conséquences).

Progressivement, le champ des pré-supposés inexprimés diminuera, grignoté par ce qui est exprimé (en restant pré-supposé ou en devenant "démontré"). Evidemment, cette construction n'est pas satisfaisante. Elle appelle une reconstitution formelle qu'il y a intérêt à repousser assez loin (c'est-à-dire au-delà du premier cycle) pour avoir fait fondre suffisamment le champ des pré-supposés inexprimés et pour disposer des bons outils."