Un défaut de notre enseignement à propos de fonctions

par R. BARRA, J.-J. PENSEC (I.R.E.M. de Poitiers)

Voici un travail que nous avons fait sur les fonctions (*). Pourquoi sur les fonctions ? Parce que l'on peut mesurer à propos de l'enseignement de cette notion un grave défaut de notre enseignement qui est, comment dire ? une tendance exagérée au verbalisme ; une confiance au pouvoir des mots ; une certaine naïveté à croire qu'un concept est acquis dès qu'il est parfaitement énoncé, formalisé, sa définition bien imbriquée dans la liste des définitions récurrentes qui de proche en proche renvoient aux

(*) Enseignement de l'Analyse n° 1, Fonctions (2e édition). Réflexions sur l'enseignement de la notion de fonction. Leçons et exercices. Note historique.

termes les plus primitifs ; une croyance en l'efficacité du rabâchage. Comme si les progrès pouvaient s'accomplir à si bon marché. (Henri Lebesgue disait déjà en substance, quelque chose d'approchant).

En effet, il semble bien que les premières "bonnes" idées sur les fonctions ne sont pas acquises à la sortie de terminales, peut-être même au-delà, malgré tous les efforts fournis et les soins apportés dès la sixième à bien définir tous les mots, et à les répéter d'année en année. Témoin la petite "interrogation écrite" que nous avons fait subir à plusieurs centaines d'élèves, et que nous donnons plus loin.

Certes, la notion de fonction est fort subtile, elle ne s'est dégagée que très tard au prix de nombreuses remises en question. Mais il nous paraît possible d'en faire appréhender convenablement les prémisses, à condition d'insister beaucoup plus sur la définition opérationnelle, que sur la définition descriptive et conceptuelle ; de montrer comment on fabrique des fonctions : l'idée essentielle exhibée étant que l'on a construit une fonction de E vers F lorsqu'à chaque élément de E on a associé par un choix volontaire et arbitraire un élément de F ; de montrer comment cette construction est facile lorsque E a un petit cardinal, et de faire toucher du doigt la difficulté lorsque E est infini ; de montrer comment on peut surmonter cette difficulté etc...

Avec de tels exercices de fabrication, où l'élève prend conscience qu'il y a des fonctions de toutes sortes et que lui-même peut en fabriquer tant et plus, on peut obtenir en classe de seconde, (pas seulement de seconde C) des résultats assez satisfaisants, en ce sens que les élèves ne sont plus étonnés par le fait que le procédé d'association $(x, f(x))$ n'est pas nécessairement le même pour tous les x ; qu'ils savent que $f(x)$ n'est pas nécessairement donné par un assemblage algébrique, que le procédé d'association $(x, f(x))$ peut être décrit de plusieurs façons différentes pour la même fonction f, que la somme de deux fonctions se fait ponctuellement, etc...

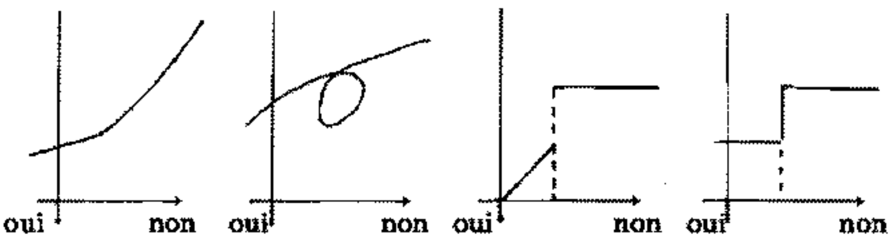
Par contre, ils ne sauront peut-être pas encore dire ce qu'est une fonction. Mais qu'est-ce qui est le plus important ?

INTERROGATION A
— POUR PREMIERES ET TERMINALES —

Nous indiquons le temps prévu pour chaque question.

Prévenir les élèves de la naïveté des questions, leur signaler qu'il n'y a aucun piège et qu'elles sont immédiates.

2' 1°) Les graphiques suivants sont-ils des représentations graphiques de fonctions ?



4' 2°) Trouver une fonction f dont le domaine de définition est R et telle que

$$f(0) = 0{,}762 \quad ; \quad f(1) = \sqrt{5} \quad ; \quad f(2) = -2$$

2' 3°) Soit f la fonction de R dans R définie par : $f(x) = 1$ pour tout x élément de R ; u et v étant deux éléments de R, quelle est l'image de $u + v$?

4' 4°) "Soit x un élément de R ; si x est à égale distance de deux entiers, on associe à x le plus grand de ces deux entiers, sinon on associe à x l'entier le plus proche". A-t-on défini ainsi une fonction de R dans R ?

4' 5°) Trouver une fonction f dont le domaine de définition est R et telle que l'image de tout entier positif impair soit supérieur à 7.

4' 6°) Trouver une fonction f dont le domaine de définition est R et dont l'ensemble image soit l'ensemble N.

5' 7°) Trouver une fonction f définie sur R telle que

a) $f(0) = 2$

b) la fonction de R dans R $x \to f(x) - f(1)$ soit constante.

6' 8°) Trouver trois fonctions *distinctes* f_1, f_2 et f_3 définie sur $\mathbb{R}$ telles que quel que soit le réel x

$$|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2$$

Tableau statistique sur l'interrogation A

441 élèves ont "subi" le test. Ce sont des élèves de Première ou Terminale (sections C ou D)
45 % des réponses viennent des classes de Terminale.
55 % des réponses viennent des classes de Première.
60 % des réponses viennent de la section C.

POURCENTAGE DE BONNES REPONSES

Questions	Sur l'ensemble	Sur les Terminales	Sur la section C
N° 1	72	68	72
N° 2	28	33	34
N° 3	85	88	88
N° 4	37	41	40
N° 5	90	92	91
N° 6	42	56	46
N° 7	59	63	64
N° 8	8	9	8

INTERROGATION B
— POUR SECONDE C ET PREMIERE C ou D —

2' 1°) "Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$f : x \to 2$ $\qquad$ $g : x \to \sqrt{4}$

sont égales".

Cette affirmation est-elle vraie ? fausse ?

2' 2°) "Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$f : x \to x^2$ $\qquad$ $g : u \to u^2$

sont égales".

Cette affirmation est-elle vraie ? fausse ?

3' 3°) "Les fonctions f et g de R dans R définies par

$f : x \to \sqrt{x^2}$

$g : x \to \text{Sup}\ (-x, x)$

[Sup $(-x, x)$ désigne le plus grand des deux nombres x et $-x$] sont égales".

Cette affirmation est-elle vraie ? fausse ?

3' 4°) "Les fonctions f et g de R dans R définies par

$f : x \to |x|$ $\qquad$ $g : x \to x^2$

sont telles que $f(R) = R^+$, $g(R) = R^+$ donc elles sont égales".

Cette affirmation est-elle vraie ? fausse ?

3' 5°) "Les fonctions f et g de R dans R

$f : x \to \sqrt{|x|}$ $\qquad$ $g : x \to x^2$

sont telles que :

$$f(0) = g(0) = 0$$
$$f(1) = g(1) = 1$$
$$f(-1) = g(-1) = 1$$

donc elles sont égales".

Cette affirmation est-elle vraie ? fausse ?

4' 6°) Trouver deux fonctions f et g *distinctes* de domaine de définition R telles que pour tout x de $[-1, +1]$ on ait $f(x) = g(x)$.

4' 7°) Soit f la fonction définie sur R par :

$$f(x) = x + 1 \qquad \text{pour } x \geqslant 2$$
$$f(x) = x^3 + 3 \qquad \text{pour } x < 2$$

Soit g la fonction définie sur R par :

$$g(x) = x^3 - x \qquad \text{pour } x > 2$$
$$g(x) = 5x \qquad \text{pour } x \leqslant 2$$

Quelle est la fonction $f + g$?

5' 8°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ de R par

$$f(x) = 0 \qquad \text{si } x \in [0, \tfrac{1}{2}[$$

$$f(x) = x \qquad \text{si } x \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

Soit n la fonction nulle définie sur $[0, 1]$ (quel que soit x élément de $[0, 1]$, $n(x) = 0$).

Peut-on trouver deux fonctions h_1 et h_2 distinctes telles que

$$f \cdot h_1 = n \quad \text{et} \quad f \cdot h_2 = n\ ?$$

Si oui, lesquelles ?

5' 9°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0, 1] de R par

$f(x) = 0$ si x est décimal

$f(x) = x$ si x est non décimal.

Soit n la fonction nulle définie sur [0, 1] (quel que soit $x \in [0, 1]$, $n(x) = 0$).

Peut-on trouver deux fonctions h_1 et h_2 distinctes telles que

$$f \cdot h_1 = n \quad \text{et} \quad f \cdot h_2 = n\ ?$$

Si oui, lesquelles ?

5' 10°) n étant la fonction nulle définie sur R ($n(x) = 0$ pour tout élément x de R), le raisonnement suivant est-il correct ?

"Soient f et g deux fonctions de R dans R telles que $f \cdot g = n$. Ceci veut dire que, quel que soit le réel x, $f(x) \times g(x) = 0$. D'après les propriétés des nombres réels nous avons donc, quel que soit le réel x, $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ et par conséquent $f = n$ ou $g = n$".

Tableau statistique sur l'interrogation B

428 élèves l'ont subi.

Les réponses venant de Première représentent 38 % de l'ensemble.

POURCENTAGE DE BONNES REPONSES

Questions	Sur l'ensemble	Sur les classes de Première
N° 1	64	38
N° 2	90	91
N° 3	65	52
N° 4	88	90
N° 5	88	91
N° 6	2	2
N° 7	48	60
N° 8	17	17
N° 9	17	20
N° 10	18	20