Bulletin de l'APMEP n°315 - Septembre 1978

Problèmes de coupures

par Claude MOSER, Grenoble

Cet article fait suite au papier CONSTRUCTION DES REELS ET NUMERATION. Il en utilise les notations et l'un des principaux résultats que je rappelle :

Je note, pour $m \geqslant 2$, A_m l'anneau obtenu à partir de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels par adjonction d'un inverse de m pour la multiplication. Je note A_m^* l'ensemble des éléments de A_m inversibles pour la multiplication et je démontre la propriété (P·) :

> Si m est un entier qui n'est pas puissance d'un nombre premier, l'ensemble A_m^* est dense dans A_m pour la distance induite par l'ordre naturel.

Cela étant, le but du présent article est d'appliquer à un anneau A_m la méthode des coupures de Dedekind pour construire le corps des nombres réels. Je m'attache uniquement à l'étude de la multiplication, car celle de l'addition ne présente aucune difficulté. Pour éviter les lourdeurs d'écriture, je parlerai de coupures sur l'ensemble B_m des éléments strictement positifs de A_m .

Définition.—

Une partie C de B_m est une coupure si elle satisfait aux trois propriétés :

- Ni C ni $B_m \setminus C$ ne sont vides.
- Si $x \in C$ et si $y \leqslant x$ alors $y \in C$
- La partie C n'a pas de plus grand élément.

Cette définition est directement calquée de la définition des coupures de Dedekind sur les rationnels.

L'anneau que l'on cherche le plus naturellement à "compléter" est l'anneau des décimaux. On est par suite amené à utiliser la propriété (P) pour obtenir une construction voisine de celle obtenue à partir des rationnels.

1. Cas où m n'est pas un nombre primaire.

On suppose ici que m n'est pas primaire. Etant données deux coupures C_1 et C_2 de B_m, on appellera produit de C_1 et C_2, et on notera $C_1 C_2$ l'ensemble

$$\} Z \mid \exists\ x\ ,\ \exists\ y\ ,\ x \in C_1\ ,\ y \in C_2\ ,\ z = x\,y \mid .$$

Il s'agit de prouver que la loi $((C_1, C_2) \longmapsto C_1 C_2)$ est une loi de groupe commutatif dont l'élément neutre est l'intervalle $]\,0\,,1\,[$.

Montrons que $C_1 C_2$ est une coupure si C_1 et C_2 sont des coupures.

- Il est clair que $C_1 C_2$ n'est pas vide.

- L'une des inclusions $C_1 \subset C_2$, $C_2 \subset C_1$ est vraie. Si Z est un élément de B_m n'appartenant ni à C_1 ni à C_2, alors, pour tout $x \in C_1$ et tout $y \in C_2$, on a $x < z$, $y < z$ et $x\,y < Z^2$. Par conséquent $Z^2 \notin C_1 C_2$ et $B_m \setminus C_1 C_2$ n'est pas vide.

- Soit u un élément de $C_1 C_2$ et soit $v < u$. Soit x et y , $x \in C_1$, $y \in C_2$, tels que $u = x\,y$.

D'après la propriété (P) il existe x' et y', $x' \in C_1 \cap A_m^*$, $y' \in C_2 \cap A_m^*$ tels que $x < x'$ et $y < y'$. Soit $z' = x'y'$.

On a $v = (v\,.\,z'^{-1}\,x')\,.\,y'$.

De l'inégalité $v \leqslant u$ on déduit $v < z'$, d'où $v\,z'^{-1}\,x' < x'$; il est clair alors que $v\,z'^{-1}\,x'$ appartient à C_1 . Puisque y' appartient à C_2, v appartient à $C_1 C_2$.

- L'ensemble $C_1 C_2$ n'a pas de plus grand élément car si $z = x\,y$ avec $x \in C_1$, $y \in C_2$ il existe $x' > x$, $x' \in C_1$ et $x'y$ appartient à $C_1 C_2$.

En bref, le produit est une loi de composition interne sur l'ensemble des coupures. Il est très aisé de vérifier que cette loi est associative et commutative.

L'intervalle $]\,0\,,\,1\,[$ est élément neutre pour le produit.

Soit C une coupure. Pour tout $x \in]\,0{,}1\,[$ et tout $y \in C$, $x\,y < y$ et $x\,y \in C$. On a donc $]\,0{,}1\,[\ .\ C \subset C$.

Réciproquement soit $y \in C$. Soit $n \geqslant 2$ un entier assez grand pour que $y\,(\,1 + \dfrac{2}{m^n}\,) \in C$. On a $(\,1 - \dfrac{1}{m^n}\,) \in]\,0{,}1\,[$ et

$$y(1+\frac{2}{m^n})(1-\frac{1}{m^n}) = y(1+\frac{1}{m^n}-\frac{2}{m^{2n}}) \in]0,1[\ .\ C\ .$$

Or $\frac{1}{m^n}-\frac{2}{m^{2n}} > 0$. Par conséquent $y < y(1+\frac{2}{m^n})(1-\frac{1}{m^n})$ et $y \in C$. On conclut à l'égalité $C =]0,1[\ .\ C$.

Toute coupure est inversible pour le produit.

Soit C une coupure. La première idée qui se présente pour trouver un inverse à C est de considérer l'ensemble $\{Z \mid \forall x\ ,\ x \in C \Rightarrow z\,x < 1\}$. Malheureusement, en général cet ensemble n'est pas une coupure : considérez, pour $m = 10$ la coupure $C =]0,1[$. Il est immédiat que l'ensemble correspondant est $]0, \frac{1}{10}[$, lequel n'est pas une coupure.

Une autre idée est la suivante : On considère l'ensemble

$$I(C) = \bigcup_{y \in B_m^* \setminus C}]0, \overset{-1}{y}[$$

et on montre que $I(C)\ .\ C =]0,1[$, et que $I(C)$ est une coupure.

• *L'ensemble $I(C)$ n'est pas vide* : Si m^ℓ est la plus petite puissance de m n'appartenant pas à C , alors $]0, \frac{1}{m^\ell}[\subset I(C)$.

• *L'ensemble $B_m \setminus I(C)$ n'est pas vide* : Soit z un élément de C inversible dans A_m . Pour tout $y \in B_m^* \setminus C$, $z < y$, donc $\overset{-1}{z} > \overset{-1}{y}$. On en déduit $\overset{-1}{z} \notin I(C)$.

• *L'ensemble $I(C)$ est un intervalle* : Soit $x \in I(C)$ et $y < x$. Il existe $z \in B_m^* \setminus C$ tel que $x \in]0, \overset{-1}{z}[$. Par suite $y \in]0, \overset{-1}{z}[$ et $y \in I(C)$.

• *L'ensemble $I(C)$ n'a pas de plus grand élément* : Soit $x \in I(C)$ et soit $z \in B_m^* \setminus C$ tel que $x \in]0, \overset{-1}{z}[$. Il existe $\theta \in]x, \overset{-1}{z}[$.

• *$I(C)\ .\ C \subset]0,1[$* : Soit $x \in I(C)$ et $y \in C$. Soit $z \in A_m^* \setminus C$ tel que $x \in]0, \overset{-1}{z}[$. On a $z > y$ et $x\,y < \overset{-1}{z}\ y < 1$. On en déduit $I(C)\ .\ C \subset]0,1[$.

• $]0,1[\subset I(C).C$: Soit $t \in]0,1[$. Soit $y \in C \cap A_m^*$, avec y assez petit pour que $\overset{-1}{y} \notin C$. Soit $z \in C \cap A_m^*$, $z < y$. Alors :

$$t = (t\overset{-1}{y})\,y \text{ avec } \begin{cases} y \in C \\ t\overset{-1}{y} < t\overset{-1}{z} < \overset{-1}{z}, \text{ donc } t\overset{-1}{y} \in]0,\overset{-1}{z}[\subset I(C) \end{cases}$$

On a montré que l'ensemble des coupures sur B_m muni du produit est un groupe commutatif. La construction du corps des réels ne pose plus guère de problème, à ce stade.

2. Le cas m primaire.—

On sait que ce cas se ramène au cas m premier. L'examen des démonstrations faites dans le paragraphe 1 montre que la propriété P n'est d'aucune utilité pour prouver que $]0,1[$ est élément neutre du produit ou que toute coupure est inversible. Elle sert uniquement dans la preuve que le produit est une loi interne. Il n'y aurait donc pas lieu de faire un paragraphe spécial dans le cas m primaire si le produit de deux coupures était une coupure. Le résultat ci-après prouve qu'il n'en est rien en général :

Proposition.—

Soit p un nombre premier et soit S l'intervalle $]0, 1-\frac{1}{p^3}[$ dans A_p . Alors S est une coupure de l'ensemble des éléments strictement positifs de A_p mais $S \cdot S = \{ z \mid \exists x, \exists y, y \in S, x \in S \text{ et } xy = z \}$ n'en est pas une.

Démonstration.—

On a $1 - \frac{1}{p^2} \in S$ et $1 \notin S$. De plus S est un intervalle. Pour tout $x \in S$ on a aussi $\frac{1}{p}(x + (p-1)(1-\frac{1}{p^3})) \in S$. Par conséquent S n'a pas de plus grand élément et S est une coupure.

Maintenant si p est un nombre $\geqslant 2$, les inégalités suivantes sont vraies :

$p(p-1) \geqslant 2$, $p^2 \geqslant p+2$, $p^4 - p^2(p+2) + 1 > 0$.

Par conséquent dans l'anneau A_p :

$$(1-\frac{1}{p^2})^2 - \frac{1}{p} > 0 \ .$$

Si p^{-1} appartenait à S.S, il existerait deux éléments x et y de S tels que $p^{-1} = x\,y$. Les éléments x et y seraient inversibles, c'est-à-dire $x = p^{\alpha}$, $y = p^{\beta}$ avec α et β entiers rationnels inférieurs ou égaux à -1 $(x, y \in S)$. On ne pourrait avoir $\alpha + \beta + 1 = 0$. Du fait que $(1 - p^{-2})^2 \in S.S$ et $p^{-1} < (1 - p^{-2})^2$ avec $p^{-1} \notin S.S$, on conclut que S.S n'est pas une coupure de A_p.

Il serait tout de même extraordinaire que, si près du but, il soit impossible de construire le corps des nombres réels à partir de l'anneau A_p. Puisque le drame se situe au niveau de la définition du produit de deux coupures, je propose de changer de définition afin que mes souhaits se réalisent.

Définition.—

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2, B_m l'ensemble des éléments strictement positifs de A_m.

Soit C_1 et C_2 deux coupures sur B_m. On note $C_1 * C_2$ et on appelle produit des coupures C_1 et C_2 l'ensemble

$$\{Z \mid \exists\ x, \exists\ y,\ x \in C_1,\ y \in C_2,\ Z \leqslant x\,y\}.$$

Il s'agit maintenant de prouver que ce produit est une loi de composition interne associative et commutative.

- En premier lieu il est clair, si C_1 et C_2 sont deux coupures, que $C_1 * C_2$ est non vide. Ensuite si z est un élément de B_m n'appartenant ni à C_1 ni à C_2, on a $z^2 \notin C_1 * C_2$, comme on le vérifie sans peine.
- En second lieu si $z \in C_1 * C_2$ et si $y \leqslant z$ avec $y \in B_m$, alors $y \in C_1 * C_2$.
- L'ensemble $C_1 * C_2$ n'a pas de plus grand élément : soit $z \in C_1 * C_2$. Soit $x \in C_1$ et $y \in C_2$ tels que $z \leqslant x\,y$. Puisque C_1 est une coupure, il existe $x' \in C_1$, $x' > x$ et $z < x'y$ avec $x'y \in C_1 * C_2$.

Ceci prouve que le produit de deux coupures est une coupure. Le lecteur n'aura aucun mal à vérifier que le produit des coupures est commutatif. L'associativité de ce produit résulte du fait que pour tout triplet (C_1, C_2, C_3) de coupures sur B_m :

$$\begin{aligned} C_1 * (C_2 * C_3) &= \{z \mid \exists\ x, \exists\ z_1,\ x\,z_1 = z,\ x \in C_1,\ z_1 \in C_2 * C_3\} \\ &= \{z \mid \exists\ x, \exists\ y, \exists\ t,\ x \in C_1,\ y \in C_2,\ t \in C_3,\ z = x\,y\,t\} \\ &= (C_1 * C_2) * C_3 . \end{aligned}$$

Pour finir de démontrer que le produit est une loi de groupe sur l'ensemble des coupures de B_m, on constate que les démonstrations des propriétés :

- L'intervalle]0,1[est élément neutre pour le produit ;
- Toute coupure est inversible ;

données dans le cas m primaire peuvent être reprises sans changement dans le cas m non primaire.

Enfin, on constate que si m est un entier non primaire, les deux définitions du produit de deux coupures coïncident. Les démonstrations faites ici permettent de ne pas utiliser la propriété P pour prouver que les coupures munies du produit forment un groupe.

Pour terminer, je voudrai remercier Philippe J. HAUG, animateur à l'I.R.E.M. de Grenoble, avec qui j'ai longuement discuté des problèmes traités dans ces deux articles et qui surtout a eu la patience d'en lire les premières versions et m'a bien conseillé en vue d'obtenir une rédaction qui soit, nous l'espérons, agréable au lecteur.