1

ETUDES

Sur le théorème des fonctions réciproques

par Georges LION, Université de Limoges

La condition d'existence de la fonction réciproque d'une fonction réelle définie dans un intervalle de **R** est un résultat essentiel pour l'enseignement de l'analyse.

Dans les exposés classiques, on part d'une fonction continue et strictement monotone (voir par exemple J. Dixmier, *Cours de Mathématiques du 1er cycle*).

En "termes ensemblistes", il convient aussi d'étudier une autre hypothèse : la fonction f définit une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J.

Rendu à ce point, on peut remarquer que toutes ces propriétés ne sont pas indépendantes : si ϕ est continue dans I, $\phi(I)$ est un intervalle ; si ϕ est strictement monotone dans I, elle y définit une injection ; ce sont là les implications les plus faciles à vérifier ; on en trouvera d'autres dans Bourbaki, *Topologie Ch. 4*, ou dans Chambadal et Ovaert, *Cours de Mathématiques, tome 1.*

Ces lectures conduisent aux conclusions suivantes :

Soit f définissant une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J :

1) f n'est pas nécessairement continue, ni strictement monotone.
Exemple :

$$I = J = [0, 1] \; ; \quad f(t) = t \quad \text{pour} \quad t \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad t \leqslant \frac{2}{3}$$

$$f(t) = 1 - t \quad \text{pour} \quad \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$$

2) Pour que f soit continue dans I, il faut et il suffit qu'elle y soit strictement monotone.

Nous allons donner une démonstration simple de ce résultat, en mettant en lumière la symétrie parfaite des rôles joués par la continuité et la monotonie stricte.

Une mise au point sur ce sujet n'est sans doute pas inutile ; on peut lire en effet dans le rapport du CAPES 1977 : "Ce qui est important, ce n'est pas la continuité de f, mais sa stricte monotonie".

Proposition

Soit ϕ une fonction réelle, définie dans l'intervalle I. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

A) ϕ est continue et définit une injection dans I

B) ϕ est strictement monotone dans I et $\phi(I)$ est un intervalle.

Démonstration

• A $\Rightarrow$ B Posons $E = \{(x, y) \mid (x, y) \in I \times I \mid x < y\}$

$\Omega = \{(x, y) \mid (x, y) \in E \mid \phi(x) < \phi(y)\}$

$\Omega' = \{(x, y) \mid (x, y) \in E \mid \phi(x) > \phi(y)\}$

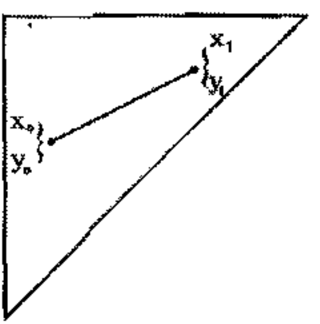
Les sous-ensembles Ω et Ω' sont *ouverts* dans E, et forment une partition de E ; E est lui-même convexe, donc convexe, et par conséquent Ω ou Ω' est vide, d'où le résultat.

D'une façon plus élémentaire, on peut supposer que Ω et Ω' sont tous deux non vides.

Soient alors $(x_0, y_0) \in \Omega$, $(x_1, y_1) \in \Omega'$. Le segment joignant ces deux points est contenu dans E, et on peut le représenter par

$x(t) = (1-t)\,x_0 + t\,x_1$

$y(t) = (1-t)\,y_0 + t\,y_1$ (pour $t \in [0, 1]$)



Pour arriver à la contradiction, il suffit d'appliquer le théorème de la valeur intermédiaire à $t \mapsto \phi(x(t)) - \phi(y(t))$.

• B $\Rightarrow$ A Supposons par exemple ϕ strictement croissante et prouvons d'abord que ϕ est continue en tout x_0 intérieur à I.

Sachant que $\phi(\mathrm{I})$ est un intervalle, et $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe x_1 et x_2 dans I, $x_1 < x_0 < x_2$, tels que

$$\phi(x_1) \geqslant \phi(x_0) - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \phi(x_2) \leqslant \phi(x_0) + \varepsilon \ .$$

Finalement $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ entraîne $\phi(x_0) - \varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant \phi(x_0) + \varepsilon$.

On raisonne de même lorsque x_0 est une borne de I, et aussi lorsque ϕ est strictement décroissante.

Corollaires

Reprenons pour f une fonction définissant une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J ; le résultat noté 2) plus haut est une conséquence de notre proposition.

Voici une seconde conséquence : Notons g la fonction définie dans J, réciproque de f ; on a les implications suivantes :

f est continue $\Rightarrow$ f est strictement monotone (appliquer la proposition à f)

f est strictement monotone $\Rightarrow$ g est strictement monotone (raisonner directement).

g est strictement monotone $\Rightarrow$ g est continue (appliquer la proposition à g).

Enfin, on peut utiliser la proposition pour démontrer le résultat suivant :

Si f est un difféomorphisme d'un intervalle ouvert I sur un intervalle ouvert J, alors f' garde un signe constant dans I.

Remarque :

Rappelons que "strictement monotone" équivaut à "monotone *et* injective".

En pratique, on vérifie que la fonction donnée est à la fois continue et strictement monotone (exemples : exponentielle, fonctions circulaires et hyperboliques). La méthode la plus simple est donc "surabondante" du point de vue de la pure logique.

Par contre un bon approfondissement théorique de ces notions exige la connaissance des équivalences démontrées ici, et peut trouver sa place parmi l'étude des qualités bien spéciales de la droite réelle.