# 1

# ÉTUDES

## Matériaux pour une classe de seconde A

René GAUTHIER
Lycée Ampère

Les pages qui suivent ont été, en partie, utilisées dans une classe de seconde littéraire, en fin d'année.

Elles sont, en principe, destinées à l'élève: chercher, se documenter; il n'est pas indispensable de TOUT faire.

Il y a des choses "non au programme"; mais la stupidité de nos programmes des classes dites "littéraires" est tellement évidente aux yeux de ceux d'entre nous qui enseignent dans ces classes, que c'est un devoir de prendre des libertés avec ces programmes si l'on veut tenter de faire un peu de mathématiques avec ces élèves peu motivés.

Les activités sur la parabole contiennent du dessin, un peu d'analytique, un peu d'histoire (Archimède), des calculs d'aires à partir de la propriété d'Archimède, quelques indications (sommaires, trop timides....) sur "parabole et techniques".

Nous manquons tous d'imagination sur des "thèmes" possibles dans les classes littéraires, plus ou moins en liaison avec les "noyaux" du programme.

D'où le souhait que des collègues communiquent des choses qu'ils ont tenté dans les classes, des remarques, aussi, sur ces pages.

Ce n'est qu'un début .....

## • 1 DESSIN

Marquer un point F, tracer une droite D ne contenant pas ce point F.

Vous allez construire avec règle et équerre des points à égale distance de F et de la droite D.

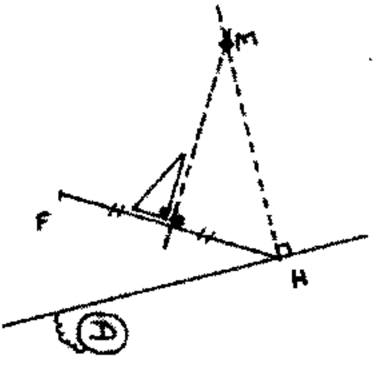
Pour commencer, qu'est-ce que la "distance d'un point à une droite" ?

*Choisir un point H sur D. Tracer la perpendiculaire à D en H. Tracer [FH] et la médiatrice de [FH] .*

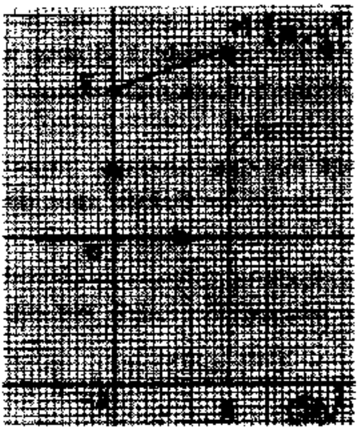
*....... Recommencer ....*

*Tracer un grand nombre de points. Les joindre par une courbe continue.....*

*Cette courbe est une PARABOLE de foyer F et de directrice la droite D.*




## • 2 EQUATION



Tracer un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

F : point (0 ; 2)

D : droite d'équation $y = -2$

M(x, y) : H est le projeté orthogonal de M sur D.

Coordonnées de H ?

Composantes de $\overrightarrow{MH}$ ? de $\overrightarrow{MF}$ ?

Trouver l'équation de l'ensemble des points M tels que MH = MF , c'est-à-dire

$$\|\overrightarrow{MH}\|^2 - \|\overrightarrow{MF}\|^2 = 0$$

■ ***Exercices:***

*1. Donner une définition de la parabole, en termes géométriques.*

*2. Recommencer l'exercice 2 avec*

| | | |
|---|---|---|
| $F(0\,;1/2)$ | *et* | $D\ :\ y = 1/2$ |
| $F(0\,;-1)$ | *et* | $D\ :\ y = +1$ |
| $F(0\,;-4)$ | *et* | $D\ :\ y = 2$ |
| $F(0\,;0)$ | *et* | $D\ :\ y = -5$ |

*3. En utilisant le dessin (1) ou la recherche par l'équation (2), montrer que la parabole possède un axe de SYMETRIE.*

*4. Et si le point F est pris SUR la droite D, quel est l'ensemble des points M à égale distance de F et de D ?*

## • 3 FONCTIONS – EQUATIONS

$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$

Construction d'une représentation graphique de f.
Etude de la courbe: axe de symétrie.
Variations de cette fonction.
Sommet.
Que dire de f(x) si x devient très grand "positif" c'est-à-dire si "x tend vers plus l'infini" ?
Et si "x tend vers moins l'infini" (x très grand et négatif) ?

La courbe représentative est une PARABOLE d'axe yy'.
On dit aussi que cette courbe a pour équation $y = x^2$.

$\boxed{f : x \longmapsto -x^2}$

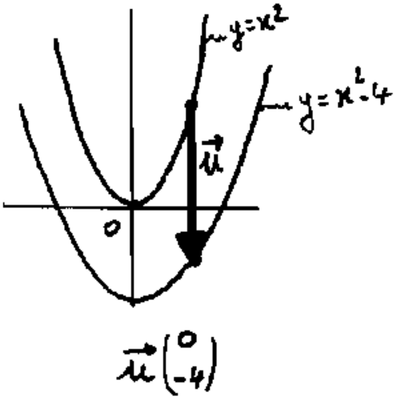
Reprendre la même étude.

En supposant construite la parabole d'équation $y = x^2$, comment construire la parabole d'équation $y = -x^2$ par une application ponctuelle simple ?

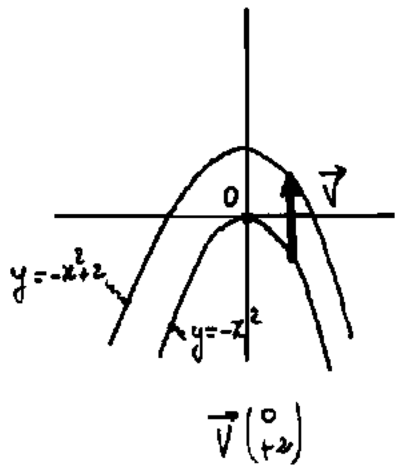
| |
|---|
| $h : x \longmapsto 2x^2$ |
| $p : x \longmapsto -2x^2$ |

Même étude.

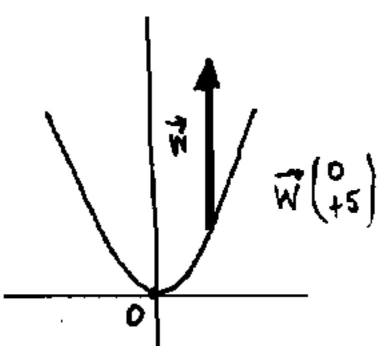
$\boxed{x \longmapsto x^2 - 4}$



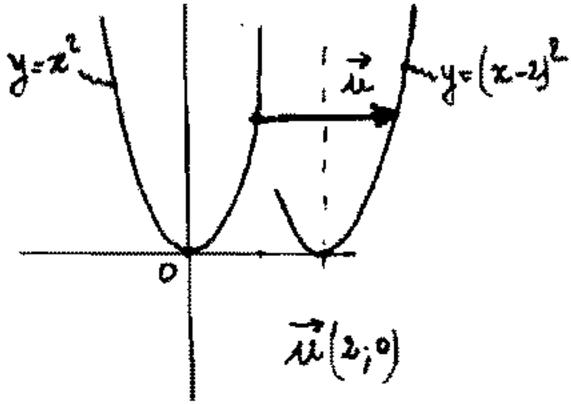

$\boxed{x \longmapsto -x^2 + 2}$



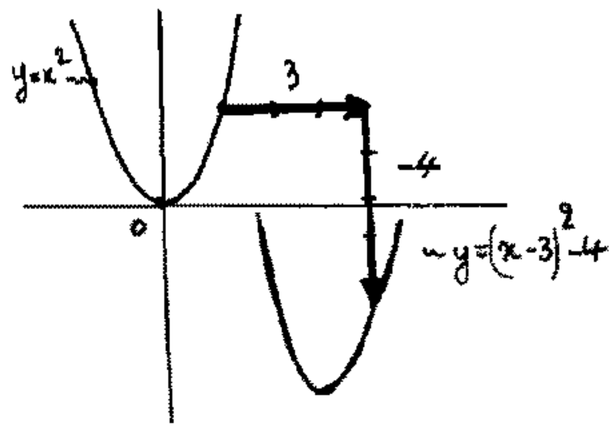

$\boxed{x \longmapsto x^2 + 5}$



$\boxed{x \longmapsto (x-2)^2}$

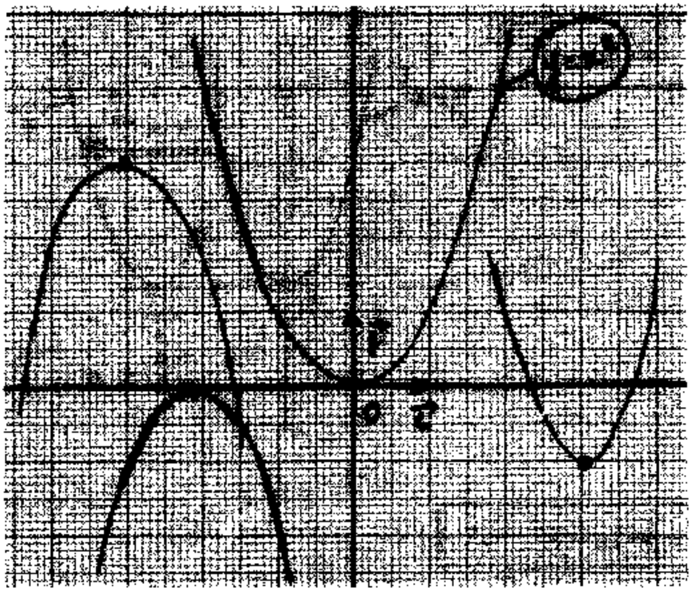



$\boxed{x \longmapsto (x-3)^2 - 4}$




## • 4 DIVERS TRACES

**4.1.** Sur du papier millimétré, tracer avec soin une parabole d'équation $y = x^2$. La décalquer et la reproduire sur une feuille de carton fort; la découper.



En utilisant ce modèle en carton, tracer d'autres paraboles identiques sur le repère choisi : marquer d'abord le sommet S, tracer l'axe de symétrie parallèle à (O, j) et dessiner la courbe en suivant le bord du carton.

Trouver l'équation de chaque parabole ainsi tracée.

**4.2.** Tracer la parabole d'équation $y = 0{,}5\,x^2$ .

Sur le même repère, tracer les droites d'équations respectives :

$y = x$ ; $y = x + 3$ ; $y = x + 5$ ; $y = x + 1$

$y = x + 0{,}5$ ; $y = x - 0{,}5$ ; $y = x - 2$ ; $y = x - 4$

Certaines de ces droites parallèles sont *sécantes* à la parabole : le démontrer et calculer les coordonnées des points communs à la droite et à la parabole. (L'équation du second degré a été préalablement étudiée).

Certaines de ces droites n'ont pas de point commun avec la parabole : le démontrer.

Une de ces droites a un seul point commun avec la parabole ; elle lui est *tangente*. Calculer les coordonnées du point de contact.

Pour les droites sécantes, marquer le milieu du segment déterminé par la parabole sur chaque droite: que pouvez-vous dire de ces milieux ?
Tracer les droites d'équation respective: $x = 5$ ; $x = -4$ .
En combien de points coupent-elles la parabole ? Sont-elles tangentes à la parabole ?

**4.3.** Voici deux équations de paraboles:

$$y = x^2 - 6 \qquad ; \qquad y = 4 - x^2$$

Les tracer sur un même dessin.
Calculer les coordonnées des points communs à ces deux paraboles et l'équation de la droite passant par ces deux points.

**4.4.** Voici deux points du plan: $A\,(4\ ;\ 12)$ $B\,(-2\ ;-1)$ .
Une parabole P a pour équation $y = ax^2 + b$ ;
Les coefficients a et b sont, pour le moment inconnus.
Pouvez-vous trouver un couple (a, b) pour que P passe par le point A ?
Pouvez-vous trouver plusieurs couples, c'est-à-dire plusieurs paraboles ?
Pouvez-vous trouver un couple (a, b) tel que la parabole P passe par les deux points A et B ?

## • 5 PROPRIETE D'ARCHIMEDE

*Archimède s'est intéressé à la parabole et découvrit une propriété que vous allez à votre tour étudier.*

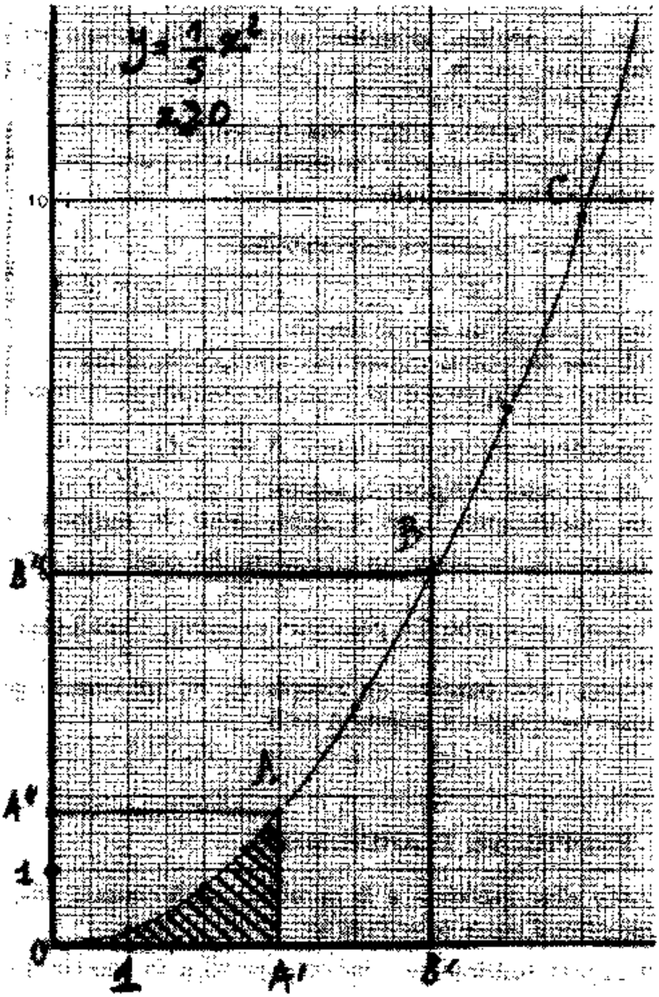
Sur du papier millimétré, tracez avec soin la moitié de parabole d'équation

$$y = 0{,}2\,x^2 \qquad (\text{avec } x \geqslant 0) \qquad (u = 1\text{ cm})$$

Marquez tous les points de coordonnées entières, en particulier:
A (x = 3) B (x = 5) C (x = 7) D (x = 9) E (x = 10)

Les perpendiculaires aux axes issues de A coupent ces axes en A' et A''. Mêmes notations pour B: B' et B'' , etc...

Calculez, en mm$^2$, l'aire du rectangle AA'OA'', puis l'aire du rectangle BB'OB'', CC'OC'', etc....




Evaluez, en comptant les carreaux, l'aire (hachurée) située dans chaque rectangle et "au-dessous" de la parabole.

Remplir le tableau des résultats.
Faites les moyennes des résultats de la classe.
Calculer chaque fois le quotient K :

$$K = \frac{\text{aire du rectangle}}{\text{aire du secteur}}$$

| POINTS | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Aire du rectangle ($mm^2$) | | | | | |
| Aire du secteur ($mm^2$) | | | | | |
| QUOTIENT K | | | | | |

**Propriété d'Archimède**

$$\text{Aire du Secteur S} = \frac{1}{8} \text{ (aire du rectangle ABCD)}$$

Le savant ARCHIMEDE s'intéressa surtout à des problèmes de mécanique, d'hydraulique (le principe qui porte son nom ...). Il fut amené à la découverte de propriétés géométriques à partir de ses recherches en mécanique. Il est né aux environs de 287 avant notre ère, et fut tué par un soldat au siège de Syracuse en 212 avant notre ère.
On lui doit de très nombreux traités sur la sphère, le cylindre, le cône, les spirales, le cercle, les corps flottants et la parabole. C'est lui, semble-t-il, qui démontra le premier la propriété que vous venez d'étudier à propos d'une aire délimitée par un arc de parabole.
Une biographie d'Archimède a été écrite par un certain Héraclite. Il serait le fils d'un astronome PHIDIAS, et parent d'un roi de Syracuse, le roi HIERON.
C'est Archimède qui disait: "Donne-moi un point d'appui où je puisse me tenir ferme et j'ébranlerai la terre".

## ■ *Quelques exercices utilisant la propriété d'Archimède*

*5.1. Tracer la parabole d'équation:*

$$y = 0{,}1\,x^2$$

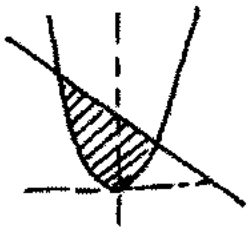
*et la droite d'équation* $y = x$ .

*Calculer l'aire de la surface comprise entre la parabole et la droite.*

*5.2. Tracer la parabole d'équation*

$$y = x^2$$

*et la droite d'équation* $y = 8 - 2x$ .



*Calculer l'aire de la surface ayant pour frontières cette parabole et cette droite.*

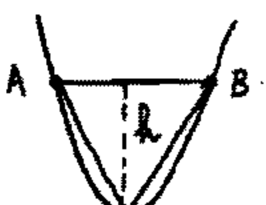
*5.3. Tracer les deux paraboles suivantes, d'équations respectives:*

$$Y = X^2 \quad \text{et} \quad Y = 8 - X^2$$

*Calculer l'aire de la surface ayant pour frontières ces deux paraboles.*

*5.4. Proposition XXIV d'Archimède (ouvrage consacré à la parabole)*

*On considère une parabole et une droite perpendiculaire à son axe de symétrie qui la coupe.*
*La surface délimitée par la parabole et la droite équivaut aux quatre tiers du triangle de même base et de même hauteur.*




*5.5. Partager un rectangle en trois surfaces de même aire à l'aide de deux arcs de paraboles.*

# SUR ARCHIMEDE ......

Archimède était comme une sorte d'aigle solitaire. Jeune homme, il avait étudié quelque temps à Alexandrie en Egypte, où il s'était fait deux amis sincères: Conon, un mathématicien doué pour qui Archimède avait un grand respect à la fois personnel et intellectuel, et Eratosthène également bon mathématicien, mais très fat. Ces deux amis, particulièrement Conon, paraissent avoir été les seuls de ses contemporains à qui il confiât volontiers ses idées, étant assuré d'être compris. Il a communiqué certains de ses plus beaux travaux, par lettres, à Conon. Plus tard, après le décès de Conon, Archimède entretint une correspondance avec Dosithée, un élève de Conon. ....

..... Archimède a découvert des méthodes générales pour trouver les aires des figures planes curvilignes et les volumes des corps délimités par des surfaces courbes, et il a appliqué ces méthodes à plusieurs cas particuliers tels que le cercle, la sphère, le segment de parabole, l'aire comprise entre deux rayons et deux spires successives d'une hélice, les segments sphériques, les parties de surfaces engendrées par les révolutions de rectangles (cylindres), triangles (cônes), paraboles (paraboloïdes), hyperboles (hyperboloïdes), ellipses (ellipsoïdes) autour de leurs axes principaux. Il a donné une méthode pour calculer $\pi$ , le rapport de la circonférence à son diamètre, et a fixé la valeur de $\pi$ entre 31/7 et 310/71 . Il a indiqué aussi des méthodes pour calculer approximativement les racines carrées, ce qui prouve qu'il a été le précurseur des Hindous dans l'invention des fractions continues périodiques. En arithmétique, dépassant de beaucoup la méthode peu pratique et antiscientifique des Grecs de représenter les nombres par des symboles, il a inventé un système de numération permettant d'écrire ou d'énoncer des nombres aussi grands que l'on veut. En mécanique, il a posé quelques postulats fondamentaux, découvert les lois des leviers et appliqué les principes mécaniques de ceux-ci au calcul des aires et des centres de gravité de plusieurs surfaces planes et des volumes de corps de formes diverses. Il a créé toute la science de l'hydrostatique et l'a appliquée à trouver des positions de repos et d'équilibre de corps flottants de plusieurs sortes.

Archimède n'a pas été l'auteur d'un chef-d'œuvre, mais d'un très grand nombre de chef-d'œuvres. La stricte brièveté, la logique rigoureuse de son exposition ne laissent pas deviner la METHODE par laquelle il est arrivé à ces résultats admirables. Heureusement, en 1906, J.L. Heiberg, l'historien érudit des mathématiques des Grecs, a fait à Constantinople l'émouvante découverte d'un traité, jusqu'alors égaré, adressé par Archimède à son ami Erathostène, intitulé: THEOREMES DE MECANIQUE, METHODES. Archimède y explique comment, en comparant, par la pensée, une figure ou un solide dont l'aire ou le volume sont inconnus, à un autre déjà connu, il a été conduit à la connaissance de l'élément cherché: le résultat une fois connu, il était alors relativement facile (pour lui) de le démontrer mathématiquement. En un mot, il a mis à profit ses connaissances en mécanique pour faire progresser ses mathématiques. C'est là un des titres qui permettent de le compter parmi les esprits modernes: il a utilisé TOUTES CHOSES ET CHAQUE CHOSE QUI S'OFFRAIT D'ELLE-MEME, COMME UNE ARME POUR ATTAQUER SES PROBLEMES.

Les grands Mathématiciens

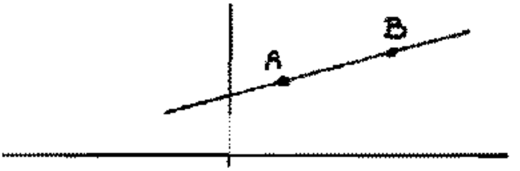
E.T. BELL

## • 6 PENTE — TANGENTES

*Rappels:*

*Pente d'une droite en repère orthonormé:*

$A\,(x_A\,,\,y_A)$ $\quad$ $B\,(x_B\,,\,y_B)$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

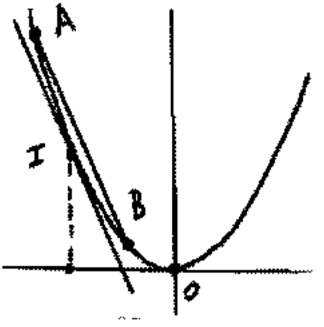



*Pente de la droite AB*

$$p = \frac{\textit{différence des ordonnées}}{\textit{différence des abscisses}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

**Tracer la parabole d'équation $y = 0{,}2\,x^2$. Marquer en particulier les points suivants:**

| Points | A | B | C | D | E | F | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | −10 | −6 | −2 | 0 | 3 | 6 | 11 |
| y | | | | | | | |




**Calculer la pente de la droite AB; tracer cette droite.**
**Marquer sur la parabole le point I ayant pour abscisse la demi-somme des abscisses de A et B. Par I, tracer la droite de même pente que AB: elle est tangente à la parabole.**

**Même travail avec la droite BC, avec CO, avec OE, EF, FH, .....**

**On obtient, sur la parabole, des points intermédiaires: I, J, K, L, M, Q. Pour chaque point vous avez tracé la tangente à la parabole, après avoir calculé la pente de cette tangente.**

| Points | I | J | K | L | M | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | −8 | −4 | | | | |
| $y = 0{,}2\,x^2$ | 12,8 | | | | | |
| Pente | | | | | | |

**Comment s'exprime la pente de la tangente en fonction de X ?**
**Recommencer cette activité avec la parabole d'équation $y = x^2$ puis avec $y = 3x^2$.**

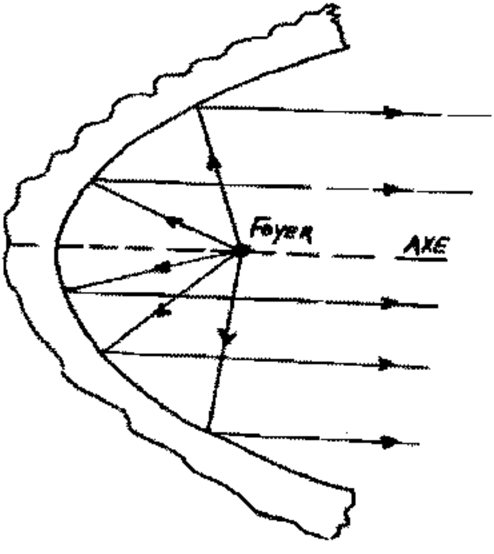
## • 7 PARABOLES et TECHNIQUES

■ **en mécanique**

Un objet lancé dans le vide décrit une trajectoire à peu près parabolique ; l'axe de la parabole est vertical.

■ **en optique**

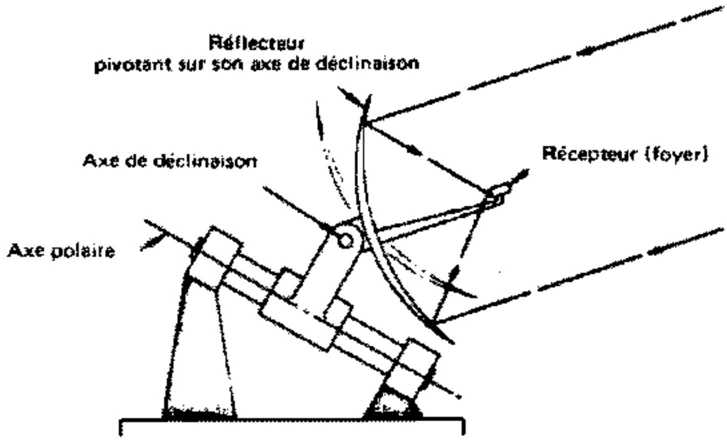
Si un miroir a la forme d'une parabole et si une source lumineuse est placée au foyer de la parabole : les rayons réfléchis sur la surface réfléchissante sont des rayons parallèles à l'axe de la parabole. On obtient un faisceau de rayons parallèles (phares de voiture, torches, ....).

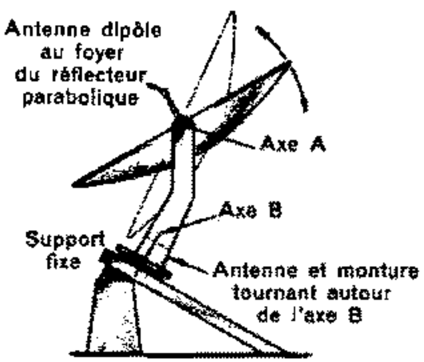


Surface parabolique ...

■ **radars — électronique — télescopes ....**

**UN RADIOTELESCOPE A MONTAGE EQUATORIAL**




*Des stations de radars puissants, comme celui montré ici, suivent l'astronaute et maintiennent le contact.*

*Le Japon veut « prévoir » l'arrivée d'un typhon, avertir les populations et prendre toutes mesures utiles. Cet énorme radar, installé au sommet de l'observatoire de Muruto, tourne vingt-quatre heures sur vingt-quatre et peut détecter un typhon à plus de 400 kilomètres de distance. (Photo Agip.)*

*(La partie fixe du grand télescope de Nançay).*