2

ETUDES

Sur les pseudo-hypercubes

par René MANZONI, Lycée Jules Siegfried, Le Havre.

I - Le Problème

Etant donné le naturel m, au moins égal à 2, on peut tout d'abord se demander s'il existe, dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$, un *hyper-cube*(*) (un carré pour $m = 2$; un cube pour $m = 3$) tel que les arêtes (ou les côtés) et que les diagonales soient, respectivement, mesurées par les naturels a et d.
Si m n'est pas le carré d'un naturel, la réponse est négative.
Si m est le carré du naturel k, on a évidemment $d = ka$.

Après avoir choisi le naturel p tel que $1 \leqslant p \leqslant m-1$, on s'intéresse maintenant, dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$, à un *pseudo-hyper-cube* de genre p, satisfaisant par définition aux conditions suivantes :

1) $m - p$ arêtes sont mesurées par le naturel a, et p arêtes mesurées par $a + 1$;

2) chaque diagonale est mesurée par le naturel d.

Rechercher des objets de cette nature (*pseudo-carrés* pour $m = 2$; *pseudo-cubes* pour $m = 3$) revient à résoudre dans $\mathbf{N}^2$ l'équation

$$(E_{m,p}) : \quad (m-p)a^2 + p(a+1)^2 = d^2$$

ou $$ma^2 + 2pa + p = d^2$$

ou encore $$(ma+p)^2 - md^2 = -p(m-p).$$

(*) Voir l'article de F. Gagnaire, Bulletin 311, page 788.

En oubliant l'origine géométrique du problème, on peut commencer par la résolution dans $\mathbb{Z}^2$. Or, si (a,d) est une solution, alors $(a,-d)$ en est une autre. Il suffit donc de penser à la résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ $(a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N})$.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on est ainsi amené à considérer l'hyperbole $H_{m,p}$ d'équation $mx^2 - y^2 + 2px + p = 0$. Les solutions de l'équation $(E_{m,p})$ sont les points de l'intersection $H_{m,p} \cap \mathbb{N}^2$, ou $H_{m,p} \cap \mathbb{Z}^2$, ou $H_{m,p} \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, selon le point de vue adopté.

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, les hyperboles $H_{m,p}$ et $H_{m,m-p}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$. Sous réserve d'existence, à toute solution (a,d) de $(E_{m,p})$ correspond la solution $(-a-1, d)$ de $(E_{m,m-p})$. On peut donc se contenter de prendre $p \leqslant \dfrac{m}{2}$.

S'il existe un naturel $\delta > 1$ tel que δ^2 soit un diviseur commun de m et p, alors on a

$$m = \delta^2 m' \qquad\qquad p = \delta^2 p'$$

$$(m' - p')\,a^2 + p'(a+1)^2 = \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 ,$$

ce qui ramène à l'équation $(E_{m',p'})$. Désormais, on suppose que cet abaissement relatif à m est exclu.

En outre, c'est la résolution dans $\mathbb{N}^2$ qui est finalement retenue.

On sait que le carré d'un naturel est congru à 0 ou à 1, modulo 4.

Si $a^2 \equiv 0$ (mod. 4), alors $(a+1)^2 \equiv 1$, d'où

$$(m-p)a^2 + p(a+1)^2 \equiv p \qquad p \equiv 0 \text{ ou } 1 .$$

Si $a^2 \equiv 1$ (mod. 4), alors $(a+1)^2 \equiv 0$, d'où

$$(m-p)a^2 + p(a+1)^2 \equiv m-p \qquad m-p \equiv 0 \text{ ou } 1 .$$

Par conséquent, il y a des valeurs de p qui ne conviennent pas. Autrement dit, l'ensemble des solutions de $(E_{m,p})$ peut être vide.

Si m est le carré du naturel k, on a

$$(ma+p)^2 - (kd)^2 = -p\,(m-p) .$$

Alors l'ensemble des solutions (a,d) est nécessairement fini, et parfois vide.

Dorénavant, on suppose que m n'est pas le carré d'un naturel. Lorsque p est le carré d'un naturel, une solution particulière est évidente, à savoir $a_0 = 0$, $d_0 = \sqrt{p}$. Plus généralement, chaque fois que l'ensemble des solutions n'est pas vide, on note (a_0, d_0) la solution telle que le naturel a_0 soit le plus petit possible.

II - Constatations expérimentales

Pour certaines petites valeurs de m et p, un calculateur programmable donne rapidement des résultats. Il suggère que l'ensemble des solutions est alors infini (dénombrable). Cet ensemble se présente donc sous la forme (a_0, d_0), (a_1, d_1), (a_2, d_2), ..., (a_n, d_n), ..., où les suites (a_n) et (d_n) sont strictement croissantes.

En désignant par ℓ un naturel non nul fixé, choisi le plus petit possible et parfois égal à 1, il apparaît la récurrence

$$a_{n+\ell} = \alpha\, a_n + \beta\, d_n + \lambda$$
$$d_{n+\ell} = \gamma\, a_n + \delta\, d_n + \mu$$

ou, matriciellement,

$$\begin{pmatrix} a_{n+\ell} \\ d_{n+\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$.

On peut donc espérer obtenir toutes les solutions à partir des solutions initiales $(a_0, d_0), (a_1, d_1), \ldots, (a_{\ell-1}, d_{\ell-1})$, lorsque, bien entendu, ces dernières existent et sont connues.

Les exemples suivants fixent les idées :

m=2 p=1

a	0	3	20	119	696	4059
d	1	5	29	169	985	5741
$\ell=1$	$a_0=0$ $d_0=1$	$a_{n+1} = 3a_n+2d_n+1$ $d_{n+1} = 4a_n+3d_n+2$				

$m=3 \quad p=1$

a	0	6	88	1230	17 136	238 678
d	1	11	153	2131	29 681	413 403

$\ell=1$ $\quad a_0=0 \quad a_{n+1}=7a_n+4d_n+2$

$\quad d_0=1 \quad d_{n+1}=12a_n+7d_n+4$

$m=5 \quad p=1$

a	0	2	15	104	714	4 895
d	1	5	34	233	1 597	10 946

$\ell=3$ $\quad a_0=0 \;\; a_1=2 \;\; a_2=15 \quad a_{n+3}=161a_n+72d_n+32$

$\quad d_0=1 \;\; d_1=5 \;\; d_2=34 \quad d_{n+3}=360a_n+161d_n+72$

$m=6 \quad p=1$

a	0	1	28	117	2 760	11 481
d	1	3	69	287	6 761	28 123

$\ell=2$ $\quad a_0=0 \;\; a_1=1 \quad a_{n+2}=49a_n+20d_n+8$

$\quad d_0=1 \;\; d_1=3 \quad d_{n+2}=120a_n+49d_n+20$

$m=6 \quad p=2$

a	7	719	70 487	6 907 039		
d	18	1 762	172 658	16 918 722		

$\ell=1$ $\quad a_0=7 \quad a_{n+1}=49a_n+20d_n+16$

$\quad d_0=18 \quad d_{n+1}=120a_n+49d_n+40$

m=7 p=1

a	0	4	66	1 054	16 800	267 748
d	1	11	175	2 789	44 449	708 395

$\ell=1$ $\quad a_0=0 \quad a_{n+1}=8a_n+3d_n+1$

$\quad d_0=1 \quad d_{n+1}=21a_n+8d_n+3$

m=7 p=3

a	1	23	373	5 951	94 849	
d	4	62	988	15 746	250 948	

$\ell=1$ $\quad a_0=1 \quad a_{n+1}=8a_n+3d_n+3$

$\quad d_0=4 \quad d_{n+1}=21a_n+8d_n+9$

m=8 p=1

a	0	8	276	9 380	318 648	
d	1	23	781	26 531	901 273	

$\ell=1$ $\quad a_0=0 \quad a_{n+1}=17a_n+6d_n+2$

$\quad d_0=1 \quad d_{n+1}=48a_n+17d_n+6$

m=10 p=1

a	0	4	35	300	5 920	50 615
d	1	13	111	949	18 721	160 059

$\ell=3$ $\quad a_0=0 \quad a_1=4 \quad a_2=35 \quad a_{n+3}=721a_n+228d_n+72$

$\quad d_0=1 \quad d_1=13 \quad d_2=111 \quad d_{n+3}=2280a_n+721d_n+228$

$m=10\ p=2$

a	1	1 777	2 562 721			
d	4	5 620	8 104 036			

$\ell=1$ $\quad a_0=1 \quad a_{n+1}=721a_n+228d_n+144$

$\quad d_0=4 \quad d_{n+1}=2280a_n+721d_n+456$

$m=10\ p=4$

a	0	4	744	6 364		
d	2	14	2 354	20 126		

$\ell=2$ $\quad a_0=0 \quad a_1=4 \quad a_{n+2}=721a_n+228d_n+288$

$\quad d_0=2 \quad d_1=14 \quad d_{n+2}=2280a_n+721d_n+912$

$m=10\ p=5$

a	1	58	2 221			
d	5	185	7 025			

$\ell=2$ $\quad a_0=1 \quad a_1=58 \quad a_{n+2}=721a_n+228d_n+360$

$\quad d_0=5 \quad d_1=185 \quad d_{n+2}=2280a_n+721d_n+1140$

III - A la recherche d'une explication

Pour que la récurrence constatée ci-dessus puisse avoir lieu, il faut que l'hyperbole $H_{m,p}$ soit invariante par l'application affine $\varphi : (x,y) \longmapsto (x',y')$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$x' = \alpha x + \beta y + \lambda \qquad y' = \gamma x + \delta y + \mu .$$

En exprimant cette invariance, on obtient

$$\alpha^2 - m\beta^2 = 1,$$

$$\gamma = \epsilon m \beta \ (\epsilon = \pm 1)\ ,\ \delta = \epsilon\alpha\ ,\ \lambda = \frac{p(\alpha-1)}{m},\ \mu = \epsilon p \beta .$$

Le carré de la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \epsilon m\beta & \epsilon\alpha \end{pmatrix}$ est

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \epsilon m\beta^2 & (1+\epsilon)\alpha\beta \\ (1+\epsilon)m\alpha\beta & \alpha^2 + \epsilon m\beta^2 \end{pmatrix} ,$$

ce qui conduit à choisir $\epsilon = +1$. En effet, pour $\epsilon = -1$, on aurait

$$A^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Finalement, sous réserve d'existence des solutions initiales, la récurrence sera réalisée s'il y a bien deux naturels α et β tels que $\alpha^2 - m\beta^2 = 1$, et si le naturel $p(\alpha - 1)$ est divisible par m . Comme on le verra un peu plus loin, l'équation de Pell-Fermat $\xi^2 - m\eta^2 = 1$ va donc jouer un rôle décisif.

IV - Une digression de nature géométrique

Dans ce paragraphe on suppose que α et β sont des réels, et l'on considère l'application affine $\varphi : (x,y) \longmapsto (x',y')$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ m\beta & \alpha \end{pmatrix} , \quad \alpha^2 - m\beta^2 = 1 ,$$

$$\lambda = \frac{p(\alpha - 1)}{m} , \quad \mu = p\beta .$$

Cette application affine φ laisse invariante l'hyperbole $H_{m,p}$ car

$$mx'^2 - y'^2 + 2px' + p = mx^2 - y^2 + 2px + p .$$

En outre, elle laisse fixe le centre de $H_{m,p}$, c'est-à-dire le point $(\omega, 0)$, où $\omega = -\frac{p}{m}$. On peut donc écrire

$$\begin{pmatrix} x' - \omega \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x - \omega \\ y \end{pmatrix} .$$

Lorsque les points (x , y) et (x', y') appartiennent à $H_{m,p}$, on observe que

$$m (x' - x)^2 - (y' - y)^2 = 2 \lambda (m - p)$$
$$m xx' - yy' + p (x + x') + p = - \lambda (m - p).$$

Si l'on a

$$\begin{pmatrix} x' - \omega \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x - \omega \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'' - \omega \\ y'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' - \omega \\ y' \end{pmatrix} ,$$

il en résulte que

$$x'' - \omega = 2\alpha(x' - \omega) - (x - \omega), \text{ ou } x'' = 2\alpha x' - x + 2\lambda,$$
$$y'' = 2\alpha y' - y .$$

Pour les solutions de l'équation ($E_{m,p}$), cela devrait se traduire par

$$a_{n+2\ell} = 2\alpha\, a_{n+\ell} - a_n + 2\lambda$$
$$d_{n+2\ell} = 2\alpha\, d_{n+\ell} - d_n .$$

En désignant par t la pente de la droite qui joint les points $(x, -y)$ et (x', y'), il vient

$$t = \frac{y' + y}{x' - x} = \frac{m\beta}{\alpha - 1} = \frac{\alpha + 1}{\beta} = \frac{\mu}{\lambda} ,$$

d'où

$$\alpha = \frac{t^2 + m}{t^2 - m} \quad \beta = \frac{2t}{t^2 - m} \quad \lambda = \frac{2p}{t^2 - m} \quad \mu = \frac{2pt}{t^2 - m} .$$

Compte tenu du fait que

$$mx'^2 - y'^2 + 2px' + p = mx^2 - y^2 + 2px + p$$

entraîne

$$\frac{y' + y}{x' - x} = \frac{m(x' + x) + 2p}{y' - y} ,$$

on voit que $\dfrac{m}{t}$ est la pente de la droite qui joint les points $(2\omega - x, y)$ et (x', y').

Ainsi, le réel t (avec $t^2 \neq m$) définit l'application affine φ. Un autre réel t' conduit à l'application affine φ', de même nature, c'est-à-dire caractérisée par la propriété de laisser $H_{m,p}$ invariante. Toutes ces applications constituent un groupe abélien Φ pour la loi $\circ$.

Si $t + t' \neq 0$, le réel qui définit $\varphi \circ \varphi'$ est $\dfrac{m + tt'}{t + t'}$.

L'identité id est obtenue en prenant $t = \infty$. Enfin, $-t$ donne φ^{-1}. Cela incite à poser

$$t * t' = \frac{m + tt'}{t + t'} \qquad \text{pour} \quad t + t' \neq 0 ,$$

$$\infty * t = t * \infty = t$$

$$t * (-t) = (-t) * t = \infty \qquad \text{et} \qquad -\infty = \infty .$$

La loi $*$ confère à l'ensemble $T = (\mathbf{R} - \{-\sqrt{m}, +\sqrt{m}\}) \cup \{\infty\}$ une structure de groupe abélien isomorphe à Φ .

On remarque que $\frac{\alpha}{\beta} = t * t = \frac{m}{t} * \frac{m}{t}$.

A un point donné $V = (x, y)$ du plan $\mathbf{R}^2$ correspondent les points $U = (2\omega - x, y)$ et $W = (x, -y)$. Alors le nombre réel t (avec $t^2 \neq m$) détermine bien le point $V' = (x', y')$, puisque les droites UV' et WV' ont pour pentes respectives $\frac{m}{t}$ et t .

Si l'on préfère utiliser $m\frac{x' + x}{2} + p = t\frac{y' - y}{2}$, on peut encore construire comme ci-dessous le point $V' = (x', y')$ à partir du point donné $V = (x, y)$, lorsque t est connu.

1) La droite passant par le point $W = (x, -y)$ et de vecteur directeur $(1, t)$ rencontre la droite d'équation $Y = 0$ au point $P = (x + \frac{1}{t}y, 0)$.

2) La droite passant par le point P et de vecteur directeur $(1, t^2)$ rencontre la droite d'équation $Y = mX + p$ au point Q d'abscisse $\dfrac{t^2 x + ty + p}{t^2 - m}$.

3) La droite d'équation $X = \dfrac{t^2 x + ty + p}{t^2 - m}$ rencontre la droite WP au point S.

4) On en déduit le point cherché

$$V' = 2S - W .$$

V - L'équation de Pell-Fermat

On rappelle que, par hypothèse, le naturel m n'est pas le carré d'un autre naturel.

La loi $*$, introduite précédemment, correspond à la multiplication dans l'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{m}]$. Avec ξ , η , ξ', $\eta' \in \mathbf{Z}$, on a en effet

$$(\xi + \eta\sqrt{m})(\xi' + \eta'\sqrt{m}) = \xi\xi' + m\eta\eta' + (\xi\eta' + \eta\xi')\sqrt{m}$$

$$\frac{\xi}{\eta} * \frac{\xi'}{\eta'} = \frac{m + \frac{\xi\xi'}{\eta\eta'}}{\frac{\xi}{\eta} + \frac{\xi'}{\eta'}} = \frac{\xi\xi' + m\ \eta\eta'}{\xi\eta' + \eta\xi'} .$$

Ici, on suppose connue la théorie de l'équation de Pell-Fermat $\xi^2 - m\ \eta^2 = 1$. On sait donc que cette équation admet dans N^2 une infinité de solutions

$$(\xi_0, \eta_0) = (1,0)\ ,\ (\xi_1, \eta_1)\ ,\ (\xi_2, \eta_2)\ ,\ \dots,\ (\xi_i, \eta_i)\ ,\ \dots$$

Pour tout $i \in N^*$, les naturels ξ_i et η_i sont premiers entre eux. Lorsque la solution fondamentale (ξ_1, η_1) est obtenue, toute autre solution (ξ_i, η_i) est donnée par

$$\xi_i + \eta_i \sqrt{m} = (\xi_1 + \eta_1 \sqrt{m})^i$$

ou par

$$\frac{\xi_i}{\eta_i} = \frac{\xi_1}{\eta_1} * \frac{\xi_1}{\eta_1} * \dots * \frac{\xi_1}{\eta_1} \quad \text{(i fois)} .$$

Par ailleurs, c'est le développement en fraction continue de $\sqrt{m}$ qui permet de trouver la solution fondamentale (ξ_1, η_1). Un tel développement est périodique mixte et de la forme

$$\sqrt{m} = (q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}, q_N}, \overline{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}, q_N}, \dots\dots)$$

avec $q_N = 2q_0$ et $q_{N-j} = q_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant N-1$.

Alors on montre que $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ est la réduite de rang $N-1$ (resp. de rang $2N-1$) si le naturel N est pair (resp. impair).

VI - Choix des naturels α et β

On souhaite que le naturel ℓ figurant dans la récurrence soit petit, sinon le plus petit possible.

Si m est un diviseur de $\xi_1 - 1$, on explique les résultats expérimentaux en prenant $\alpha = \xi_1$ et $\beta = \eta_1$.

Si m n'est pas un diviseur de $\xi_1 - 1$, alors c'est un diviseur de $\xi_2 - 1$ car

$$\xi_2 + \eta_2 \sqrt{m} = (\xi_1 + \eta_1 \sqrt{m})^2 = \xi_1^2 + m\eta_1^2 + 2\xi_1\eta_1 \sqrt{m}$$

d'où

$$\xi_2 - 1 = \xi_1^2 - 1 + m\,\eta_1^2 = 2m\,\eta_1^2 .$$

Les résultats expérimentaux sont encore expliqués, mais en prenant $\alpha = \xi_2$ et $\beta = \eta_2$.

En désignant par k un naturel donné, voici quelques exemples :

1°) $m = k^2 + 1 \quad k \geqslant 1 \quad m \in \{2,5,10,17,26,37,50,....\}$

$$\sqrt{m} = (k\ ,\ \overline{2k}\ ,\ \overline{2k}\ ,\ ....)$$

$$\xi_1 = 2k^2 + 1 \qquad \eta_1 = 2k \qquad \frac{\xi_1}{\eta_1} = k * k$$

Pour $k = 1$, on a :

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 * 1 = 2 * 2 = \frac{3}{2}, \text{ d'où } \alpha = 3 \quad \beta = 2 .$$

Pour $k > 1$, on a :

$$\frac{\alpha}{\beta} = k * k * k * k = \frac{8k^2(k^2+1)+1}{4k(2k^2+1)}$$

2°) $m = k^2 + 2 \quad k \geqslant 1 \quad m \in \{3,6,11,18,27,38,51,....\}$

$$\sqrt{m} = (k\ ,\ \overline{k\ ,\ 2k}\ ,\ \overline{k\ ,\ 2k}\ ,\ ....)$$

$$\xi_1 = k^2 + 1 \qquad \eta_1 = k \qquad \frac{\xi_1}{\eta_1} = k * k$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = k * k * k * k = \frac{2k^2(k^2+2)+1}{2k(k^2+1)}$$

3°) $m = k^2 - 1 \quad k \geqslant 2 \quad m \in \{3,8,15,24,35,48,63, ...\}$

$$\sqrt{m} = (k-1\ ,\ \overline{1\ ,\ 2(k-1)}\ ,\ \overline{1\ ,\ 2(k-1)}\ ,\ ....)$$

$$\xi_1 = k \qquad \eta_1 = 1 \qquad \frac{\xi_1}{\eta_1} = k = (k-1) * (k-1)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = k * k = \frac{2k^2 - 1}{2k}$$

4°) $m = k^2 - 2 \quad k \geqslant 3 \quad m \in \{7,14,23,34,47,62,79, ...\}$

$$\sqrt{m} = (k-1,\ \overline{1, k-2, 1, 2(k-1)},\ \overline{1, k-2, 1, 2(k-1)},\ ....)$$

$$\xi_1 = k^2 - 1 \qquad \eta_1 = k \qquad \frac{\xi_1}{\eta_1} = k * k$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = k * k = \frac{k^2 - 1}{k}$$

5°) $m = k(k+1) \quad k \geqslant 2 \quad m \in \{6,12,20,30,42,56, \ldots\}$

$\sqrt{m} = (k, \overline{2, 2k}, \overline{2, 2k}, \ldots)$

$\xi_1 = 2k + 1 \quad \eta_1 = 2 \quad \dfrac{\xi_1}{\eta_1} = k * k = (k+1)*(k+1)$

$$\frac{\alpha}{\beta} = k * k * k * k = \frac{8k(k+1) + 1}{4(2k + 1)}$$

6°) $m = (2k)^2 + 4 \quad k \geqslant 1 \quad m \in \{8,20,40,68,104, \ldots\}$

$\sqrt{m} = (2k, \overline{k, 4k}, \overline{k, 4k}, \ldots)$

$\xi_1 = 2k^2 + 1 \quad \eta_1 = k \quad \dfrac{\xi_1}{\eta_1} = (2k) * (2k)$

$$\frac{\alpha}{\beta} = (2k) * (2k) * (2k) * (2k) = \frac{8k^2(k^2+1) + 1}{2k(2k^2 + 1)}$$

7°) $m = (2k + 1)^2 + 4 \quad k \geqslant 1 \quad m \in \{13,29,53,85, \ldots\}$

$\sqrt{m} = (2k+1, \overline{k,1,1,k,2(2k+1)}, \overline{k,1,1,k,2(2k+1)}, \ldots)$

$\dfrac{\xi_1}{\eta_1} = (2k+1)*(2k+1)*(2k+1)*(2k+1)*(2k+1)*(2k+1)$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\xi_1}{\eta_1} * \frac{\xi_1}{\eta_1}$$

Pour $k = 1$, d'où $m = 13$, on a
$\alpha = 842401$ et $\beta = 233640$.

8°) $m = (2k)^2 - 4 \quad k \geqslant 3 \quad m \in \{32,60,96,140, \ldots\}$

$\sqrt{m} = (2k-1, \overline{1, k-2, 1, 2(2k-1)}, \overline{1, k-2, 1, 2(2k-1)}, \ldots)$

$\xi_1 = 2k^2 - 1 \quad \eta_1 = k \quad \dfrac{\xi_1}{\eta_1} = (2k) * (2k)$

$$\frac{\alpha}{\beta} = (2k) * (2k) * (2k) * (2k) = \frac{8k^2(k^2-1) + 1}{2k(2k^2 - 1)}$$

9°) $m = (2k + 1)^2 - 4 \quad k \geqslant 2 \quad m \in \{21,45,77,117, \ldots\}$

$\sqrt{m} = (2k, \overline{1,k-1,2,k-1,1,4k}, \overline{1,k-1,2,k-1,1,4k}, \ldots)$

$$\frac{\xi_1}{\eta_1} = (2k+1) * (2k+1) * (2k+1)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\xi_1}{\eta_1} * \frac{\xi_1}{\eta_1}$$

10°) $m = (3k)^2 + 3 \quad k \geqslant 1 \quad m \in \{12, 39, 84, 147, \ldots\}$

$$\sqrt{m} = (3k, \overline{2k, 6k}, \overline{2k, 6k}, \ldots)$$

$$\xi_1 = 6k^2 + 1 \quad \eta_1 = 2k \quad \frac{\xi_1}{\eta_1} = (3k) * (3k)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = (3k) * (3k) * (3k) * (3k) = \frac{24k^2\ (3k^2+1) + 1}{4k\,(6k^2 + 1)}$$

11°) $m = (3k)^2 - 3 \quad k \geqslant 2 \quad m \in \{33, 78, 141, 222, \ldots\}$

$$\sqrt{m} = (3k-1, \overline{1, 2(k-1), 1, 2(3k-1)}, \overline{1, 2(k-1), 1, 2(3k-1)}, \ldots)$$

$$\xi_1 = 6k^2 - 1 \quad \eta_1 = 2k \quad \frac{\xi_1}{\eta_1} = (3k) * (3k)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = (3k) * (3k) * (3k) * (3k) = \frac{24k^2\ (3k^2-1) + 1}{4k\,(6k^2 - 1)}$$

VII - Une question qui peut être posée

La loi $*$ permet-elle toujours d'exprimer $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ au moyen des naturels les plus proches de $\sqrt{m}$?

En écrivant θ_1 au lieu de $\frac{\xi_1}{\eta_1}$, voici des résultats constatés mais non prouvés :

$m = 19 \qquad \theta_1 = 4 * 4 * 5 * 5$
$m = 22 \qquad \theta_1 = 4 * 4 * 5 * 5$
$m = 28 \qquad \theta_1 = 6 * 6 * 6 * 6$
$m = 31 \qquad \theta_1 = 4 * 4 * 5 * 5 * 6 * 6$
$m = 41 \qquad \theta_1 = 6 * 6 * 7 * 7 * 9 * 9$
$m = 43 \qquad \theta_1 = 6 * 6 * 7 * 7 * 8 * 8$
$m = 44 \qquad \theta_1 = 6 * 6 * 6 * 6$
$m = 46 \qquad \theta_1 = 7 * 7 * 7 * 7 * 8 * 8$
$m = 52 \qquad \theta_1 = 7 * 7 * 8 * 8$
$m = 54 \qquad \theta_1 = 7 * 7 * 8 * 8$
$m = 55 \qquad \theta_1 = 7 * 7 * 8$

m = 57 $\theta_1 = 7 * 7 * 9 * 9 = 6 * 6 * 8 * 8$
m = 58 $\theta_1 = 7 * 7 * 8 * 8 * 8 * 8$
m = 59 $\theta_1 = 7 * 7 * 8 * 8$
m = 61 $\theta_1 = 7 * 7 * 7 * 7 * 7 * 7 * 8 * 8 * 8 * 8 * 8 * 8$
m = 67 $\theta_1 = 7 * 7 * 8 * 8 * 8 * 8$
m = 69 $\theta_1 = 9 * 9 * 9 * 9 * 9 * 9$
m = 70 $\theta_1 = 8 * 8 * 10 * 10$
m = 71 $\theta_1 = 9 * 9 * 9 * 9 * 11 * 11 = 6 * 6 * 8 * 8 * 9 * 9$
m = 73 $\theta_1 = 8 * 8 * 8 * 8 * 8 * 8 * 10 * 10 * 10 * 10$
m = 74 $\theta_1 = 7 * 7 * 8 * 8 * 8 * 8$
m = 76 $\theta_1 = 8 * 8 * 8 * 8 * 10 * 10 * 10 * 10$
m = 86 $\theta_1 = 9 * 9 * 10 * 10 * 11 * 11$
m = 87 $\theta_1 = 9 * 9$
m = 88 $\theta_1 = 8 * 8 * 10 * 10$
m = 89 $\theta_1 = 9 * 9 * 9 * 9 * 9 * 9 * 11 * 11$
m = 91 $\theta_1 = 8 * 8 * 10 * 10 * 10$
m = 92 $\theta_1 = 10 * 10 * 10 * 10$
m = 93 $\theta_1 = 9 * 9 * 9 * 9 * 9 * 9$
m = 94 $\theta_1 = 10 * 10 * 10 * 10 * 10 * 10 * 11 * 11$
m = 95 $\theta_1 = 10 * 10$
m = 97 $\theta_1 = 7*7*7*7*9*9*9*9*9*9*11*11*11*11$
m = 103 $\theta_1 = 10 * 10 * 10 * 10 * 11 * 11$
m = 105 $\theta_1 = 10 * 10$

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$t = \frac{d_{n+\ell} + d_n}{a_{n+\ell} - a_n} = \frac{d_\ell + d_0}{a_\ell - a_0} = \frac{d_1 + d_0}{a_1 - a_0} * \frac{d_2 + d_1}{a_2 - a_1} * \dots * \frac{d_\ell + d_{\ell-1}}{a_\ell - a_{\ell-1}}$$

VIII - Calcul de a_n et d_n

La matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ m\beta & \alpha \end{pmatrix}$ a déjà été présentée. On utilise maintenant la matrice $Z_n = \begin{pmatrix} a_n - \omega \\ d_n \end{pmatrix}$, avec $\omega = \frac{p}{m}$.

Pour tout naturel n, il existe un élément bien déterminé n_0 de $\{0, 1, 2, \dots, \ell-1\}$ tel que $n = n_0 + q\ell$, où $q \in \mathbb{N}$.

Il s'agit de calculer a_n et d_n en fonction de a_{n_0} et d_{n_0}.

La récurrence $Z_{n+\ell} = A \cdot Z_n$ entraîne $Z_n = A^q \cdot Z_{n_0}$. Afin d'alléger l'écriture, on se place désormais dans le cas simple où $\ell = 1$. Alors, on a $n_0 = 0$, $n = q$, et $Z_n = A^n \cdot Z_0$.

La matrice A définit un endomorphisme du plan vectoriel réel $\mathbf{R}^2$, par rapport à la base canonique. Ses valeurs propres sont $r_1 = \alpha + \beta\sqrt{m}$ et $r_2 = \alpha - \beta\sqrt{m}$. Les sous-espaces propres correspondants sont les directions des asymptotes de l'hyperbole $H_{m,p}$. Après avoir diagonalisé, on trouve

$$A^n = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} (r_1^n + r_2^n) \cdot \sqrt{m} & r_1^n - r_2^n \\ (r_1^n - r_2^n) \cdot m & (r_1^n + r_2^n) \cdot \sqrt{m} \end{pmatrix}$$

où l'on vérifie que $\det(A^n) = 1$.

Finalement, il vient

$$\begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 - \omega \\ d_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \omega = -\frac{p}{m}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ d_0 \end{pmatrix} + (A^n - I) \cdot \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{m}} \left(((a_0 - \omega)\sqrt{m} + d_0) r_1^n + ((a_0 - \omega)\sqrt{m} - d_0) r_2^n \right) + \omega$$

$$d_n = \frac{1}{2} \left(((a_0 - \omega)\sqrt{m} + d_0) r_1^n - ((a_0 - \omega)\sqrt{m} - d_0) r_2^n \right) .$$

BIBLIOGRAPHIE

Maurice GLAYMANN : *Une petite situation pour une grande pédagogie*, Bulletin A.P.M.E.P. n° 310, page 631.

Paul LABERENNE : *Un problème d'arithmétique*, Bulletin A.P.M.E.P. n° 311, page 779.

René MANZONI : *Une généralisation des triangles rectangles pseudo-isocèles : les pseudo-cubes*, Bulletin A.P.M.E.P. n° 311, page 781.

Pierre GAGNAIRE : *Sur les pseudo-cubes*, Bulletin A.P.M.E.P. n° 311, page 783.

Paul LABERENNE : *A propos de l'article de P. Gagnaire sur les pseudo-hypercubes*, Bulletins A.P.M.E.P. n° 313 page 372 et n° 315 page 635.