Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des "structures multiplicatives" élémentaires ? Un sondage

par

G. Vergnaud, G. Ricco, A. Rouchier, P. Marthe, R. Metregiste. IREM d'Orléans, Centre d'Etude des Processus cognitifs et du Langage, C.N.R.S. — E.H.E.S.S., Paris.

Les faits qui sont rapportés dans cet article ne doivent pas être interprétés sans précaution et c'est la raison pour laquelle ils sont accompagnés d'un commentaire préalable. Les auteurs de l'expérience rapportée ici avaient pleinement conscience, avant même de l'entreprendre, de son caractère limité. S'ils en publient cependant les résultats, c'est pour illustrer les problèmes qui se posent à l'enseignant de mathématiques au début du premier cycle du second degré, dans le domaine de l'acquisition des "structures multiplicatives". Mais il serait dangereux de tirer de ces faits des conclusions prématurées, alors même que tout, ou presque tout, reste à faire, tant dans l'analyse systématique des acquisitions des élèves que dans la recherche didactique qui doit nécessairement accompagner cette analyse.

Par "structures multiplicatives", nous entendons, dans un sens un peu inhabituel du terme "structures", des relations, transformations, lois de composition ou opérations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions. Ces structures ne se réfèrent donc ni à un ensemble homogène d'objets mathématiques, ni à une loi unique de composition. Il s'agit plutôt d'un "espace de problèmes" dont la résolution implique une ou plusieurs multiplication(s) ou division(s). Ce choix est directement lié aux critères que le psychologue est amené à fixer à l'acquisition de concepts : en effet, celui-ci est presque toujours conduit à considérer comme un critère décisif *les conduites effectivement observées en situation de résolution de problème.* Que signifierait par exemple l'affirmation selon laquelle un enfant a compris la notion de groupe s'il n'était pas capable d'inverser un élément du groupe pour produire la solution d'un problème impliquant cette inversion ?

Avant de procéder à une analyse, sinon exhaustive, du moins relativement systématique de l'espace de problèmes auquel nous nous référons, nous estimons utile de faire trois remarques :

1/ Dans l'ensemble des classes de problèmes susceptibles d'être étudiées, et dont le lecteur apercevra plus loin la grande variété, nous n'avons abordé qu'un très petit nombre de cas. Les résultats sont donc loin de fournir une réponse aux questions qu'il faudrait se poser quant à l'acquisition des "structures multiplicatives". Si, à nos yeux, les relations utilisées sont des relations tout à fait fondamentales, elles n'en sont pas moins vues ici à travers des classes de problèmes et des situations particulières qui n'ont pas valeur de généralité.

2/ Les résultats, qui apparaîtront d'une certaine brutalité aux yeux de certains lecteurs, ne doivent pas conduire à une attitude pessimiste du style : "A quoi bon ! si tous les enfants de sixième ne savent même pas résoudre ces problèmes élémentaires". En effet, si ces résultats, obtenus sur un échantillon d'enfants d'Orléans apparemment représentatif, montrent que de graves lacunes existent encore chez les élèves de sixième, ils montrent aussi que des fragments de rationalité fonctionnent avec efficacité. Ce qu'il faut dénoncer, ce n'est pas la faiblesse des enfants, mais bien plutôt l'illusion et l'ignorance dans laquelle nous sommes encore des difficultés d'appropriation par les enfants de l'arithmétique dite élémentaire.

3/ Ce serait aussi une grave erreur d'imputer la responsabilité des lacunes observées à la réforme de l'enseignement des mathématiques et de croire qu'un simple retour aux méthodes passées permettrait de combler ces lacunes. Bien au contraire, on ne peut espérer apporter une réponse scientifique aux problèmes didactiques posés par ces lacunes que par une analyse, dans les termes mêmes des mathématiques modernes, de la structure relationnelle des principales classes de problèmes rencontrées, et par une étude expérimentale approfondie qui devrait se placer à la fois sur le terrain de la didactique et sur celui de la psychologie des acquisitions cognitives.

L'objectif de cet article n'est donc pas d'alimenter un courant de retour à certaines didactiques périmées, mais au contraire d'encourager les enseignants et les chercheurs à aller résolument de l'avant. Il est possible, sans avoir de complaisance à l'égard des défauts de l'enseignement actuel de mathématiques, de s'appuyer sur les acquis positifs de cet enseignement pour analyser et surmonter des difficultés encore mal connues.

1. Les deux grandes "structures multiplicatives" et le plan d'expérience.

L'analyse des problèmes qui font appel à des opérations de nature multiplicative (multiplication ou division) montre qu'ils se situent presque toujours dans le cadre de deux grandes structures, éventuellement combinées ou dégénérées :

1.1. La structure de l'isomorphisme de mesures
1.2. La structure du produit de mesures.

1.1. *La structure de l'isomorphisme de mesures* est celle de la relation de proportionnalité entre deux sortes de grandeurs : des quantités de marchandises et leur prix, des volumes et les poids correspondants, etc. Ces grandeurs peuvent être continues (longueur, volume, poids, temps, ...) ou discrètes (nombre d'objets, de paquets, etc.). On peut représenter commodément ces structures par des tableaux de correspondance :

x	$y = f(x)$
x'	$y' = f(x')$

dans lesquels la fonction f fait passer de la mesure d'une grandeur de la première sorte à la mesure de la grandeur correspondante de la deuxième sorte.

Exemples

La vitesse uniforme d'un mobile		le prix des bouchées de chocolat	
Temps en heures $\xrightarrow{f}$	distance parcourue en kilomètres	bouchées en unités $\xrightarrow{f}$	prix en francs
3 $\longrightarrow$	225	1 $\longrightarrow$	1,25
6 $\longrightarrow$	450	3 $\longrightarrow$	3,75

On peut analyser ces tableaux

du point de vue de la fonction linéaire,

$$x \longmapsto f(x) \qquad f(x) = ax$$

dont l'écriture classique : $y = ax$ met mieux en évidence la relation entre trois grandeurs ; exemple $d = vt$ dans le cas de la vitesse uniforme,

et du point de vue de la propriété d'isomorphisme

multiplicatif $\quad x' = \lambda x \Rightarrow f(x') = \lambda f(x)$

ou additif $\quad x'' = x + x' \Rightarrow f(x'') = f(x) + f(x')$.

Ces deux analyses, complémentaires l'une de l'autre, permettent de distinguer différentes classes de problèmes et différentes procédures de solution qu'il serait erroné de confondre car elles ne traduisent pas les mêmes propriétés et n'ont pas le même statut pour l'enfant.

1.2. *La structure du produit de mesures* est celle du produit de deux dimensions l'une par l'autre, ou encore du produit cartésien. Le cas le plus simple dans les grandeurs physiques est celui de l'aire, produit d'une longueur par une longueur, mais il existe, dans les problèmes d'arithmétique élémentaire, de nombreux produits cartésiens qui relèvent de cette structure : par exemple le nombre de couples différents qu'on peut former avec n garçons et m filles.

Certes, le produit de mesures peut s'analyser comme un double isomorphisme de mesures (double proportionnalité de la surface par rapport à la première dimension et par rapport à la seconde dimension), et réciproquement l'isomorphisme de mesures peut s'analyser comme un produit ($d = vt$ dans l'exemple de la vitesse uniforme). Mais il serait artificiel de confondre ces deux structures alors que la nécessité s'impose au contraire d'une discrimination aussi fine que possible des différentes classes de problèmes auxquelles l'enfant est confronté.

1.3. *Le plan d'expérience.*

L'expérience que nous allonrs rapporter a consisté a poser, à une centaine d'enfants de sixième, cinq problèmes dont voici les énoncés :

P_0 On installe le chauffage central dans une maison de longueur 18 mètres, de largeur 6 mètres et de hauteur 4 mètres.

1) Sachant qu'un radiateur est composé de 8 éléments et qu'un élément de radiateur peut chauffer un volume de 6 mètres cubes, combien de radiateurs faut-il poser ?

2) On envisage une consommation moyenne de 4 kilogrammes de charbon par jour et par radiateur. Si l'on chauffe du 1er octobre au 15 avril inclus, quel poids de charbon utilisera-t-on ?

P_1 Quel est, en mètres cubes, le volume d'eau nécessaire pour remplir un bassin rectangulaire de longueur 17 mètres, de largeur 8 mètres et de profondeur 3 mètres ?

P_{21} On veut qu'un train de luxe contienne 432 sièges de première classe. Chaque wagon contient 8 compartiments et chaque compartiment contient 6 sièges. Combien faut-il de wagons pour former ce train ?

P_{22} On veut remplir un silo à blé de 378 mètres cubes. Chaque train de chargement est composé de 7 wagons et chaque wagon a un volume de 6 mètres cubes. Combien faut-il de trains pour remplir le silo ?

P_3 Un fermier possède 5 vaches qui produisent chacune en moyenne 23 litres de lait par jour pendant les 180 meilleurs jours de l'année. Quelle quantité de lait obtient-il de ses vaches pendant cette période ?

Le premier problème P_0 a simplement été choisi dans un manuel de sixième (Hachette : Barlier, Bocage, Andren) comme un problème tout venant ne posant pas, aux yeux des auteurs du manuel, de problème particulier. Son intérêt réside seulement dans le fait que les questions qu'il contient comportent plusieurs aspects différents des structures multiplicatives que nous venons d'évoquer (produit de mesures — isomorphisme de mesures — double proportionnalité).

Les quatre autres problèmes ont été fabriqués de telle sorte qu'ils soient, du point de vue des relation en jeu, isomorphes aux différentes questions du premier problème.

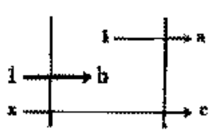
Le choix de ces énoncés ne doit pas être interprété comme une invitation à utiliser tel quel ce type de problèmes.

	P_0	Autres problèmes isomorphes aux différentes parties de P_0	Analyse relationnelle
1ère question	1. Calcul de volume	P_1	Produit de mesures
	2. Calcul du nombre de radiateurs	P_{21} discret et P_{22} continu (volume)	Isomorphisme de trois espaces de mesure *
2ème question	1. Calcul du nombre de jours	pas d'équivalent	
	2. Calcul de la quantité de charbon	P_3	Double proportionnalité par rapport au temps et par rapport à une autre quantité.

La comparaison des procédures et des résultats obtenus aux différents problèmes devrait permettre d'étudier la stabilité de ces procédures ainsi que la part revenant, dans les difficultés rencontrées par les enfants, à la complexité propre des questions élémentaires en jeu et à la composition de plusieurs questions.

Surtout l'analyse détaillée des procédures utilisées devrait nous éclairer sur la façon dont les enfants de sixième comprennent ces problèmes.

* Nous verrons plus loin que la question correspond dans les trois cas à la forme suivante



La passation collective et écrite a été accompagnée de quelques entretiens individuels qui n'apportent pas, en l'occurrence, d'informations supplémentaires. Nous nous en tiendrons donc à l'analyse des protocoles écrits.

Le travail a été effectué par les enfants pendant le second trimestre de l'année scolaire au cours de trois séances, séparées l'une de l'autre par une durée de deux semaines. L'ordre de passation a été le suivant :

1ère séance	P_0			
2ème séance	P_1 P_{21}	pour la moitié des enfants	P_{21} P_1	pour l'autre moitié
3ème séance	P_{22} P_3	pour la moitié des enfants	P_3 P_{22}	pour l'autre moitié

La programmation de l'expérience est assez critiquable : il aurait été souhaitable, notamment, d'équilibrer l'ordre de passation de P_0 avec les autres problèmes, et d'équilibrer aussi l'ordre entre P_{21} et P_{22} dont la structure est identique. Aussi bien cette expérience n'est-elle qu'un sondage, dont les résultats appellent de nombreuses vérifications. Ils n'en sont pas moins instructifs.

2. Les taux bruts de réussite et d'échec.

Les tableaux ci-dessous Ia, Ib et Ic fournissent une vue d'ensemble des taux bruts de réussite aux différents problèmes.

Taux bruts de réussite

Ia

P_0 (1ère partie de la 1ère question	29/84
P_1	38/84

Ib

P_0 (1ère question)	29/84
P_{21}	56/84
P_{22}	62/84

Ic

P_6 (2ème question)	29/84
P_3	64/84

Attention : les 29 sujets (sur un total de 84) qui réussissent aux différentes sous-questions de P_0 se recrutent de façon très différente, ainsi qu'on peut le voir dans le tableau IId.

Ils permettent la comparaison entre les différentes sous-questions de P_0, qui font appel, comme on l'a vu plus haut, à différentes structures multiplicatives, et les problèmes P_1, P_{21}, P_{22} et P_3 isomorphes à ces sous-questions. C'est ainsi que dans le tableau Ib, on trouve les taux de réussite à la 2ème partie de la première question de P_0 (calcul du nombre de radiateurs nécessaires) ainsi qu'aux problèmes P_{21} et P_{22}. Ces premiers tableaux montrent

1 — La grande difficulté du calcul du volume (produit de mesures), y compris dans le cas où cette question est isolée et explicite (P_1).

2 — La difficulté moins grande (mais cependant non négligeable) des deux autres types de questions, qui sont réussies par 3 enfants sur 4 environ dans le cas où ces questions sont posées séparément (P_{21}, P_{22}, P_3).

3 — L'aggravation nette de ces difficultés lorsque ces questions sont des sous-questions d'un problème complexe (P_0) : chute de 50 % ou de 30 % du taux de réussite brut.

Les tableaux IIa, IIb, IIc, IId, IIe fournissent une image plus fine de la hiérarchie des réussites et des échecs.

Dans le tableau IIa, le résultat le plus frappant est l'effectif important de la séquence — — qui indique l'échec répété aux deux questions de calcul d'un volume. En effet, sur un total de 84 enfants, 38 échouent deux fois.

Les tableaux IIb et IIc sont assez comparables l'un à l'autre. Outre le fait qu'approximativement 1/5 ou 1/4 des sujets échouent encore à traiter les structures concernées, on peut observer que la grande masse des sujets se répartit sur les séquences + + + ou + + (réussite totale) ou sur les séquences — + + et — + (échec en

P_0 et réussite aux problèmes isolés correspondants). Le tableau IIb montre également que relativement peu de sujets se comportent de façon instable aux deux problèmes isomorphes P_{21} et P_{22} : 16 sujets en tout réussissent à l'un et échouent à l'autre.

Le tableau IId, concernant P_0, montre que 13 enfants seulement sur 84 réussissent la totalité des questions posées. Il faut mentionner que nous avons compté comme réussite toute procédure de calcul adéquate du point de vue des relations en jeu, en négligeant les erreurs de calculs et en considérant indépendamment les unes des autres les différentes sous-questions : un résultat faux à la deuxième question ne préjuge pas de la réussite ou de l'échec à la troisième question. Malgré cela, près de la moitié des enfants (39 sur 84) échouent à toutes les questions.

Le tableau IIe montre évidemment des performances meilleures que le tableau IId, mais confirme pour l'essentiel ce qui a déjà été dit. Il faut souligner cependant l'échec total de 11 sujets, incapables de traiter l'une quelconque des structures présentées, même sous une forme isolée.

Réussites et échecs comparés aux problèmes homologues

IIa

P_0	P_1	
+	+	21
+	—	8
—	+	17
—	—	38
Total		84

IIb

P_0	P_{21}	P_{22}	
+	+	+	23
+	+	—	1
+	—	+	4
+	—	—	1
—	+	+	28
—	+	—	4
—	—	+	7
—	—	—	16
Total			84

IIc

P_0	P_3	
+	+	27
+	—	2
—	+	37
—	—	18
Total		84

Réussites et échecs aux différentes questions de P_0.

IId

Vol.	1°Q	2°Q	
+	+	+	13
+	+	—	10
+	—	+	2
+	—	—	4
—	+	+	4
—	+	—	2
—	—	+	10
—	—	—	39
	Total		84

IIe

P_1	P_{21}	P_{22}	P_3	
+	+	+	+	29
+	+	+	—	1
+	+	—	+	3
+	—	+	—	1
+	—	—	+	3
+	—	—	—	1
—	+	+	+	17
—	+	+	—	4
—	+	—	+	4
—	+	—	—	1
—	—	+	+	6
—	—	+	—	1
—	—	—	+	2
—	—	—	—	11
			TOTAL	84

Réussites et échecs aux quatre autres problèmes.

3. Les procédures utilisées par les enfants, et leur répartition.

L'analyse qualitative des procédures utilisées doit évidemment être rapportée à chacune des structures relationnelles en jeu.

Comme P_1, P_2 et P_3 sont formés chacun d'une structure simple, et que P_0 est composé de l'articulation de ces trois structures, le plus simple est de procéder par type de question.

3.1. *Procédures observées pour le calcul du volume d'un parallélépipède rectangle* (P_1 — première partie de la première question de P_0).

Ces procédures sont d'une grande variété et quelques considérations doivent précéder leur analyse.

Tout d'abord, les procédures observées reflètent inégalement les représentations des enfants : il faut faire la part des formules stéréotypées, des procédures de calcul relativement contingentes* et des recherches laborieuses qui manifestent une véritable représentation conceptuelle ou préconceptuelle du volume.

Cette discrimination n'est pas aisée et les données recueillies dans le cadre limité de cette expérience ne permettent pas de distinguer, lorsqu'un enfant utilise l'une des procédures canoniques par exemple, ce qui relève de la simple recette apprise et ce qui relève d'une représentation conceptuelle. Il faudrait pour cela des contre-épreuves.

En ce qui concerne les démarches erronées par contre, on peut interpréter assez facilement certaines d'entre elles comme des stéréotypes, alors que d'autres manifestent assez clairement une recherche préconceptuelle.

Nous avons regroupé les procédures en quatre grandes classes en retenant comme critère de classification la dimension obtenue par les calculs faits. Le détail de ces procédures est donné dans le tableau IIIa.

* Par "contingentes" nous entendons des procédures qui n'ont pas de lien de nécessité avec une représentation aisément identifiable.

Tableau IIIa — Calcul du volume

Procédures observées	P_0	P_1
1. *Type volume* 1.1. (longueur x largeur) x hauteur	23	32
1.2. (longueur x hauteur) x largeur	5	3
1.3. (largeur x hauteur) x longueur	1	3
2. *Type périmètre* 2.1. (longueur + largeur + hauteur)	16	5
2.2. (longueur + largeur + hauteur) x n (n = 2,3 ou 4)	2	7
2.3. (longueur + largeur) x 2 + n x hauteur (n=1, 2 ou 4)	3	6
2.4. autres de type "périmètre"	2	6
2.5. périmètre de base	3	0
3. *Type surface* 3.1. aire de base	4	0
3.2. aire totale	1	0
3.3. aire partielle	1	0
4. *Mixtes* 4.1. (aire de base) + n x hauteur 2 x (aire de base) + n x hauteur (n = 1, 2 ou 4)	1	1
4.2. aire latérale + largeur	0	1
4.3 (périm. ou demi-périm.) x hauteur	2	12
4.4. aire de base x aire latérale	0	1
4.5. procédures comportant la multiplication des trois dimensions et des errements	0	4
4.6. autres de type mixte	0	1
5. *Autres* 5.1. volume = 18 m (longueur)	12	0
5.2. autres (nombre arbitraire par exemple)	8	2
Total	84	84

Réussites	29	38
Echecs	55	46
Total	84	84

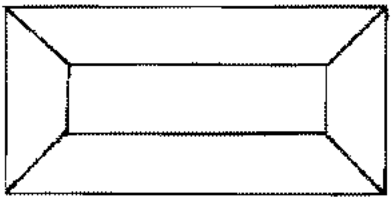
1) Procédures correctes de type "volume" : multiplication des trois dimensions.

Comme on pouvait s'y attendre, l'une de ces procédures *(longueur x largeur) x hauteur* est plus représentée que les autres.

2) Procédures de type "périmètre" : le calcul ne porte que sur les arêtes.

Ces procédures, fort intéressantes, sont détaillées dans le tableau IIIa. Si les procédures 2.1. et 2.5. peuvent s'interpréter aisément comme des réponses stéréotypées faisant sans doute peu de part à une représentation du volume, il n'en va pas de même des autres procédures qui mettent souvent en évidence, dessin à l'appui ou pas, une laborieuse recherche : par exemple

- le calcul total des arêtes avec le dessin suivant :



- ou bien le calcul du périmètre de base auquel on ajoute une fois ou 4 fois la hauteur, pour tenir compte de la troisième dimension,
- ou bien encore la somme des trois dimensions multipliée par 100, pour faire plus grand.

3) Procédures de type "surface " : le calcul fait intervenir des produits de dimensions, donc des aires et des sommes d'aires.

Là encore, si la procédure 3.1. peut être considérée comme un stéréotype appris, les autres procédures marquent une certaine recherche, comme en témoigne par exemple la démarche qui consiste à calculer trois aires (surface de base et deux faces latérales) et leur somme.

4) Ces procédures, assez nombreuses, manifestent un travail laborieux des enfants. Sans doute ce travail n'exclut-il pas certains aléas des calculs, mais il reflète le plus souvent une représentation du volume qui ne doit pas être rejetée comme une erreur pure et simple.

5) Autres procédures.

Il faut signaler qu'un nombre non négligeable d'enfants, dans P_0, prend simplement la longueur comme volume de la maison. Nous verrons plus loin qu'il s'agit là d'un effet spécifique au problème P_0.

Le tableau IIIa fournit la répartition pour P_0 et P_1 de l'effectif des 84 élèves dans les différentes classes de procédures. On peut faire les commentaires suivantes :

— les procédures canoniques sont, comme on pouvait s'y attendre, plus nombreuses pour P_1 que pour P_0 ;

— les procédures stéréotypées (2.1., 2.5., 3.1) sont beaucoup moins nombreuses pour P_1 que pour P_0 ;

— les procédures de type "surface" disparaissent pour P_1 ;

— par contre, les procédures mixtes sont beaucoup plus nombreuses.

Le tableau IIIb fournit la répartition croisée (pour P_0 et P_1) de l'effectif de 84 sujets dans les différentes classes de procédures, regroupées en procédures de type volume, périmètre, surface, mixtes et autres. Le tableau montre une certaine stabilité des procédures utilisées par les enfants pour P_0 et P_1. On peut observer cependant les points suivants :

— certains enfants qui ont réussi à calculer le volume dans P_0 utilisent pour P_1 une procédure périmétrique ou procédure mixte (8 enfants en tout).

— la disparition des procédures de type "surface" dans P_1 se fait principalement au profit des procédures périmétriques et des réussites.

Ces différentes observations accréditent la thèse que les procédures sophistiquées de type périmétrique ou de type mixte ne peuvent être considérées comme des aberrations pures et simples. Les glissements qui se font entre ces procédures et les procédures canoniques, l'amélioration non univoque des performances dans P_1, la diminution de l'effectif des stéréotypes qui va de pair avec cette amélioration, sont autant d'éléments favorables à cette interprétation. Les enfants tiennent compte des trois dimensions mais ne se représentent pas correctement la composition multiplicative de ces dimensions. Faute d'être investie dans une représentation opératoire, la formule apprise (lorsqu'elle l'a été) n'est pas appliquée.

On remarque par ailleurs dans le tableau IIIb que les enfants qui, pour P_0, avaient donné comme volume soit la longueur, soit un nombre arbitraire, se répartissent dans des catégories meilleures pour P_1. Il y a donc eu un effet incontestable de l'absence, dans P_0, de question explicite sur le volume.

IIIb
Tableau croisé des procédures utilisées pour le calcul du volume dans P_0 et dans P_1.

P_0 \ P_1	Type volume	Type périmètre	Type surface	Mixtes	Autres	Total
Type volume	21	2	0	6	0	29
Type périmètre	7	13	0	6	0	26
Type surface	2	3	0	1	0	6
Mixtes	1	0	0	2	0	3
Autres	7	6	0	5	2	20
Total	38	24	0	20	2	84

3.2. *Procédures observées pour la résolution des problèmes P_{21}, P_{22} et de la seconde partie de la première question de P_0.*

La classification des procédures observées est plus simple que pour le cas précédent. Cela tient surtout au fait que les enfants de sixième maîtrisent mieux ce type de relation.

Nous avons distingué trois grandes classes de procédures :

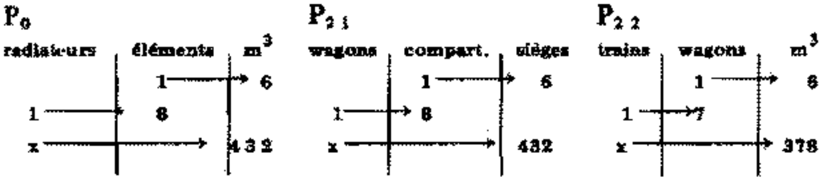
1 - les procédures canoniques

2 - les procédures partielles

3 - les autres procédures.

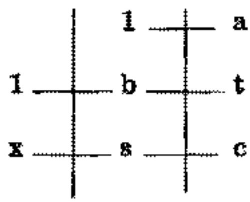
1 - *Procédures canoniques observées.*

Si l'on représente la structure relationnelle du problème comme on l'a fait plus haut :



on peut mettre en évidence deux procédures canoniques qui ont un sens simple dans le tableau.

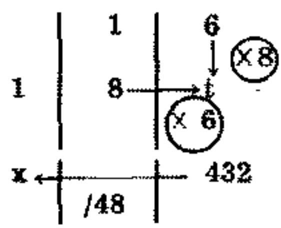
Désignons par a, b et c les données du problème, par x la grandeur à calculer et par t et s les inconnues intermédiaires possibles



1.1. La première méthode consiste à calculer t puis x. Dans l'exemple de P_{21} , cela revient à calculer

— d'abord le nombre des sièges par wagons
6×8 ou $8 \times 6 = 48$

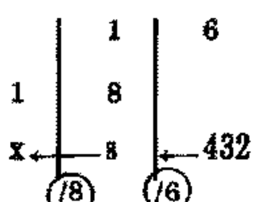
— ensuite le nombre de wagons
$432 : 48 = 9$



1.2. La seconde méthode consiste à calculer s puis x. Dans l'exemple de P_{21}, cela revient à calculer

— d'abord le nombre total de compartiments
$432 : 6 = 72$

— ensuite le nombre de wagons
$72 : 8 = 9$



1.3. Une autre procédure canonique se déduit de la procédure 1.2. par permutation des deux opérations (division par 8 d'abord et division par 6 ensuite). Le résultat intermédiaire ne constitue évidemment pas une grandeur physique, ce qui implique que le sujet s'est placé au plan numérique.

Dans l'exemple P_{21}, cela revient à faire successivement les deux opérations :

$$432 : 8 = 54$$
$$54 : 6 = 9$$

Le résultat intermédiaire 54 ne représente ni un nombre de sièges ni un nombre de compartiments.

2 - *Procédure par ajustement.*

Cette procédure consiste, comme dans la procédure 1.1., à calculer d'abord t. Ensuite le sujet recherche x par ajustement : recherche de l'opérateur adéquat qui, appliqué à t, donne c

Exemple dans P_{21} :

$8 \times 6 = 48$

$48 \times 8 = 384$

$384 + 48 = 432$

Réponse : il faut 9 wagons pour former un train.

Commentaire : l'enfant essaie l'opérateur $\times$ 8 et ajuste ensuite pour obtenir l'opérateur correct 9.

3 - *Procédures partielles*

Les sujets se contentent de faire l'une seulement des deux opérations qui seraient nécessaires. A la différence de la catégorie 4 (autres procédures), l'opération faite est pertinente. Malheureusement, le sujet s'arrête en chemin et donne comme réponse un résultat faux.

3.1. Cette procédure consiste à calculer s ... et à donner s comme valeur de x.

Dans l'exemple P_{21}, cette procédure consiste à diviser 432 par 6.

3.2. Cette procédure consiste à diviser c par b et à donner le résultat comme valeur de x.

Dans l'exemple P_{21}, cela revient à diviser 432 par 8.

3.3. Cette procédure consiste à calculer t ... et à donner t comme valeur de x.

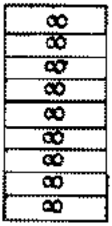
Dans l'exemple P_{21}, cela revient à donner 48 comme réponse.

4 - *Autres procédures.*

Plusieurs autres procédures ont été observées qu'il n'est pas possible de regrouper, ni d'énumérer exhaustivement. Le plus simple est de citer quelques exemples intéressants.

1er cas

Tu peux te servir de cette marge pour ton brouillon.

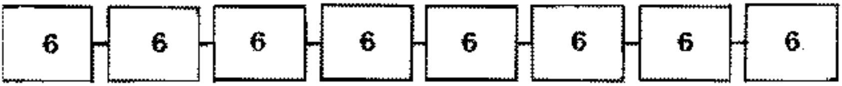


On veut qu'un train de luxe contienne 432 sièges de première classe. Chaque wagon contient 8 compartiments et chaque compartiment contient 6 sièges. Combien faut-il de wagons pour former ce train ?

Solution

Il l'en faut : 9.

2ème cas



$6 \times 8 = 48$ dans 8 compartiments il y a 48 sièges.

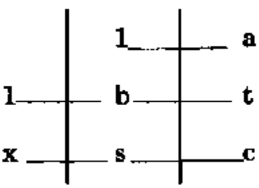
$$\begin{array}{r|l} 432 & \ \ 8 \\ \cline{2-2} 32 & \ \ 54 \\ 0 & -\ 6 \\ \cline{2-2} & \ \ 19 \end{array}$$

Il faut 19 wagon.

Le tableau IVa présente la répartition des procédures observées. On peut faire les commentaires suivants, qui sont toujours faits par rapport à l'exemple P_{21}.

IVa
Répartition des différentes catégories de procédures pour la 1ère question de P_0, pour P_{21} et pour P_{22}.

Procédures	P_0 (quest. 1)	P_{21}	P_{22}
1.1. calcul de t puis de x	20	41	41
1.2. calcul de s puis de x	8	6	15
1.3. ordre permuté des 2 divisions	1	4	2
2. ajustement	0	5	4
3.1. calcul de s s = x	20	5	6
3.2. x = c : b	3	8	2
3.3. calcul de t ; t = x	1	1	3
4. autres	31	14	11
Total	84	84	84



	P_0 (quest.1)	P_{21}	P_{22}
Réussites	29	56	62
Echecs	55	28	22
Total	84	84	84

Parmi les procédures canoniques, la procédure 1.1. qui consiste à calculer d'abord le nombre de sièges par wagon et ensuite le nombre de wagons, est largement majoritaire. La seconde procédure (nombre total de compartiments puis nombre de wagons) est souvent utilisée également, tandis que la démarche qui inverse l'ordre des opérations de division (procédure 1.3.) est relativement peu utilisée.

La procédure d'ajustement est utilisée par un nombre non négligeable de sujets, en dépit de la difficulté qu'elle présente, compte tenu de la grandeur des nombres en jeu.

En ce qui concerne les procédures partielles, le fait à souligner est l'utilisation majoritaire de la procédure 3.1., qui consiste à diviser par 6 et à arrêter là le calcul. Une erreur fondamentale est donc faite sur la grandeur ainsi trouvée puisque le nombre de compartiments est alors identifié au nombre de wagons. Il en est de même pour la procédure 3.3. dans laquelle le nombre de sièges par wagon est identifié au nombre de wagons.

Le caractère minoritaire de la procédure 3.2. par rapport à la procédure 3.1. s'apparente à ce que nous avons dit plus haut de la permutation des opérations de division.

Ce n'est pas une vaine subtilité que de distinguer ces différentes procédures. Elles n'ont effectivement pas le même sens du point de vue du traitement des relations en jeu.

Le tableau IVb présente la répartition croisée des procédures utilisées pour les problèmes P_{21} et P_{22}. D'autres tableaux, croisant P_0 et P_{21} d'une part, P_0 et P_{22} d'autre part, ont été établis. Ils n'apportent pas d'information divergente et sont moins intéressants dans la mesure où P_0 est beaucoup moins bien réussi.

La principale observation qu'on peut faire est que la stabilité est relativement bonne pour la procédure canonique majoritaire (division par 48 ou par 42) et relativement faible pour les autres procédures canoniques et pour les procédures erronées.

IVb - Tableau croisé des procédures utilisées pour les deux problèmes homologues P_{21} et P_{22}

P_{22} \ P_{21}	1.1 /48	1.2 /6 /8	1.3 /8 /6	2 48x9	3.1 / 6	3.2 / 8	3.3 6x8	4 autres	T
1.1 /42	30	1	2	2	2	3		1	41
1.2 /6 /7	6	4	2		1			2	15
1.3 /7 /6						1		1	2
2 42 x 9	1	1		2					4
3.1 /6	1					3		2	6
3.2 /7						1		1	2
3.3 6 x 7							1	2	3
4 autres	3			1	2			5	11
T	41	6	4	5	5	8	1	14	84

3.3. *Procédures utilisées par les enfants pour P_3 et pour la deuxième question de P_0 .*

La structure en jeu cette fois est celle d'une double proportionnalité, par rapport au temps, d'une part, par rapport à une autre grandeur (radiateurs, vaches) d'autre part, d'une troisième grandeur (consommation de charbon, production de lait). Cette dernière grandeur n'est pas assimilable pour autant à un produit de mesures * .

Représentons par un schéma cartésien cette double proportionnalité, en prenant l'exemple de P_3 .

vaches / jours	1	× 5	5
1	23		s
× 180			
180	t		x

Un fermier possède 5 vaches qui produisent chacune en moyenne 23 litres de lait par jour pendant les 180 meilleurs jours de l'année. Quelle quantité de lait obtient-il de ses vaches pendant cette période ?

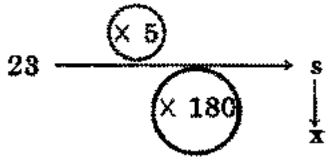
Nous désignons par s et t les deux quantités intermédiaires et nous indiquons les opérateurs qui font passer d'une ligne, ou d'une colonne, à une autre.

* Nous laissons délibérément de côté dans P_0 le calcul du nombre de jours, qui n'est pas pertinent pour l'analyse que nous faisons ici.

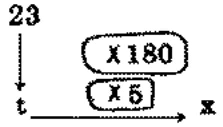
1) Procédures canoniques observées.

Il est facile de mettre en évidence dans ce schéma deux procédures canoniques.

1.1. - La première consiste à calculer d'abord s (la production des 5 vaches par jour, la consommation des neuf radiateurs par jour), puis x.



1.2. - La seconde consiste à calculer d'abord t (la production d'une vache en 180 jours, la consommation d'un radiateur en n jours), puis x.



1.3. - Evidemment, il existe une troisième procédure canonique, qui n'a pas de sens clair du point de vue des grandeurs physiques en jeu et qui se place en fait au plan numérique. Elle consiste à calculer d'abord le produit des deux grandeurs de référence (temps et vaches) et à multiplier seulement ensuite par la valeur unitaire (production de lait par vache et par jour) ; elle revient à calculer d'abord l'opérateur composé, puis x .

2) Procédures partielles

Trois procédures partielles se déduisent de ces trois procédures canoniques : elles consistent à arrêter le calcul après le premier produit et à présenter le résultat ainsi obtenu comme la bonne réponse.

3) Autres procédures.

D'autres procédures, dans le détail desquelles il n'est guère utile d'entrer, consistent à faire des calculs relativement aberrants du point de vue des relations en jeu (division, addition), éventuellement après avoir fait une multiplication pertinente.

Le tableau Va présente la répartition de ces procédures pour la deuxième question de P_0 et pour P_3 .

Va - Répartition des différentes catégories de procédures pour la 2ème question de P_0 et pour P_3

Procédures	P_0	P_3
1.1. Calcul de s, puis de x.	19	56
1.2. Calcul de t, puis de x.	9	8
1.3. Calcul de l'opérateur composé, puis de x.	1	0
2.1. Calcul de s.	2	3
2.2. Calcul de t.	32	9
2.3. Calcul de l'opérateur composé.	2	2
3. Autres	19	6
Total	84	84

Réussites	29	64
Echecs	55	20
Total	84	84

On peut faire les commentaires suivants :

1°/ L'une des procédures canoniques est massivement majoritaire, c'est celle qui conduit à multiplier en second lieu par le temps. Nous tenterons plus loin une interprétation de ce fait.

2°/ La procédure 1.3. qui consiste à choisir, parmi les trois possibilités de produits de trois nombres, celle qui ne correspond au calcul intermédiaire d'aucune grandeur "physique", est pratiquement inexistante.

3°/ Parmi les procédures partielles, c'est la procédure qui consiste à multiplier par le temps la valeur unitaire (production de lait par vache et par jour, consommation de charbon par radiateur et par jour) qui est la plus fréquente. Ce dernier point pourrait apparaître contradictoire avec le premier point relevé ci-dessus, puisque la procédure canonique majoritaire est celle qui commence par la multiplication de la valeur unitaire par l'autre grandeur, et non par le temps.

Vb - Tableau croisé des procédures utilisées pour la 2ème question de P_0 et pour P_3

P_0 \ P_3	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3	Total
1.1	16	2			1			19
1.2	8						1	9
1.3	1							1
2.1	1			1				2
2.2	19	4	1	1	3		4	32
2.3	1				1			2
3.	10	1		1	4	2	1	19
Total	56	7	1	3	9	2	6	84

L'examen du tableau Vb montre qu'il n'en est rien. En effet, sur la ligne 2.2 du tableau, on voit que la majorité des élèves qui, dans P_0, utilisent la procédure partielle de multiplication par le temps seul, utilisent en fait dans P_3 la procédure 1.1 de multiplication par le temps en second lieu seulement. C'est donc que le privilège accordé au temps, dont témoigne la disproportion entre les différentes procédures partielles, se traduit dans les procédures canoniques par le fait que les sujets préfèrent placer en dernier lieu la multiplication par le temps. La notion de procédure est une notion "finaliste" : ce qui est le mieux pris en compte est placé à la fin, l'ordre des priorités étant alors inversé. Cette interprétation, qui pourrait être considérée comme une interprétation ad hoc, rejoint en fait de nombreuses remarques faites dans d'autres situations de résolution de problème.

Par ailleurs, le tableau Vb fait apparaître une assez bonne stabilité de la procédure canonique majoritaire.

Bien entendu on observe, comme pour les problèmes précédents, la dégradation des performances des enfants lorsqu'ils sont confrontés à P_0 (même structure intégrée dans un problème complexe).

Conclusion

L'analyse qui précède n'est évidemment pas exhaustive, tant s'en faut. Pourtant, l'analyse relationnelle des tâches proposées aux élèves et l'analyse des procédures qu'ils utilisent permettent de dépasser le simple constat en termes de réussites et d'échecs.

Certes, les élèves de sixième sont encore loin de maîtriser tous les structures multiplicatives élémentaires, et c'est là un constat fort important. Mais au-delà de cette appréciation, les résultats montrent que :

1 - sauf en ce qui concerne le calcul du volume, les enfants de sixième réussissent en majorité à traiter les relations en jeu lorsqu'elles sont présentées isolément.

2 - certaines procédures canoniques apparaissent nettement plus "naturelles" que d'autres pour les enfants.

3 - lorsqu'ils échouent, les enfants font des tentatives qui sont loin d'être dénuées de sens par rapport à ces relations. Cette rationalité, si fragile soit-elle, ne saurait être ignorée des maîtres.

C'est donc une conclusion prudente que cette expérience permet de formuler. D'une part, les difficultés des élèves appellent bien évidemment une réponse pédagogique qui, on peut le supposer, ne s'arrêterait pas au seuil de la sixième mais devrait sans doute se prolonger pendant une bonne partie du premier cycle. D'autre part, les connaissances des élèves ne sont pas négligeables et constituent une base qui devrait permettre aux maîtres d'analyser en profondeur les structures d'isomorphisme de mesures, de produit de mesures et de double proportionnalité.

La résolution de problèmes de la vie économique et technologique courante peut constituer un moyen et un critère d'acquisition de certaines notions, elle ne peut évidemment pas à elle seule constituer un enseignement de mathématiques valable.

En effet, l'utilisation de représentations codifiés (tableaux, graphiques, équations algébriques) et l'explicitation des propriétés mathématiques des relations en jeu sont de nature à favoriser la compréhension des problèmes sur lesquels les enfants achoppent. Mais développer ce point sortirait du cadre de cet article.