A propos des pseudo-cubes

par Paul LABERENNE

Etudions d'abord le cas envisagé par R. Manzoni dans son premier article (*). Il faut résoudre :

$$(m-1)x^2 + (x+1)^2 = y^2 \qquad (1)$$

m étant un entier non carré parfait ≥ 2, x et y deux entiers inconnus.

L'équation (1) peut s'écrire :

$$mx^2 + 2x + 1 = y^2 \quad \text{ou} \quad m^2x^2 + 2mx = my^2$$

ou encore :

$$(mx+1)^2 - my^2 = 1 - m \qquad (2)$$

---

* Voir Bulletin A.P.M.E.P. n° 311. Cf le n° 313 pour le cas où m est carré parfait.

Prenons $X = mx + 1$, on est ramené à l'équation de Pell-Fermat :

$$X^2 - my^2 = 1 - m \qquad (3)$$

qui admet toujours la solution $X_0 = 1, y_0 = 1$..

Si l'on connaît un autre couple X_n, y_n tel que

$$X_n^2 - my_n^2 = 1 - m$$

et si a et b sont les solutions fondamentales de $u^2 - mv^2 = 1$, que l'on peut toujours calculer en développant $\sqrt{m}$ en fraction continue, on a :

$$a^2 - mb^2 = 1 \qquad (4)$$

En multipliant membre à membre (3) et (4) il vient :

$$(X_n^2 - my_n^2)(a^2 - mb^2) = 1 - m$$

$$(X_n^2 a^2 + mb^2 y_n^2) - m(b^2 X_n^2 + a^2 y_n^2) = 1 - m$$

qui équivaut à :

$$(X_n a + mby_n)^2 - n(b X_n + ay_n)^2 = 1 - m \qquad (5)$$

les termes rectangles se détruisant.

On a donc le nouveau couple

$X_{n+1} = aX_n + mby_n$ avec $X_0 = 1$

$Y_{n+1} = bX_n + ay_n$ avec $y_0 = 1$

en revenant à x

$mx_{n+1} + 1 = (m x_n + 1) a + mby_n$

$y_{n+1} \qquad = b (mx_n + 1) + ay_n$

$$(6) \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ mb & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-1}{m} \\ b \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} a & b \\ bm & a \end{pmatrix} = 1 \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{array} \right.$$

Si $a - 1$ est divisible par m, ces formules conviennent, sinon il suffit d'itérer une seule fois, on trouve :

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + mb^2 & 2\,ab \\ 2mab & a^2 + mb^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b^2 \\ ab \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Il faut se borner ici aux indices pairs. On peut remarquer que, dans tous les cas, les valeurs de x et de y croissent avec l'indice. On obtient ainsi une infinité de solutions à partir du couple 0, 1.

Il est donc démontré que tout espace R^m où m n'est pas carré parfait admet de pseudo-hypercubes (correspondant à $p = 1$).

Mais on n'est pas sûr qu'il y ait pas d'autres solutions. En particulier si $1 - m$ est divisible par un carré parfait λ^2 :

$$1 - m = K\lambda^2 \qquad K < 0$$

Considérons l'équation $x^2 - my^2 = k$, si cette équation a une solution α, β, $\alpha^2 - m\beta^2 = k$; $\alpha\lambda$ et $\beta\lambda$ sont aussi des racines de (3) qui donneront une nouvelle série de solutions différentes de celles déduites de $X_0 = 1 \quad y_0 = 1$.

Exemple : $m = 19$

On a l'équation $18x^2 + (x+1)^2 = y^2$ ou $19x^2 + 2x + 1 = y^2$

$$(19x + 1)^2 - 19\,y^2 = -18$$

$u^2 - 19v^2 = 1$ a pour solutions fondamentales $a = 170$, $b = 39$ d'où un premier système de solutions, avec les notations précédentes (n pair) :

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57799 & 13260 \\ 251940 & 57799 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3042 \\ 13260 \end{pmatrix}$$

et $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

Mais $18 = 2 \times 9$; $u^2 - 19v^2 = -2$ a pour solutions $a' = 13$ $b' = 3$; $X^2 - 19y^2 = -18$ aura donc pour solution $X'_0 = 39$, $y'_0 = 9$ $(X = 19x+1)$, soit pour x, y : $x'_0 = 2$; $y'_0 = 9$ et le nouveau système de solutions (n pair) ;

$$\begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ y'_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57799 & 13260 \\ 251940 & 57799 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3042 \\ 13260 \end{pmatrix}$$

avec $x'_0 = 2$

$y'_0 = 9$

Considérons maintenant l'équation plus générale (p entier $< m$) :

$$(m - p)\,x^2 + p\,(x+1)^2 = y^2$$

Comme précédemment, on peut écrire

$$mx^2 + 2px + p = y^2 \qquad m^2x^2 + 2pmx + pm = y^2$$

$$(mx+p)^2 - my^2 \qquad p^2 - pm = p(p-m)$$

On pose encore : $X = mx+p$ et l'on a

$$X^2 - my^2 = p(p-m)$$

Une telle équation n'a pas toujours des solutions ; si on connait un couple X_0, y_0 la satisfaisant, on peut reprendre le raisonnement précédent en introduisant a et b solutions fondamentales de $u^2 - mv^2 = 1$ et l'on arrive aux formules de récurrence :

$$mx_{n+1} + p = (mx_n + p)a + mby_n$$

$$y_{n+1} = b(mx_n + p) + ay_n$$

$$\text{avec } x_0 = \frac{X_0 - p}{m} \quad \text{et} \quad y_0 \text{ donné}$$

On trouve finalement :

si $\dfrac{p(a-1)}{m}$ est entier

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ mb & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \dfrac{a-1}{m} \\ b \end{pmatrix}$$

si $\dfrac{p(a-1)}{m}$ n'est pas entier, après une seule itération (n pair) :

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + mb^2 & 2ab \\ 2mab & a^2 + mb^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + 2p \begin{pmatrix} b^2 \\ ab \end{pmatrix}$$

Compléments

I) *Exemple d'un cas sans solution ; m non carré parfait, $p \neq 1$*

Soit $m = 13$, $p = 5$

Avec les notations de l'article on arrive à

$$X^2 - my^2 = p^2 - mp \qquad X^2 - 13y^2 = 25 - 65 = -40 \qquad (1)$$

Pour démontrer que cette dernière équation ne peut avoir de solutions entières, étudions les derniers chiffres des 2 membres

X^2 est terminé par 0, 1, 4, 5 ou 9

$13y^2$ est terminé par 0, 2, 3, 5 ou 7

Etant donné le deuxième membre, il faut que X^2 et $13y^2$ soient terminés par le même chiffre.

Si ce chiffre est 0, X^2 et $13y^2$ sont nécessairement des multiples de 100, or le second membre est seulement divisible par 10.

Si X^2 et $13y^2$ sont divisibles par 5 ils sont nécessairement des multiples de 25, or le second membre est seulement un multiple de 5. Donc l'équation (1) n'est pas résoluble en nombre entier.

II) *Cas particulier où l'équation $X^2 - my^2 = p^2 - mp$ (m non carré parfait, $p \neq 1$) a une solution évidente.*

C'est le cas où p est un carré : $p = q^2$

Si l'on prend

$$X_0 = p \quad y_0 = q \quad X_0 - my_0 = p^2 - mq^2 = p^2 - mp$$

ex. $m = 6 \quad p = 4$ qui conduit à l'équation

$$X^2 - 6y^2 = 16 - 24 = -8$$

Elle est satisfaite par $X_0 = 4 \quad y_0 = 2$

Si l'on repasse à x ($X = 6x + 4$) on a $x_0 = 0 \quad y = 2$

Les solutions fondamentales de $u^2 - 6v^2 = 1$ sont $a = 5 \quad b = 2$

$\dfrac{a-1}{m} = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3}$; il faut prendre la 2ème forme de récurrence.

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + mb^2 & 2ab \\ 2mab & a^2 + mb^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + 2p \begin{pmatrix} b^2 \\ ab \end{pmatrix}$$

Ce qui donne (n devant être pair)

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 20 \\ 120 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 32 \\ 80 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{pmatrix}$$

III) *Exemple d'un cas où $\dfrac{a-1}{m}$ est entier :*

$m = 7 \quad p = 1$

On a $7x^2 + 2x + 1 = y^2$

en posant $X = 7x + 1 \qquad X^2 - 7y^2 = -6$

or $u^2 - 7v^2 = 1$ a pour solutions fondamentales $a = 8$ $b = 3$ le premier système de solutions (6) convient, et on trouve :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 21 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{matrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 21 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 4$
$y_1 = 11$ et l'on a bien $7 \times 16 + 8 + 1 = 121$