Sur un thème : LES MOYENNES

par Michel DECOINTET, Lycée KOEBERLE (Sélestat)

Ce qui est présenté ici n'est nullement le fruit d'un travail personnel mais celui d'un groupe de professeurs qui, dans le cadre d'un IREM, consacrait ses activités à la recherche d'exercices et de problèmes destinés aux élèves du second cycle. Ce travail s'est fait à la suite de la proposition d'un membre du groupe d'une "batterie" d'exercices utilisant différentes moyennes, et des "souvenirs" d'un autre relatifs à l'un des chapitres d'un livre classique d'Analyse.

Plusieurs remarques s'imposent à propos de ce travail qui a été proposé sous différentes formes à des élèves de différentes classes :

1) On peut proposer à des élèves de Seconde (toute section) des situations mettant en jeu différentes moyennes : chacune a de l'intérêt en soi surtout en raison de la *mathématisation* qu'il faut en faire pour répondre à la question posée. L'expérience montre que cette mathématisation est loin d'être évidente et que si on ne les y suscite pas, beaucoup d'élèves ne voient guère ce qui rapproche et ce qui différencie ces situations qu'ils traitent "séparément".

Ce qui est proposé ici (paragraphe I) va plus loin : c'est une étude plus systématique et plus globale de telles situations : long travail de réflexion, d'analyse, de comparaison destiné à en *abstraire* des structures mathématiques qui se révèleront efficaces pour comprendre les situations étudiées et en traiter d'autres relevant des mêmes structures.

Dans le cas présent, il y a deux structures : une structure linéaire, sous-jacente aux situations qui mettent en jeu une moyenne arithmétique ou une moyenne harmonique ; une structure exponentielle, sous-jacente à celles qui mettent en jeu une moyenne géométrique (schématisation de I B) : Ces deux structures sont, par ailleurs, suffisamment importantes en physique-chimie, démographie, économie, etc..., pour justifier l'intérêt qu'il y a à les mettre en évidence chaque fois qu'on le peut.

Ainsi, ce travail contribue à l'un des objectifs de l'enseignement mathématique en classe de seconde qui est de "montrer, dans des domaines limités, l'intérêt d'une abstraction. Des situations très diverses ont en commun une certaine structure mathématique dont la compréhension fournit un véritable outil de pensée". (Bulletin A.P.M. n° 300, "Noyaux-Thèmes", p. 471).

2) Le paragraphe II propose une série d'exercices de calcul algébrique qui étudient différentes propriétés des moyennes arithmétique, harmonique et géométrique : certains sont destinés aux élèves de Seconde, d'autres à ceux de Première, d'autres encore à ceux de Terminale, suivant les outils mathématiques mis en jeu par ailleurs.

3) L'étude générale des moyennes (arithmétique, géométrique, harmonique et autres) ainsi que leur comparaison se place dans le cadre de l'étude des fonctions convexes.

Rappelons quelques définitions de moyennes :

On appelle moyenne arithmétique, moyenne harmonique, moyenne quadratique et moyenne géométrique de n nombres réels strictement positifs x_1 , x_2 , ..., x_n les nombres :

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

m_h défini par l'égalité : $\dfrac{n}{m_h} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$

$$m_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

on a ainsi :

$$m_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . x_i$$

$$\frac{1}{m_h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . \frac{1}{x_i}$$

$$m_q^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . x_i^2$$

$$\text{Log } m_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \text{Log } x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \text{ Log } x_i$$

Si on considère alors les bijections :

$$a : x \longmapsto x \; ; h : x \longmapsto \frac{1}{x} \; ; q : x \longmapsto x^2 \text{ de } \mathbf{R}_+^* \text{ sur } \mathbf{R}_+^*$$

et $g : x \longmapsto \text{Log } x$ de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$,

et leurs bijections réciproques notées $\overline{a}^1$, $\overline{h}^1$, $\overline{q}^1$ et $\overline{g}^1$,

on a alors :

$$m_a = \overline{a}^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a(x_i) \right)$$

$$m_h = \overline{h}^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} h(x_i) \right)$$

$$m_q = \overline{q}^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} q(x_i) \right)$$

$$m_g = \overline{g}^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g(x_i) \right)$$

Plus généralement,

Définition :

Etant donnés un intervalle I de **R**, une fonction f continue et strictement monotone sur I, n nombres $x_1, \ldots, x_n$ de I et n nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ strictement positif, on appelle moyenne relative à f du système μ des $(x_i, \alpha_i)_{i \in [1,n]}$, le nombre :

$$m_f(\mu) = f^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)$$

autrement dit, l'antécédent dans l'application f du barycentre des images par f des x_i affectés des coefficients α_i.

Sans développer une étude des fonctions convexes (cours d'Analyse, tome II, de Choquet), on peut proposer exercices et problèmes qui conduisent à la fois à la comparaison de ces différentes moyennes et à la notion de convexité et qui restent des exercices d'analyse simples — à condition de ne pas les transformer en cours et à condition d'utiliser abondamment les graphiques —, en même temps que des exercices d'application de la notion de barycentre : c'est ce à quoi s'emploie le paragraphe III plus spécialement destiné aux élèves de Terminale.

4) Ce qui est présenté ici n'épuise sûrement pas le sujet... il reste à souhaiter que le Bulletin se fasse l'écho de tous ceux qui voudront bien y apporter des compléments.

I

A. 1/ Exercice 1.

Une voiture parcourt 120 km à la vitesse moyenne de 60 km/h, et 120 km à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur les 240 km parcourus ?

Exercice 1 bis.

Une voiture parcourt x km à la vitesse moyenne de v_1 km/h, et x km à la vitesse moyenne de v_2 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

Exercice 1 ter.

a) Une voiture parcourt x_1 km à la vitesse moyenne de v_1 km/h, et x_2 km à la vitesse moyenne de v_2 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

b) Une voiture parcourt

x_1 km à la vitesse moyenne de v_1 km/h,
x_2 km à la vitesse moyenne de v_2 km/h,
$\vdots$ $\vdots$
x_n km à la vitesse moyenne de v_n km/h.

Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

2/ Exercice 2

Une voiture roule durant une heure et demie à la vitesse moyenne de 60 km/h et durant une heure et demie à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

Exercices 2 bis et 2 ter

A calquer, à partir de l'exercice 2, sur les exercices 1 bis et 1 ter.

3/ Exercice 3.

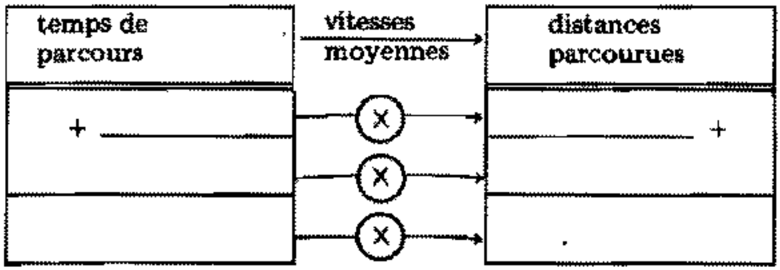
La production d'acier d'un pays a augmenté de 2,4 % en 1975 et de 8,9 % en 1976. Quel est le pourcentage d'augmentation annuelle moyenne sur l'ensemble de ces deux années ?

"Généraliser" à deux années quelconques puis à n années consécutives.

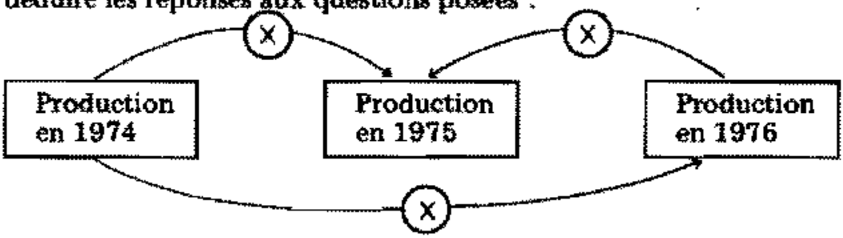
B. Schématisation des situations précédentes.

a) $$\boxed{\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours.}}}$$

Pour chacun des exercices 1, 1 bis, 1 ter a), 2, 2 bis, 2 ter a) remplir le tableau suivant et en déduire les réponses aux questions posées, en notant chaque fois l'ordre dans lequel sont remplies chaque case du tableau.



b) Pour l'exercice 3, compléter le schéma ci-dessous et en déduire les réponses aux questions posées :



C. Définitions.

1) On appelle moyenne arithmétique de deux nombres x et y le nombre :

$$a = \frac{x + y}{2}$$

2) On appelle moyenne harmonique de deux nombres x et y, non nuls, le nombre :

$$h = \frac{2xy}{x + y}$$

3) On appelle moyenne géométrique de deux nombres x et y, positifs, le nombre :

$$g = \sqrt{xy}.$$

Question 1 :

Traduire les résultats des exercices 1, 1 bis, 2, 2 bis et 3 en termes de moyennes arithmétique, harmonique ou géométrique.

Question 2 :

Généraliser les définitions précédentes à n nombres.

D. Exercices mettant en jeu les moyennes définies en C .

Pour chacun des exercices suivants, on utilisera une schématisation appropriée du type de celles du paragraphe B et on précisera de quelle moyenne il s'agit.

Exercice 1.

a) une personne achète des deutschmarks en deux fois :

une première fois y_1 deutschmarks, au taux de t_1 francs le deutschmark ;

une seconde fois y_2 deutschmarks, au taux de t_2 francs le deutschmark.

Quel est le cours moyen pour l'ensemble des deux opérations ?

b) une personne achète des deutschmarks en deux fois :

une première fois pour x_1 francs, au taux de t_1 francs le deutschmark ;

une seconde fois pour x_2 francs, au taux de t_2 francs le deutschmark.

Quel est le cours moyen pour l'ensemble des deux opérations ?

Exercice 2.

a) on fait fondre ensemble a_1 kg d'un premier métal de masse volumique x_1 kg/m^3 et a_2 kg d'un second métal de masse volumique x_2 kg/m^3.

Quelle est la masse volumique de l'alliage ainsi réalisé ?

b) même question en remplaçant "a_1 kg" par "b_1 m^3" et "a_2 kg" par "b_2 m^3".

Exercice 3.

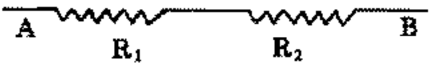
La population d'une ville était de 225 000 habitants en 1960 et de 256 000 habitants en 1970.

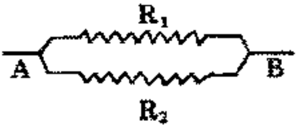
a) Dans l'hypothèse où l'accroissement annuel de population est resté constant entre 1960 et 1970, quelle était la population de cette ville en 1965 ?

b) Dans l'hypothèse où le pourcentage d'accroissement annuel de population est resté constant entre 1960 et 1970, quelle était la population en 1965 ?

Exercice 4.

a) On veut remplacer les résistances R_1 et R_2 par deux résistances R égales de sorte que l'intensité I du courant dans le circuit principal, entre A et B, ne change pas. Déterminer la valeur de R dans les deux cas :

1) 

2) 

b) Même question en remplaçant les résistances par des condensateurs C_1 et C_2.

II

Exercice 1.

On donne un couple (x, y) de nombre réels strictement positifs et on désigne par a, g, h leurs moyennes arithmétique, géométrique et harmonique.

1°/ A quelle condition sur x et y a-t-on $a = h$, $h = g$, $g = a$? On suppose dans la suite de l'exercice que : $x < y$.

2°/ Montrer que : $x < h < g < a < y$

3°/ Montrer que g est moyenne géométrique de h et de a.

4°/ Montrer que $a - g > g - h$.

Exercice 2.

Soient m un nombre réel strictement positif fixé, x et y deux réels tels que $x + y = m$. Les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique de ces deux nombres x et y sont alors des fonctions a, g, h de x, définies sur $[O ; m]$.

1) Etudier les fonctions a, g, h et tracer leurs courbes représentatives.

2) Déterminer la ou les valeurs de x pour la ou lesquelles la fonction $g - h$ passe par un minimum ; déterminer ce minimum.

Exercice 3.

Soient (x_k) et (y_k) deux suites finies de nombres strictement positifs. On appelle X et Y leurs moyennes arithmétiques respectives. Soit (g_k) la suite des moyennes géométriques de x_k et y_k.

A quelle condition la moyenne arithmétique des g_k est-elle égale à la moyenne géométrique de X et Y ?

Exercice 4.

Soit (x_k) une suite finie de nombres réels distincts $(k = 1, 2, ..., n)$ affectés de coefficients α_k strictement positifs.

Montrer qu'il existe un nombre a tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mid x_k - a \mid$ passe par un minimum.

Le nombre est-il unique ?

Exercice 5.

Soit le polynome

$$f(x) = (a + xa')^2 + (b + xb')^2 + \cdots + (k + xk')^2 .$$

a) Etudier son signe

b) Qu'en déduire pour son discriminant ?

c) Démontrer que :

$$\forall (a, a', \ldots, k, k'), (aa' + bb' + \ldots + kk')^2 - (a^2 + b^2 + \ldots + k^2)(a'^2 + b'^2 + \ldots + k'^2) \leqslant 0$$

d) Etudier le cas particulier où $a' = b' = \ldots = k' = 1$.

e) Montrer que le carré de la moyenne arithmétique de n nombres est au plus égale à la moyenne arithmétique de leurs carrés.

Exercice 6.

Le but est de montrer que la moyenne géométrique de n nombres est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique.

Première démonstration :

Montrer que si le produit de n nombres strictement positifs est égal à 1, leur somme est supérieure ou égale à n.

Indication : ceci se démontre par récurrence, en remarquant que si le produit de n nombres strictement positifs est égal à 1, alors ils sont tous égaux à 1 ou bien l'un au moins est strictement supérieur à 1 et un autre strictement inférieur à 1.

Deuxième démonstration :

1. Montrer que si la propriété est vraie pour $n = k$, alors elle est vraie pour $n = 2k$.

2. Montrer que si la propriété est vraie pour $n = p + 1$ alors elle est vraie pour $n = p$: on calculera pour cela

$$\sqrt[p+1]{x_1 \ldots x_p \sqrt[p]{x_1 \ldots x_p}}\,,$$

et on utilisera les règles de calculs sur les puissances rationnelles.

III

Exercice préliminaire.

On dispose de feuilles de papier millimétré. x_1 et x_2 désignent deux nombres strictement positifs.

a) On pose $m_q = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$. Tracer la courbe représentative Q de la fonction $q : x \longmapsto x^2$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ et se servir de Q pour déterminer graphiquement une valeur approchée de m_q (on prendra par exemple $x_1 = 1{,}8$ et $x_2 = 5{,}4$). Remarquer que la construction de m_q traduit sa définition :

$$m_q = q^{-1}\left[\frac{q(x_1) + q(x_2)}{2}\right]$$

b) On pose $m_a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $m_g = \sqrt{x_1 x_2}$ et on définit m_h par : $\dfrac{2}{m_h} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

Déterminer des applications a, g, h de $\mathbf{R}_+^*$ sur un ensemble de $\mathbf{R}$ que l'on déterminera pour chacune, telles que :

$m_a = \bar{a}^{1}\left[\dfrac{a(x_1) + a(x_2)}{2}\right]$, $m_g = \bar{g}^{1}\left[\dfrac{g(x_1) + g(x_2)}{2}\right]$,

$m_h = \bar{h}^{1}\left[\dfrac{h(x_1) + h(x_2)}{2}\right]$.

Tracer les courbes représentatives de a, g, h et s'en servir pour déterminer graphiquement des valeurs approchées de m_a, m_g, m_h (on prendra $x_1 = 1{,}8$ et $x_2 = 5{,}4$).

Commentaire :

A la suite de cet exercice, on peut définir les moyennes arithmétique, quadratique, harmonique, géométrique de n nombres $x_1, \dots, x_n$ (strictement positifs).

$$m_a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad m_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$$m_h = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{x_1} + \dots + \dfrac{1}{x_n}}{n}} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dots + \dfrac{1}{x_n}}$$

$$m_g = \exp \frac{\operatorname{Log} x_1 + \cdots + \operatorname{Log} x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

On remarquera que chaque moyenne est définie comme l'antécédent de l'équibarycentre des images des nombres x_i ($i \in [1,n]$) par chacune des applications a, q, h, g.

On pourra alors poser :

Problème.

On donne n nombres réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$. On se propose de comparer leurs moyennes arithmétique, quadratique, harmonique, et géométrique.

1. On prend d'abord $n = 2$.

a) Comparer m_a et m_q revient à comparer $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$ et $\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, c'est-à-dire, l'image par q de l'équibarycentre de x_1 et x_2 et l'équibarycentre des images par q de x_1 et x_2 : le faire par le calcul algébrique. Vérifier graphiquement en prenant $x_1 = 1{,}8$ et $x_2 = 5{,}4$. Marquer sur le graphique le point M de coordonnées $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2\right)$ puis le point P de coordonnées $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$.

Montrer que P appartient au segment joignant $M_1(x_1, x_1^2)$ et $M_2(x_2, x_2^2)$.

b) Comparer de même m_a et m_h, puis m_a et m_g.

2. a) Donner des exemples de fonctions pour lesquelles l'image de l'équibarycentre de n nombres est l'équibarycentre des images de ces n nombres.

b) Soit f une telle fonction. Montrer que :

$$\forall\ k \in [0,1],\ f(k x_1 + (1-k) x_2) = k\, f(x_1) + (1-k)\, f(x_2)$$

Faire un graphique en prenant $x_1 = 1{,}8$; $x_2 = 5{,}4$; $k = \frac{1}{3}$.

c) Pour $x_1 = 1{,}8$; $x_2 = 5{,}4$ et $k = \frac{1}{3}$, comparer :

$a\,[k x_1 + (1-k) x_2]$ et $k.a(x_1) + (1-k).a(x_2)$

$q\,[k x_1 + (1-k) x_2]$ et $k.q(x_1) + (1-k).q(x_2)$

$h\,[k x_1 + (1-k) x_2]$ et $k.h(x_1) + (1-k).h(x_2)$

$g\,[k x_1 + (1-k) x_2]$ et $k.g(x_1) + (1-k).g(x_2)$

Qu'en est-il pour des valeurs quelconques de x_1 et x_2 ?

3. **Définition** : Soit I, un intervalle de R. Une fonction f définie sur I est dite :

a) *convexe* si et seulement si :

$$\forall\ (x_1, x_2) \in I \times I,\ \forall\ k \in [0,1],\ f[k x_1 + (1-k) x_2] \leqslant k\, f(x_1) + (1-k)\, f(x_2).$$

b) *concave* si et seulement si :

$$\forall\ (x_1, x_2) \in I \times I,\ \forall\ k \in [0,1],\ f[k x_1 + (1-k) x_2] \geqslant k\, f(x_1) + (1-k)\, f(x_2).$$

Question :

D'après l'étude graphique de 2.c), q et h sont.... : le démontrer. Que peut-on dire de l'application a ? D'après l'étude graphique de 2.c), g est concave sur R_+^* : le démontrer.

* On peut ne rien dire : la démonstration de la concavité de la fonction g (Logarithme népérien) est un vrai sujet de recherche.

** On peut proposer la démarche suivante :

1) Montrer que démontrer la concavité de g sur $\mathbb{R}_+^*$ revient à démontrer que : pour tout nombre réel k compris entre 0 et 1 et tout nombre réel x de $\mathbb{R}_+^*$, $kx + 1 - k \geqslant x^k$.

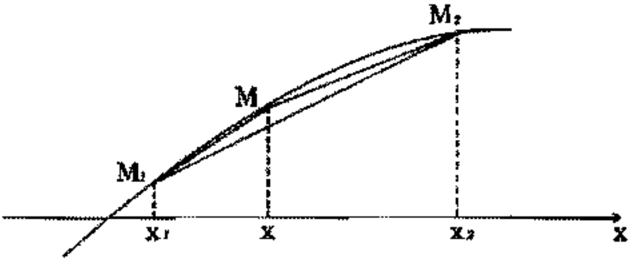
2) Soit k élément de $[0,1]$, $\varphi_k : x \longmapsto kx + 1 - k$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, et $\psi_k : x \longmapsto x^k$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Comparer suivant les valeurs de x, $\varphi'_k(x)$ et $\psi'_k(x)$.

Comparer $\int_1^x \varphi'_k(t).dt$ et $\int_1^x \psi'_k(t)\,dt$.

3) Conclure.

*** On peut proposer une autre démarche (exercice d'exposition), en remarquant que : dire que g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ équivaut à dire que si x, x_1, x_2 sont strictement positifs tels que $x_1 < x < x_2$, alors :

Coefficient directeur de $M_1M \geqslant$ coefficient directeur de $M_1M_2 \geqslant$ coefficient directeur de MM_2. (avec $M_1(x_1, g(x_1))$, $M(x, g(x))$, $M_2(x_2, g(x_2))$).



Pour cela :

Montrer que $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}x' - \text{Log}x}{x' - x}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est décroissante sur $]x, 0 < x < x'[$

Montrer que $x' \longmapsto \dfrac{\text{Log}x' - \text{Log}x}{x' - x}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est décroissante sur $]x', x' > x > 0[$

On sera amené à démontrer que :

$$\forall\ (x,x') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ x < x' \Rightarrow \frac{1}{x'} < \frac{\text{Log}x' - \text{Log}x}{x' - x} < \frac{1}{x}.$$

Cela résulte de ce que pour t tel que $x < t < x'$, on a $\frac{1}{x'} < \frac{1}{t} < \frac{1}{x}$. On obtient alors la double inégalité précédente par encadrement de la valeur moyenne de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $[x, x']$.

**** On peut proposer en préliminaire :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et telle que :

$$\forall\ x \in I,\ f''(x) > 0.$$

a) Soit x_0 un réel, appartenant à i ; soit $k \in [0\,;1]$ et g la fonction définie par :

$$g(x) = f(k\,x + (1-k)\,x_0) - k\,f(x) - (1-k)\,f(x_0).$$

montrer que g est définie sur I, puis que g est dérivable sur I et calculer $g'(x)$.

b) Montrer que si $x < x_0$ alors $g'(x) > 0$, que si $x > x_0$ alors $g'(x) < 0$; en déduire que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant 0\ .$$

c) Conclure que f est une fonction convexe sur I.

4. a) Montrer par récurrence que si f est convexe sur I, alors :

$$\forall\ (x_1, ..., x_n) \in I^n\ ,\ f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}$$

Quel résultat peut-on énoncer dans le cas où f est concave ?

b) Comparer alors les moyennes quadratique, harmonique, et géométrique de n nombres $x_1, .., x_n$ strictement positifs à leur moyenne arithmétique.

c) Comparer la moyenne harmonique et la moyenne géométrique de n nombres strictement positifs.

d) Comparer les différentes moyennes entre elles. Y-a-t-il entre elles une relation d'ordre total ?

5. Généralisation :

Soit à comparer deux moyennes

$$m_f = \overset{-1}{f}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}\right) \quad \text{et} \quad m_g = \overset{-1}{g}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)}{n}\right)$$

où f et g désignent deux fonctions continues et strictement monotones sur le même intervalle I et $x_1, ..., x_n$, n nombres de I.

Montrer que cette comparaison revient à étudier la convexité de $g o \overset{-1}{f}$ sur $f(I)$.

Commentaire :

1) $m_f = m_g \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, \ f = \alpha g + \beta$
ce qui traduit l'invariance de la moyenne par changement de graduation sur la droite affine $\mathbf{R}$.

2) $m_f \leqslant m_g \iff$ (g croissante et $g o \overset{-1}{f}$ convexe sur $f(I)$) ou
(g décroissante et $g o \overset{-1}{f}$ concave sur $f(I)$).

P.S. Quelques jours après avoir rédigé ce qui précède, je suis "tombé", à la bibliothèque de l'IREM, sur le numéro de la revue américaine "The Mathematics Teacher" daté de janvier 1977 qui consacre trois de ses articles à des activités (très différentes de celles proposées ici) sur des moyennes... Preuve que le sujet est riche de possibilités.