

# A propos de l'article de P. Gagnaire sur les pseudo-hypercubes

par Paul LABERENNE, Professeur honoraire, Lycée Chaptal, Paris

P. Gagnaire a posé page 784 (Bulletin n° 311) la question suivante : *Tout espace  $R^m$  contient soit de vrais hypercubes (à côté et diagonale entiers), soit de pseudo-hypercubes, mais pas les deux à la fois. Est-ce vrai ?*

Nous allons montrer qu'il faut répondre par la négative, c'est-à-dire qu'il existe des valeurs de  $m$ , carrés de naturel, pour lesquelles il y a, à la fois, de vrais hypercubes et des pseudo-hypercubes.

Rappelons que si l'on a un pseudo-hypercube dans  $R^m$ , il existe deux types d'arêtes  $x$  et  $x + 1$  ( $x$  est naturel) et trois naturels  $m$ ,  $p$  et  $d$  (avec  $m \geq p$ ,  $p \neq 0$  et  $p \neq m$ ) tels que :

$$(1) \quad (m - p)x^2 + p(x + 1)^2 = d^2$$

Remarquons d'abord que si  $m$  est carré parfait ( $m = \mu^2$ ,  $\mu$  naturel), il y a une infinité de vrais hypercubes tels que  $\mu^2 x^2 = d^2$ ,  $d = \mu x$ ,  $x$  étant un naturel quelconque, mais qu'il y a aussi des pseudo-hypercubes dans le cas très particulier où  $x = 0$ .

Pour  $m = 25$ , par exemple,  $\mu = 5$ , on a pour  $x = 0$

$$p = 1, d = 1 ; p = 4, d = 2 ; p = 9, d = 3 .$$

Nous excluons ce cas, comme l'a fait implicitement P. Gagnaire dans l'énoncé de sa question.

*Etude du cas général  $m = \mu^2$ .*

Nous supposons  $\mu \geq 2$  ; le cas  $\mu = 1$  est immédiat.

L'égalité (1) devient

$$(2) \quad m x^2 + p(2x + 1) = \mu^2 x^2 + p(2x + 1) = d^2$$

d'où  $d > \mu x$  et l'on peut poser  $d = \mu x + h$ ,  $h$  est naturel  $\geq 1$ .

En remplaçant dans (2), on a

$$(3) \quad p(2x + 1) = 2h\mu x + h^2 = h(2\mu x + h)$$

Comme  $2\mu x + h > 2x + 1$ , il faut  $h < p$

$$\text{Or (3) donne (4) } x = \frac{h^2 - p}{2(p - h\mu)}$$

On aura ainsi tous les pseudo-hypercubes, s'ils existent, en donnant à  $p$  et  $h$  toutes les valeurs naturelles compatibles avec les conditions précédentes, et en conservant seulement pour  $x$  les valeurs entières positives.

Le nombre des essais est limité. En effet  $1 \leq p \leq m-1$  et pour toute valeur de  $p$ ,  $1 \leq h \leq p-1$  (5). Cette dernière inégalité montre qu'on ne peut avoir  $p = 1$ . On essaiera donc pour  $p = 2$ ,  $h = 1$ ; pour  $p = 3$   $h = 1, 2$ ; ...; pour  $p = m-1$ ,  $h = 1, 2, 3 \dots m-2$ .

Le nombre  $N$  des essais est donc

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + m - 2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

C'est une borne supérieure du nombre des solutions de  $x$  entières et positives. Qui établit que *dans  $R^m$  le nombre des pseudo-hypercubes possibles est borné par chaque valeur de  $m$ .*

Cas de  $m = 4$  ( $\mu = 2$ ),  $m = 9$  ( $\mu = 3$ ), (4) ne donne aucune valeur acceptable pour  $x$ . Il n'y a pas de pseudo-hypercubes.

Par contre, pour  $m \geq 16$  ( $\mu \geq 4$ ), il y aura toujours au moins un pseudo-hypercube correspondant à  $x = 1$ . Si l'on fait  $x = 1$  dans (3), il vient en effet : (6)  $3p = h(2\mu + h)$ .

3, naturel premier, qui divise le premier membre, doit diviser au moins l'un des facteurs du second membre. L'égalité (6) est, en particulier, satisfaite pour  $h = 3$ ,  $p = 2\mu + 3$ .

Ces valeurs conviennent dans le problème considéré si  $h < p$  ce qui est vérifié, et si  $p < m$ , c'est-à-dire  $2\mu + 3 < \mu^2$ ,  $\mu^2 - 2\mu - 3 < 0$  ou  $\mu > 3$  ce qui est également vérifié.

Notons que (6) peut avoir d'autres solutions, si  $h$  est simplement un diviseur de  $h$  ou s'il divise  $2p + 3$ .

Cas où  $m = 16$  ( $\mu = 4$ ) ; on a  $x = 1$  si  $3p = h(8+h)$

Première solution  $h = 3$ ,  $p = 11$ ,  $d = 7$ ,

$$[5 \times 1^2 + 11 \times 2^2 = 49 = (4+3)^2]$$

Deuxième solution  $h = 1$ ,  $p = 3$ ,  $d = 5$ ,

$$[13 \times 1^2 + 3 \times 2^2 = 25 = (4+1)^2]$$

Il n'y a pas d'autre solution, si l'on exclut les cas où (4) donne 0 ou l'infini.

Cas où  $m = 25$  ( $\mu = 5$ ) ; on a  $x = 1$  si  $3p = (h+10)$

On a les deux solutions :  $h = 3, p = 13, d = 8$  ;  $h = 2, p = 8, d = 7$ . Dans ce cas également il n'y a pas d'autre valeur possible pour  $x$ .

Pour des valeurs plus grandes de  $m$ , on eut, au contraire, trouver des valeurs de  $x$  autres que 1.

Voici quelques résultats relatifs à  $m = 100$  ( $\mu = 10$ ) n'ayant pas d'ordinateur à ma disposition, je n'ai pas fait les 4851 essais correspondant à (4) et me suis contenté de résoudre (3) en donnant à  $x$  quelques valeurs

On a  $x = 1$  pour  $h = 3, p = 23, d = 13$  ;  $h = 1, p = 7, d = 11$  ;  
 $h = 4, p = 32, d = 14$  ;  $h = 7, p = 63, d = 14$ .

$x = 2$  pour  $h = 5, p = 45, d = 25$

$x = 3$ , pour  $h = 3, p = 27, d = 33$  ;  $h = 7, p = 67, d = 37$ .

$x = 4$  pour  $h = 1, p = 9, d = 41$

Il n'y a pas de pseudo-hypercubes correspondant à  $x = 5, 6, 7, 8, 9$ .

$x = 10$  correspond à  $h = 7, p = 69, d = 107$   
pas de solution pour  $x = 11$

$x = 12$  correspond à  $h = 5, p = 49, d = 125$

Je laisse au lecteur le soin de continuer....

*Remarque* : Cet article ne répond qu'à l'une des interrogations de P. Gagnaire. Il laisse de côté la question de savoir si tout  $R^m$  contient des pseudo-hypercubes, lorsque  $m$  n'est pas un carré parfait.