5

PROGRAMMES DE 4ème ET 3ème

Vers des programmes quatrième-troisième

I. ENCORE EUX !

Les programmes de quatrième-troisième sont en gestation officielle ... depuis plus de dix-huit mois.

L'A.P.M.E.P. s'efforce d'être fidèle à une double tâche :

- *d'information, en diffusant les divers projets dès qu'ils sont connus,*
- *de représentation, en critiquant ces projets — par référence aux critères majeurs dégagés par ses diverses instances (Journées, Commissions, Comité, Bureau) —.*

Ainsi en a-t-elle agi, dans les Bulletins nos 308 et 309, vis-à-vis de l'avant-projet de l'Inspection générale.

Le Bulletin n° 312 a présenté la génèse, et la critique A.P.M.E.P., d'un projet "Académie des Sciences" connu fin novembre. Il aurait été logique que ce même numéro publie en même temps l'intégralité de ce projet et de ses annexes. Malheureusement, le volume excessif des documents retenus pour ce n° 312 a fait remettre au suivant un certain nombre de textes parmi lesquels ceux de l'Académie. Le Bureau national A.P.M.E.P. prie les intéressés, auteurs ou lecteurs, de bien vouloir agréer ses excuses pour ce fâcheux contre-temps.

Depuis, l'A.P.M.E.P. a reçu, de J. Giraud, un projet de programme préalablement remis au ministère. En transmettant son projet à celui-ci, l'auteur a réclamé qu'il soit confié à un groupe de travail pour lequel il ne s'agirait que d'un document de départ — parmi d'autres —. Ceci rejoint un voeu constant de l'A.P.M.E.P.

On trouvera ce "projet GIRAUD" à la suite des textes de l'Académie des Sciences.

Cela fera encore beaucoup de pages quatrième-troisième, ce qui exclut par le fait même divers autres textes fort intéressants reçus de Lille, Lyon, Strasbourg, Grenoble, Clermont ...

IL NOUS PARAIT CEPENDANT NECESSAIRE D'Y ADJOINDRE UNE BREVE, MAIS FERME, MISE EN GARDE — qui renvoie pour plus de détails au texte du Comité national du 6/11/77, texte paru dans les Bulletins 311 et 312 —. Cette mise en garde nous paraît plus que jamais d'actualité.

Henri BAREIL
Vice-Président Premier Cycle

II. TEXTES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES

(Cf. Etude critique A.P.M.E.P. Bulletin n° 312)

L'ensemble des documents ci-joints concerne le programme de mathématiques des classes de quatrième et troisième (troisième et quatrième années des collèges).

Il comprend :

1°) des observations de caractère général,
2°) un projet de programme dans lequel l'ordre des matières n'est pas imposé,
3°) deux annexes fournissant aux professeurs qui le désireraient des exemples d'ordonnance logique pour les matières du programme précédent, et une troisième exposant une autre répartition possible pour les matières du programme entre les classes de quatrième et troisième.

Les deux premiers documents ont été discutés par l'Académie amendés et adoptés par elle, au cours de deux Comités secrets. Les Annexes, rédigées par d'éminents mathématiciens, présentent des vues personnelles détaillées, mais n'engagent pas l'Académie.

Quelques remarques présentées par l'Académie des Sciences au sujet de l'enseignement des mathématiques dans les classes de quatrième et de troisième.

Observations d'ordre général.

A ce niveau, l'enseignement des mathématiques doit conduire l'élève à passer progressivement du stade de la simple observation à celui du raisonnement. En même temps, il doit mettre l'élève en mesure d'utiliser ses connaissances en mathématiques dans les autres disciplines scientifiques, et à cet égard il est souhaitable que s'établisse une concertation entre les enseignants de ces diverses disciplines.

Il faut qu'à la fin de la classe de troisième on ait donné un bagage suffisant aux enfants qui terminent leurs études, et en même temps que ce bagage permette à ceux qui vont les poursuivre d'aborder dans de bonnes conditions le programme de mathématiques du second cycle des lycées. Aussi le programme de mathématiques des classes de quatrième et troisième doit-il être conçu de façon que l'élève ait acquis la pratique des opérations sur les réels, et notamment soit capable de faire des approximations avec majoration de l'erreur. En ce qui concerne la géométrie, il devra avoir assimilé les notions essentielles de la géométrie euclidienne plane et devra être capable de résoudre quelques problèmes faciles de constructions géométriques. Il est souhaitable qu'il ait eu en outre l'occasion de faire des observations raisonnées sur des figures simples de l'espace à trois dimensions.

Nous voudrions insister sur deux points. Tout d'abord, il importe qu'il n'y ait pas de cloison étanche entre l'enseignement de l'algèbre et celui de la géométrie, et que ces deux disciplines n'apparaissent pas comme deux domaines étrangers l'un à l'autre. Il faut que l'élève puisse "voir géométriquement" lorsqu'il calcule sur les réels, et inversement il doit pouvoir traduire en calcul des situations géométriques simples (translations, symétries, barycentres, etc...). Le second point concerne le mode de présentation du contenu du programme : dans trop de manuels, l'élève est submergé sous un flot d'énoncés évidents ou sans intérêt, sous prétexte d'aider sa compréhension ; on encombre ainsi inutilement sa mémoire, et les mathématiques lui apparaissent alors comme une discipline bien compliquée et confuse, sans idée directrice. Il vaut beaucoup mieux se limiter à quelques énoncés *importants*, *peu nombreux*, et qui suffiront à l'élève pour résoudre les exercices ou problèmes qu'on lui posera en grand nombre. La *concision* et la *précision* sont des qualités essentielles à un bon enseignement des mathématiques, et elles sont compatibles avec un légitime souci de la pédagogie.

Remarques plus particulières concernant l'enseignement de la géométrie.

La géométrie plane euclidienne, on le sait aujourd'hui, n'est autre, en fin de compte, que l'étude d'un espace affine associé à un espace vectoriel réel de dimension deux, muni d'un produit scalaire défini positif. Mais il va de soi que ce n'est pas de cette façon que la géométrie peut être présentée à un enfant de 13 ans. Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans ces classes de transition que sont la quatrième et la troisième provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en sixième et cinquième par l'usage expérimental des instruments de dessin (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et, à partir de cette intuition, amener progressivement l'élève à raisonner et à manipuler consciemment les instruments pour lui faire acquérir peu à peu la notion de plan euclidien et l'usage des coordonnées rectangulaires.

Il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie. En revanche, il devra apprendre à faire de courts raisonnements, à partir de faits géométriques considérés comme évidents et donc admis comme vrais. Dans cet apprentissage de la réflexion et de la méthode déductive, il importe que le maître observe strictement quelques règles. Tout d'abord, les faits que l'on admet à un instant donné et qui vont servir de base au raisonnement doivent être clairement énoncés et ne prêter à aucune confusion dans l'esprit de l'élève. Ensuite le raisonnement doit être rigoureux ; il ne doit jamais faire appel à des hypothèses non explicitement formulées, et a fortiori doit se garder des cercles vicieux. Enfin il faut éviter qu'une propriété simple, qui est presque évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée, car alors l'élève ne pourra pas comprendre quelle est la règle du jeu.

S'il convient d'éviter une présentation axiomatique, il est, en revanche, indispensable que le maître possède, sur les matières enseignées dans ces deux classes, une vue d'ensemble cohérente. Autrement dit, il faut qu'il connaisse une ou plusieurs manières d'axiomatiser la géométrie plane euclidienne (par exemple une de celles proposées en Annexe), afin de pouvoir ordonner les matières de son enseignement et choisir, en toute connaissance de cause, les faits qu'il demandera aux élèves d'admettre, et les morceaux de raisonnement auxquels il les initiera. Faute d'une telle vue d'ensemble, le maître risquerait d'entraîner les élèves dans des développements inutilement compliqués et souvent stériles.

Enfin, il faut se garder de présenter à l'élève des axiomatisations incomplètes, comme celle qui était proposée dans l'avant-projet de programme et qui a provoqué un tollé général. On y donnait une caractérisation axiomatique du milieu d'un couple de points, tout en refusant de savoir que ce milieu est à la même distance des deux points ; et on ne voulait pas le savoir parce que l'on s'interdisait, en classe de quatrième, de parler de la distance de deux points du plan, sous prétexte qu'il s'agissait d'étudier seulement les propriétés affines du plan. Or, même si les autorités compétentes décident, en fin de compte, de se limiter en quatrième aux propriétés affines, il est indispensable, au départ, de tabler sur la notion de *distance* de deux points du plan ; il s'agit de la distance que l'on a appris à mesurer expérimentalement au moyen d'une règle graduée que l'on déplace dans le plan, une fois choisie l'unité de longueur.

Après de longues discussions, la commission désignée par l'Académie a décidé de proposer un programme dont le contenu s'éloigne aussi peu que possible du programme enseigné actuellement (à cela près qu'il comporte quelques suppressions destinées à alléger l'ensemble). On n'étudie donc en quatrième que les propriétés affines du plan, et le théorème de Pythagore est enseigné seulement en troisième. Cependant la commission ne serait pas hostile à une évolution ultérieure du programme, qui pourrait résulter d'une expérimentation dans les I.R.E.M.

PROJET DE PROGRAMME DE MATHEMATIQUES POUR LA TROISIEME ANNEE DES COLLEGES
(Classe de Quatrième)

Les professeurs ne sont pas tenus de respecter l'ordre du programme.

I. - Nombre décimaux et approche des réels.

Nombres décimaux : écriture décimale (avec virgule), opérations, relation d'ordre, valeur absolue.

Valeur approchée à 10^n près ($n \in \mathbb{Z}$). Erreur ; erreur sur une somme, sur un produit.

Algorithme de la division de deux nombres décimaux.

Introduction des nombres réels par des exemples de nombres décimaux illimités (avec une infinité de chiffres distincts de 9). Addition et multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (on admet les propriétés usuelles de ces opérations). Règle des signes pour la multiplication. On admet que tout nombre réel x non nul possède un inverse, noté x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. Notation $|x|$ et relations $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, $|xy| = |x| \cdot |y|$, $|x^{-1}| = |x|^{-1}$. Majoration de l'erreur commise sur x^{-1} en fonction de l'erreur commise sur x.

Règles de calcul sur les quotients $y^{-1}x$, ou $\frac{x}{y}$, notamment lorsque x et y sont entiers (fractions). Calcul de $(a+b)^2$, de $(a+b)(a-b)$.

Définition de x^n pour $n \in \mathbb{Z}$; règles de calcul.

Résolution, sur des exemples numériques, d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.

II. - Géométrie plane

Le plan, ensemble de points muni d'une distance ; la distance $d(p,q)$ de deux points p et q est un nombre réel $\geqslant 0$, une fois choisie une unité de longueur ; changement d'unité.

Les droites sont des parties du plan. Deux points distincts du plan appartiennent à une droite et une seule. Chaque droite peut être munie de deux "sens de parcours" ; demi-droite d'origine p, segment de droite $[p,q]$ d'extrémités p et q.

Sur une droite orientée (ou axe), mesure algébrique d'un bipoint (p, q) : notation $\overline{pq}$. Relation de Chasles. Etant donné un point p, il existe un unique point q de l'axe tel que $\overline{pq}$ soit égal à un nombre donné. Abscisse d'un point sur un axe, une fois choisie une origine. Abscisse du milieu d'un segment.

Les deux demi-plans définis par une droite ; convexité.

Symétrie par rapport à un point.

Parallélisme de deux droites, axiome d'Euclide, direction de droite.

Parallélogramme (propre ou aplati).

Projection du plan sur une droite, parallèlement à une direction donnée. Théorème de Thalès. Repérage des points du plan par deux coordonnées. Coordonnées du milieu d'un segment.

Equipollence de deux bipoints. C'est une relation d équivalence. Translations ; composition des translations.

Plan vectoriel : le choix d'une "origine" 0 associe à chaque point u le bipoint (0, u), appelé vecteur et noté $\vec{u}$. Vecteur $\overrightarrow{pq}$ défini par un bipoint (p,q). Translation définie par un vecteur ; addition des vecteurs, relation $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.

Produit $k\vec{u}$ d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre k ; relation

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

Bases du plan vectoriel, coordonnées relatives à une base. Equation d'une droite.

Exercices : homothétie, barycentre, médianes d'un triangle.

Nota bene. - L'élève dessinera lui-même toutes les figures en jeu ; les calculs vectoriels eux-mêmes seront accompagnés de figures.

Remarque sur ce programme : le chapitre intitulé "Relations" du programme actuellement en vigueur dans la classe de quatrième a été supprimé. Le vocabulaire de ce chapitre sera introduit au fur et à mesure que l'enseignement de la géométrie fournira des exemples.

PROJET DE PROGRAMME DE MATHEMATIQUES POUR LA QUATRIEME ANNEE DES COLLEGES
(Classe de troisième)

Les professeurs ne sont pas tenus de respecteur l'ordre du programme.

I. - CALCULS ALGEBRIQUES

1. On admet l'existence de la racine carrée d'un nombre réel positif. Approximation de la racine carrée. Racine carrée d'un produit de nombres positifs, de l'inverse d'un nombre positif.

2. Représentation graphique de la fonction $y = ax + b$. Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, interprétation graphique. Systèmes d'inéquations du premier degré. (On ne développera aucune théorie générale, on traitera seulement des exemples numériques).

3. Mise en équations de problèmes variés conduisant à des équations et inéquations du premier degré à deux inconnues.

II. - GEOMETRIE PLANE

Notion d'isométrie et son lien avec la notion de solide. Exemples d'isométries du plan : symétrie par rapport à un point, translation.

Inégalité triangulaires ; cas de l'égalité. Toute isométrie du plan transforme les droites en droites.

Symétrie par rapport à une droite. Droites perpendiculaires. Plus courte distance d'un point à une droite. Les perpendiculaires à une droite D sont parallèles entre elles, toute droite parallèle à une perpendiculaire à D est perpendiculaire à D. Existence et unicité de la perpendiculaire à D passant par un point de D.

Médiatrice d'un segment $[p,q]$ (p et q distincts) : perpendiculaire à $[p,q]$ en son milieu ; ensemble des points équidistants de p et q. Axe de symétrie d'un triangle isocèle. Rectangle : ses deux axes de symétrie et son centre de symétrie.

Bissectrice de deux demi-droites (axe de symétrie de la figure).

Produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Théorème de Pythagore et sa réciproque.

Coordonnées dans un repère orthonormé : expression de la distance de deux points, équation d'un cercle, intersection de cercles et droites.

Problèmes de construction utilisant la règle et le compas.

Angles. - On considère seulement des secteurs angulaires (intersection de deux demi-plans). On admet qu'un secteur angulaire peut être mesuré à l'aide de la longueur de l'arc du cercle-unité contenu dans le secteur (mesure en radians). Autres unités de mesure : degré, grade. On appelle "angle de deux demi-droites" la mesure du secteur angulaire qu'elles définissent ; l'angle est donc un nombre (une fois choisie l'unité de mesure). Invariance de l'angle par isométrie. Somme des angles d'un triangle. Sinus et cosinus d'un angle : usage des tables.

III. - OBSERVATIONS DE FIGURES SIMPLES DE L'ESPACE.

(On se borne à des observations, sans aucune démonstration)

Points, droites et plans, leurs relations mutuelles. Tous les plans de l'espace sont isométriques.

Produit scalaire de deux vecteurs (d'origine 0) ; on admet que

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}.$$

Repère orthonormé ayant un axe "vertical". Distance de deux points dans un tel repère.

Plus courte distance de deux droites horizontales.

Calcul de longueurs dans les polyèdres simples et dans la sphère.

ANNEXE A

Une façon d'exposer le programme de géométrie des classes de quatrième et troisième

par Henri CARTAN

Cette annexe est destinée aux professeurs qui auront à enseigner ce programme, et non pas aux élèves.

Elle a pour but de présenter un exposé cohérent, sans lacune logique, par des voies aussi simples que possible, et en évitant d'introduire des notions abstraites lorsqu'on peut s'en passer.

Il reviendra au professeur de décider quelles idées il en retiendra en vue de son enseignement, et de quelle manière elles pourront être présentées aux élèves.

GEOMETRIE DE LA CLASSE DE QUATRIEME

1 Le plan.

La distance d(p,q) de deux points p et q du plan se mesure avec une règle graduée (par exemple graduée en centimètres) ; d(p,q) est un nombre réel $\geqslant 0$, qui est nul si et seulement si $p = q$, et on a $d(p,q) = d(q,p)$.

Idéalisation de la règle graduée : on peut l'imaginer indéfiniment prolongée dans les deux sens, et munie de graduations de plus en plus fines, ce qui permet de faire correspondre à tout point de la règle graduée un nombre réel, et vice-versa. Bref, on pourra identifier idéalement la règle graduée à l'ensemble **R** des nombres réels.

2 Les droites du plan

On peut déplacer la règle graduée dans le plan. Chacune de ses positions possibles définit une droite du plan. Et l'on constate expérimentalement (et on admet) que par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule.

Repérage des points d'une droite D du plan : en faisant coïncider la règle graduée avec une droite D du plan on définit une *bijection* f de D sur **R** ; chaque point de D est alors "repéré" par un nombre réel f(p). Une telle bijection f *conserve les distances :* si p et q sont deux points de D, la distance d(p,q) est égale à $|f(p) - f(q)|$.

Mais une telle bijection n'est pas unique : tout d'abord, on peut "faire glisser" la règle graduée le long de la droite D ; cela revient à remplacer la bijection f par une bijection g telle que

$$g(p) = f(p) + a\ ,$$

où $a \in \mathbf{R}$ est un nombre fixe (indépendant de p). D'autre part,

$$h(p) = -f(p) + a$$

définit aussi une bijection h qui conserve les distances (on l'obtient en "retournant" la règle graduée). On pourra admettre (quoique cela puisse se démontrer) que les deux procédés précédents fournissent *toutes* les bijections de D sur $\mathbf{R}$ qui conservent les distances.

"*Sens de parcours*" (ou "orientation") de D défini par une bijection $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ qui conserve les distances : on dit qu'un point p de D est *à gauche* d'un point q de D si $f(p) \leqslant f(q)$. (La relation "p à gauche de q" ainsi définie est une relation d'ordre sur D, déduite de la relation d'ordre naturelle de $\mathbf{R}$ au moyen de la bijection f). Si $g(p) = f(p) + a$ pour tout $p \in D$, la bijection g définit le même sens de parcours sur D. Si $h(p) = -f(p) + a$ pour tout $p \in D$, la bijection h définit sur D une orientation opposée à celle définie par f.

Choisissons une bijection $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ qui conserve les distances. Soit p un point de D ; on définit les deux *demi-droites* d'origine p : l'une se compose des point $q \in D$ tels que $f(q) \leqslant f(p)$, l'autre des points q tels que $f(q) \geqslant f(p)$. Cette définition ne dépend pas du choix de f. L'intersection de ces deux demi-droites est réduite au point p.

Si p et q sont deux points distincts de D, on définit le *segment* [p,q] d'extrémités p et q comme suit : c'est l'intersection de la demi-droite d'origine p qui contient q, et de la demi-droite d'origine q qui contient p. Supposons par exemple que $f(p) < f(q)$; alors les points du segment [p,q] sont les points $r \in D$ tels que

$$f(p) \leqslant f(r) \leqslant f(q).$$

Par extension, on définit aussi le segment [p,q] lorsque $p = q$: il se compose du seul point p.

Si p, q, r sont trois points distincts de D, une et une seule des trois relations suivante a lieu :

$$p \in [q,r], \quad q \in [p,r], \quad r \in [p,q].$$

Si $r \in [p,q]$, on dit que r est *entre* p et q.

On appelle *longueur* d'un segment de droite la distance de ses extrémités.

Mesure algébrique d'un bipoint (p,q) sur une droite orientée.

On définit une orientation de D en choisissant une bijection $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ qui conserve les distances. On appelle *mesure algébrique* du bipoint (p,q) le nombre $\overline{pq}$ défini par la relation suivante :

$$\overline{pq} = f(q) - f(p).$$

Il ne dépend pas du choix de f, car si on remplace f par une autre bijection g définissant la même orientation, on a

$$g(p) = f(p) + a, \ g(q) = f(q) + a,$$

donc $g(q) - g(p) = f(q) - f(p)$. On notera que si on changeait l'orientation de D, la mesure algébrique pq du bipoint (p,q) serait remplacée par le nombre opposé. Les relations

$$\overline{pq} + \overline{qr} + \overline{rp} = 0 \text{ (Chasles)}, \ \overline{qp} = -\overline{pq}$$

sont évidentes. On remarque que la distance d(p,q) est égale à $|\overline{pq}|$.

Exercice : pour qu'un point $r \in D$ appartienne au segment [p,q], il faut et il suffit que $\overline{pr}$ et $\overline{rq}$ aient le même signe. En déduire que les points du segment [p,q] sont les $r \in D$ tels que

$$d(p,q) = d(p,r) + d(r,q)$$

Si on choisit un point 0 (appelé "origine") sur une droite D orientée, tout point $p \in D$ est déterminé par le nombre réel $\overline{Op}$, appelé *abscisse* de p. Il existe sur D un point et un seul d'abscisse donnée.

Milieu du segment. - Si $p \neq q$, il existe, sur la droite passant par p et q, un unique point m "équidistant" de p et q, c'est-à-dire tel que $d(m,p) = d(m,q)$. Ce point appartient au segment [p,q], et on l'appelle le *milieu* du segment.

Démonstration : on veut $\overline{pm} = \pm \overline{mq}$. Or $\overline{pm} = -\overline{mq}$ est impossible, car cela entraînerait $\overline{pq} = 0$, contrairement à l'hypothèse $p \neq q$. Donc m est défini par $\overline{pm} = \overline{mq}$, ce qui entraîne qu'un tel point m (s'il existe) appartient au segment [p,q]. Utilisons une bijection $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui conserve les distances ; la relation $\overline{pm} = \overline{mq}$ équivaut à

$$f(m) - f(p) = f(q) - f(m), \text{ d'où } f(m) = \frac{1}{2}(f(p) + f(q)),$$

ce qui détermine m. Ainsi, quelle que soit l'orientation choisie sur D et l'origine choisie, l'abscisse du milieu m est la *demi-somme* des abscisses de p et de q.

3 Demi-plans définis par une droite

Donnons d'abord une définition : un sous-ensemble A du plan est dit *convexe* si, quels que soient les points p et q de A, le segment $[p,q]$ est contenu dans A. (Par exemple, tout segment de droite est convexe).

On pose l'axiome suivant : quelle que soit la droite D du plan, le complémentaire de D est réunion de deux ensembles convexes non vides Π_1 et Π_2, disjoints, jouissant de la propriété suivante : chaque fois que $p \in \Pi_1$ et $q \in \Pi_2$, le segment $[p,q]$ rencontre D.

Ainsi, pour que deux points p et q pris hors de D soient tels que le segment $[p,q]$ ne rencontre pas D, il faut et il suffit que p et q appartiennent tous deux à Π_1, ou appartiennent tous deux à Π_2. Les ensembles Π_1 et Π_2 s'appellent les deux *demi-plans* (ouverts) définis par D.

Exercice : la relation entre p et q :

$$[p,q] \cap D = \phi$$

est une relation d'équivalence dans le complémentaire de D ; Π_1 et Π_2 sont les deux classes d'équivalence.

4 Symétrie par rapport à un point a du plan.

Elle associe à tout point p l'unique point p' tel que a soit le milieu du segment $[p, p']$. (Si $p = a$, on convient que $p' = a$). Le seul *point fixe* p (c'est-à-dire tel que $p' = p$) est le point a. On pourra noter σ_a cette symétrie. On observe que si $p' = \sigma_a(p)$, on a $p = \sigma_a(p')$. Autrement dit, σ_a est une bijection égale à la bijection réciproque ; ou encore, $\sigma_a \circ \sigma_a$ est la transformation identique.

Exercice : si D est une droite passant par a, la symétrie σ_a échange les deux demi-plans définis par D.

On pose l'*axiome* suivant : la symétrie σ_a possède les deux propriétés que voici :

(i) σ_a conserve les distances : $d(\sigma_a(p), \sigma_a(q)) = d(p,q)$.

(ii) si p, q, r sont trois points alignés, il en est de même de $\sigma_a(p)$, $\sigma_a(q)$ et $\sigma_a(r)$ (autrement dit, la symétrie σ_a transforme les droites en droites).

Remarque : si on avait, dès le début, posé l'axiome qui dit que l'on a l'inégalité stricte $d(p,q) < d(p,r) + d(r,q)$ chaque fois que p,q,r ne sont *pas* alignés, la condition (ii) serait une conséquence de (i), car toute isométrie (transformation qui conserve les distances) transforme automatiquement les droites en droites. Mais le raisonnement à faire semble un peu abstrait pour des élèves de quatrième, c'est pourquoi il est sans doute préférable de poser ici les deux conditions (i) et (ii).

Symétrique d'une figure : si A est un sous-ensemble du plan, on note σ_a (A) l'ensemble des points σ_a(p), où p parcourt A ; l'ensemble σ_a(A) s'appelle le symétrique de l'ensemble A par rapport à a.

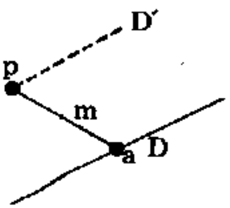
Exercice : le symétrique d'un segment de droite est un segment de droite. Le symétrique d'une demi-droite est une demi-droite.

5 Parallélisme

Soient D et D′ deux droites du plan. Trois cas sont possibles : ou bien l'intersection D ∩ D′ est vide, ou bien D ∩ D′ se compose d'un seul point, ou bien enfin D = D′ . On dit que D et D′ sont *parallèles* si l'on est dans le premier ou le troisième cas ; dire que D et D′ ne sont *pas* parallèles revient donc à dire que leur intersection se compose d'un seul point.

Proposition : la symétrie σ_a transforme toute droite en D en une droite D′ parallèle à D.

Démonstration : on va montrer que si D ∩ D′ n'est pas vide, on a D = D′ . Or soit p ∈ D ∩ D′ ; si p = a , il est évident que D′ = D. Si p ≠ a, on a aussi σ_a (p) ∈ D ∩ D′, et comme p et σ_a (p) sont distincts, on conclut que D = D′ .



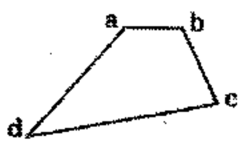
Proposition : étant donnés une droite D et un point p, il existe au moins une droite parallèle à D passant par p.

Démonstration : c'est évident si p ∈ D. Si p ∈ D, soit a un point de D, et soit m le milieu du segment [a, p]. La symétrie σ_m transforme D en une droite D′ parallèle à D, et D′ contient le point p (symétrique de a).

Axiome d'Euclide : étant donnés une droite D et un point p, il n'y a qu'*une seule* droite parallèle D et passant par p.

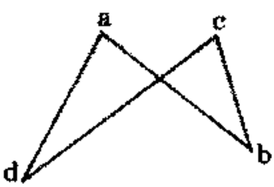
Autrement dit : si deux droites parallèles à D se rencontrent, elles sont confondues. Condition équivalente : si deux droites sont parallèles à D, elles sont parallèles entre elles.

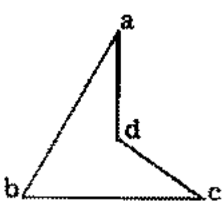
On en déduit que la relation de parallélisme est une *relation d'équivalence* dans l'ensemble des droites du plan. Une classe d'équivalence se compose de toutes les droites parallèles à une droite donnée D ; il en passe une par chaque point du plan. Une telle classe d'équivalence s'appelle une *direction de droite*.



6 Parallélogramme

Définissons d'abord ce qu'on entend par *quadrilatère* dans le plan. A la donnée d'une suite de 4 points du plan a,b,c,d associons les 4 segments [a,b], [b,c], [c,d], [d,a]

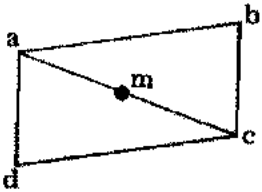




Ces segments s'appellent les *côtés* du quadrilatère qu'ils définissent ; les *sommets* du quadrilatère sont les points a,b,c,d. Les côtés [a,b] et [c,d] sont dits *opposés* ; de même les côtés [b,c] et [d,a]. Les sommets a et c sont dits opposés, de même les sommets b et d. On appelle *diagonales* du quadrilatère les deux segments [a,c] et [b,d] qui joignent les couples de sommets opposés. On notera que le même quadrilatère pourrait être défini par l'une quelconque des suite (a,b,c,d), (b,c,d,a), (c,d,a,b), (d,a,b,c,), (d,c,b,a), (c,b,a,d), (b,a,d,c), (a,d,c,b).

Le quadrilatère est dit *aplati* si les points a,b,c,d sont alignés.

Proposition : soit (a,b,c,d) un quadrilatère *non aplati* dont les côtés opposés sont *parallèles* (i.e : les droites ab et dc sont parallèles, les droites bc et ad sont parallèles). Alors les diagonales se coupent en leur milieu, et ce milieu commun m est centre de symétrie du quadrilatère (ici la symétrie σ_m transforme le quadrilatère en lui-même.



Démonstration : soit m le milieu du segment [a,c]. La symétrie σ_m échange a et c; elle transforme la droite ab en une droite parallèle qui passe par c, donc en la droite cd ; elle transforme la droite cb en une droite parallèle qui passe par a, donc en la droite ad. Elle transforme donc le point b (intersection des droites ab et cb) en le point d (intersection des droites cd et ad). Ainsi m est bien le milieu du segment [b,d]. Puisque la symétrie σ_m échange a et c et échange b et d, elle transforme le segment [a,b] en le segment [c,d], et réciproquement ; de même, elle transforme le segment [b,c] en le segment [d,a], et réciproquement. Ainsi m est un centre de symétrie du quadrilatère.

Réciproque : soit (a,b,c,d) un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu. Alors les côtés opposés sont parallèles. De plus, les côtés opposés ont même longueur. (En effet, soit m le milieu commun aux diagonales ; la symétrie σ_m transforme chaque côté en le côté opposé ; or on sait que cette symétrie transforme toute droite en une droite parallèle, et conserve les distances).

Définition : on appelle *parallélogramme* tout quadrilatère (aplati ou non) dont les diagonales ont même milieu.

Résumons les résultats obtenus : dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et ont même longueur. Réciproquement, un quadrilatère *non aplati* dont les côtés opposés sont parallèles est un parallélogramme.

Exercice : que peut-on dire d'un quadrilatère non aplati dont deux côtés opposés sont parallèles et ont même longueur ?

Caractérisation d'un parallélogramme aplati.

Soient a,b,c,d quatre points d'une même droite D, que nous orienterons.

Proposition. — Les relations

$$\overline{ab} = \overline{dc} \quad \text{et} \quad \overline{ad} = \overline{bc}$$

sont équivalentes. Chacune d'elles est nécessaire et suffisante pour que (a,b,c,d) soit un parallélogramme (aplati).

Démonstration : l'équivalence est immédiate : si $\overline{ab} = \overline{dc}$, on a $\overline{ad} = \overline{ab}+\overline{bd} = \overline{dc}+\overline{bd} = \overline{bc}$; de même, de $\overline{ad} = \overline{bc}$ on déduit $\overline{ab} = \overline{dc}$. Supposons maintenant que les segments [a,c] et [b,d] aient même milieu m, et montrons que $\overline{ab} = \overline{dc}$. On a en effet

$$\overline{ab} = \overline{am}+\overline{mb} = \overline{mc} + \overline{dm} = \overline{dc}.$$

Réciproquement si $\overline{ab} = \overline{dc}$, soit m le milieu de [b,d], défini par la relation $\overline{bm} = \overline{md}$; on a alors

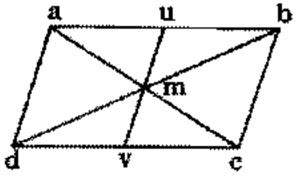
$$\overline{am} = \overline{ab}+\overline{bm} = \overline{dc}+\overline{md} = \overline{mc},$$

ce qui prouve que m est le milieu de [a,c].

Problème : construire un parallélogramme (a,b,c,d) connaissant les trois sommets a,b,c.

Solution : si a,b,c ne sont pas alignés, la paralléle à ab passant par c et la parallèle à bc passant par a ne sont pas parallèles entre elles, donc se coupent en un point unique d, qui est le quatrième sommet cherché. Si a,b,c sont sur une même droite D, le point d est défini par $\overline{ad} = \overline{bc}$.

Proposition : si par le centre de symétrie m d'un parallélogramme non aplati (a,b,c,d) on mène la droite parallèle aux côtés bc et ad, elle coupe chacun des segments [a,b] et [c,d] en son milieu.



En effet, soit u l'intersection de cette parallèle avec la droite ab, et soit v son intersection avec la droite cd. Le quadrilatère (a,u,v,d) est un parallèlogramme, donc d(a,u) = d(v,d,). D'autre part, les segments [u,b] et [v,d] sont symétriques par rapport à m, donc d(v,d) = d(u,b). On conclut d(a,u) = d(u,b), ce qui prouve que u est milieu de [a,b]. On montre de même que v est milieu de [c,d] .

Remarque 1. - La droite parallèle à bc et ad passant par le milieu u de [a,b] rencontre le segment [c,d] en son milieu v, et passe par le centre de symétrie m du parallélogramme.

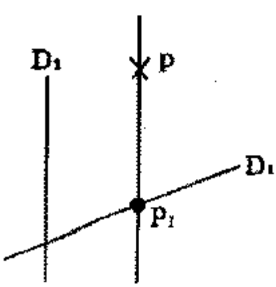
Remarque 2. - Le parallélogramme est déterminé par les points a,b,c qui sont les sommets d'un triangle. Par le milieu m du côté [a,c] on a mené la parallèle au côté [b,c], et on vient de voir qu'elle passe par le milieu u du côté [a,b]. On a ainsi prouvé

Proposition. - Soit un triangle (a,b,c). Si par le milieu du côté [a,c] on mène la parallèle au côté [b,c], elle coupe le côté [a,b] en son milieu.

Corollaire immédiat : la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

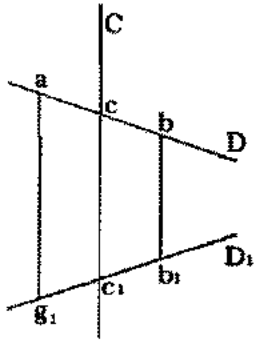
Exercice de construction : étant donné un segment [a,b], on se propose de construire le milieu u de ce segment *sans utiliser de règle graduée*, mais en utilisant seulement une règle et une équerre (pour tracer des parallèles). Par a et b on mène deux droites parallèles entre elles mais non parallèles à ab ; puis on les coupe par une parallèle à ab, distincte de le droite ab, ce qui donne les points d'intersection d et c (voir figure ci-dessus). On trace les diagonales ac et bd du parallélogramme (a,b,c,d) ; elles se coupent en m, et enfin par m on mène la parallèle à la droite bc, qui coupe le segment [a,b] au milieu cherché u.

7 Projection du plan sur une droite D_1 parallèlement à une droite D_2 (non parallèle à D_1).



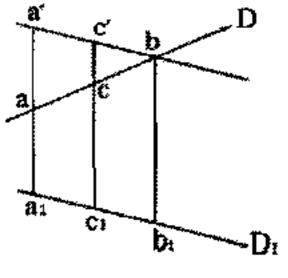
Par chaque point p du plan il passe une seule droite parallèle à D_2 ; elle rencontre D_1 en un point p_1. Notons f_1 l'application du plan Π sur la droite D_1, qui à p associe p_1. On l'appelle la *projection* de Π sur D_1 parallèlement à D_2. Si D est une droite non parallèle à D_2, f_1 définit une *bijection* de D sur D_1, notée encore f_1. On va étudier les propriétés de cette bijection.

1° Si a et b sont deux points distincts de D, et a_1 et b_1 désignent leurs projections sur D_1 , f_1 applique bijectivement le segment [a,b] sur le segment [a_1 , b_1].



Démonstration : il suffit de montrer que si c est un point du segment [a,b], distinct de a et de b, sa projection c_1 est un point du segment [a_1 , b_1] (évidemment distinct de a_1 et b_1) ; en effet, le même raisonnement marchera en sens inverse. Soit C la parallèle à D_2 passant par c (et par c_1). Considérons les deux demi-plans définis par la droite C ; puisque le segment [a,b] rencontre C en c, a et b sont dans deux demi-plans différents. Or [a,a_1] ne rencontre pas C, donc a et a_1 sont dans un même demi-plan, et de même b et b_1 sont dans un même demi-plan. Il s'ensuit que a_1 et b_1 sont dans des demi-plans différents, donc le segment [a_1 , b_1] rencontre C ; le point de rencontre étant c_1 , on conclut bien que $c_1 \in$ [a_1 ,b_1] .

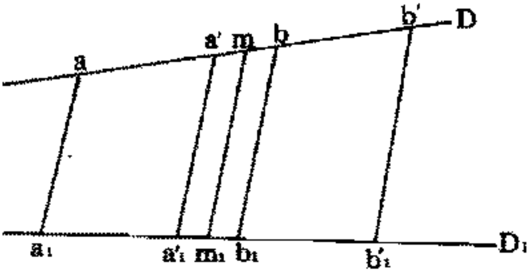
2° si c est le *milieu* du segment [a,b] porté par D, sa projection c_1 est le milieu du segment [a_1 , b_1] .



Démonstration : la parallèle à D_1 passant par b rencontre en a' la parallèle à D_2 passant par a, et en c' la parallèle à D_2 passant par c. La proposition du n° 6, appliquée au triangle (b,a,a'), montre que c' est milieu de $[a', b']$. Dans le parallélogramme (a',b,b_1,a_1), la droite $c'c_1$ est parallèle au côté bb_1 et passe par le milieu c' de $[a',b]$, donc elle rencontre le segment $[a_1, b_1]$ en son milieu c_1.

3° Orientons chacune des droites D et D_1. Si deux bipoints (a,b) et (a',b') (où a,b,a',b' sont sur D) ont même mesure algébrique sur D orientée (donc $\overline{ab} = \overline{a'b'}$), alors les bipoints (a_1,b_1) et (a'_1, b'_1) ont même mesure algébrique sur D_1 : $\overline{a_1 b_1} = \overline{a'_1 b'_1}$.

Démonstration : puisque $\overline{ab} = \overline{a'b'}$, le quadrilatère (a,b,b',a') est un parallélogramme (aplati), et donc $[a,b']$ et $[a',b]$ ont même milieu m. Par projection, $[a_1, b'_1]$ et $[a'_1, b_1]$ ont même milieu m_1 (d'après 2°), donc (a_1,b_1,b'_1,a'_1) est un parallélogramme, et par suite $\overline{a_1 b_1} = \overline{a_1 b_1}$.

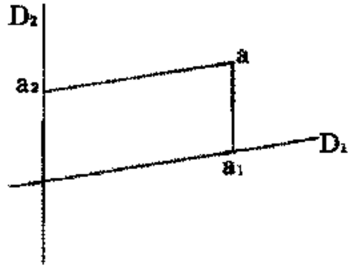


4° (Théorème de Thalès). — Soient $a,b,a'b'$ des points de D, et soient a_1, b_1, a'_1, b'_1 leurs projections sur D_1. Si le quotient des mesures algébriques $\overline{a'b'}/\overline{ab}$ est égal à $t \in \mathbb{R}$ (ce qui signifie que $\overline{a'b'} = t.\overline{ab}$), alors le quotient des mesures algébriques $\overline{a_1 b_1}/\overline{a_1 b_1}$ est aussi égal à t.

Démonstration : on vient le voir lorsque $t = 1$. On le prouve ensuite lorsque t est un entier positif, puis lorsque t est un entier négatif. Ensuite on le prouve lorsque t est quotient de deux entiers (c'est-à-dire si t est rationnel). Enfin on admettra le théorème lorsque t est un nombre réel quelconque (passage à la limite, compte tenu du résultat 1° ci-dessus).

Exercice : partager un segment de droite en n parties égales (n entier > 0) en utilisant la règle (non graduée) et le compas.

8 Système de deux projections.



Nous avons appelé f_1 la projection du plan Π sur une droite D_1 parallèlement à une droite D_2 (non parallèle à D_1). On peut de même considérer la projection f_2 de Π sur D_2 parallèlement à D_1. A chaque point a du plan on associe ainsi un couple (a_1, a_2) de points, où $a_1 = f_1(a) \in D_1$ et $a_2 = f_2(a) \in D_2$.

Il résulte du point 2° du n° 7 que le *milieu* c d'un segment [a,b] où a et b sont deux points du plan) est l'*unique* point du plan dont les projections c_1 et c_2 sont respectivement le milieu de $[a_1, b_1]$ et de $[a_2, b_2]$ (en notant a_1 et a_2 les projections de a, et b_1 et b_2 les projections de b).

Si (a,b,c,d) est un parallélogramme, chacune de ses projections (a_1, b_1, c_1, d_1) et (a_2, b_2, c_2, d_2) est un parallélogramme (aplati). Réciproquement, si les deux projections d'un quadrilatère (a,b,c,d) sont des parallélogrammes (aplatis), ce quadrilatère est un parallélogramme, car ses diagonales ont même milieu en vertu de ce qui précède.

9 Equipollence de deux bipoints. Translation.

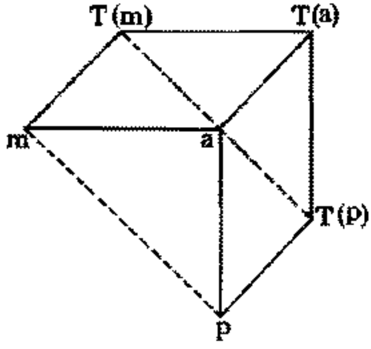
Définition : deux bipoints (a,a') et (b,b') sont dits *équipollents* si (a,a',b',b) est un parallélogramme. Condition équivalente : (a',a) et (b',b) sont équipollents. Autre condition équivalente : (a,b) et (a',b') sont équipollents.

D'après le n° 8, pour que (a,a') et (b,b') soient équipollents, il faut et il suffit que les deux projections (a_1, a'_1, b'_1, b_1) et (a_2, a'_2, b'_2, b_2) soient des parallélogrammes (aplatis). Pour cela, il faut et il suffit que

$$\overline{a_1 a'_1} = \overline{b_1 b'_1} \text{ et } \overline{a_2 a'_2} = \overline{b_2 b'_2} .$$

On en déduit aussitôt : la relation d'équipollence est une *relation d'équivalence* entre bipoints.

Donnons-nous un bipoint (a,a'). A chaque point m du plan associons l'unique point m' tel que (m,m') soit équipollent à (a,a') (construction du 4e sommet d'un parallélogramme). Notons $T(m)$ ce point ; on a donc $a' = T(a)$. On définit ainsi une application T du plan dans lui-même, appelée *translation* et qui jouit de la propriété suivante : quels que soient les points m et p, les bipoints $(m, T(m))$ et $(p,T(p))$ sont équipollents (en effet, chacun d'eux est équipollent à $(a, T(a))$, et deux bipoints équipollents à un même bipoint sont équipollents, puisque la relation d'équipollence est une relation d'équivalence).



Réciproquement, si une application T du plan dans lui-même est telle que, quels que soient les points m et p, les bipoints $(m,T(m))$ et $(p,T(p))$ soient équipollents, T est une translation.

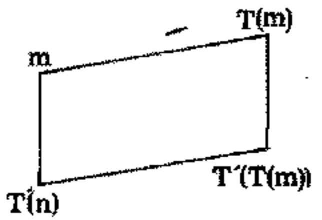
On peut encore caractériser une translation par la condition suivante : c'est une application T du plan dans lui-même telle que, quels que soient les points m et p, le bipoint (m,p) soit équipollent à son transformé $(T(m), T(p))$.

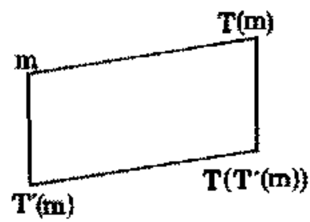
La translation définie par le bipoint (a,a) est l'application identique. Si T est la translation définie par le bipoint (a,a'), et T' la translation définie par le bipoint (a',a), on voit que la relation $m' = T(m)$ entraîne $m = T'(m')$, et réciproquement ; donc T et T' sont des *bijections* réciproques l'une de l'autre.

Propriétés d'une translation T : les segments (m,p) et $(T(m), T(p))$ ont même longueur (côtés opposés d'un parallélogramme). Donc *la translation* T *conserve les distances*. De plus T *transforme* *toute droite en une droite parallèle* : en effet, si m,p,q sont trois points alignés (distincts), les points T(m), T(p), T(q) sont alignés, car les segments [T(m), T(p)] et [T(p), T(q)] sont parallèles, puisqu'ils sont respectivement parallèles aux segments [m,p] et [p,q].

La composée de deux translations T et T' est une translation : il suffit de montrer que les bipoints (m,p) et (T'(T(m)), T'(T(p))) sont équipollents, quels que soient les points m et p. Or (m,p) est équipollent à (T(m), T(p)), et ce dernier est équipollent à (T'(T(m)), T'(T(p))).

Montrons maintenant que les deux translations T'∘ T et T∘T' sont égales. En effet, chacun des quadrilatères (m,T(m), T'(T(m)), T'(m)) et (m,T(m), T(T'(m)), T'(m)) est un parallélogramme, donc T'(T(m)) = T(T'(m)). Ainsi les translations forment un *groupe commutatif* de bijections du plan.





10 Le plan vectoriel.

(Ce qui suit a pour but de présenter les "vecteurs" de manière moins abstraite que comme classes d'équivalence de bipoints équipollents).

Choisissons dans le plan un point 0, appelé *origine*. Ce choix permet d'associer à tout point u le bipoint (0,u) ; un tel bipoint sera noté $\vec{u}$, et prend le nom de *vecteur* . Graphiquement, on a l'habitude de représenter le vecteur u en dessinant le segment [0,u] et en marquant une flèche dont la pointe est en u. On appelle longueur du vecteur $\vec{u}$ (ou *norme* de $\vec{u}$) la distance d(0,u).

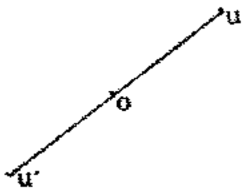
Tout vecteur $\vec{u}$ définit une translation : celle définie par le bipoint (0,u) qui transforme 0 en u. Notons-la $T_{\vec{u}}$. Inversement toute translation T définit un vecteur $\vec{u}$, à savoir celui défini par le point $u = T(0)$; on l'appelle le *vecteur de la translation*. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des vecteurs sur l'ensemble des translations.

Addition des vecteurs : on définit la *somme* de deux vecteurs u et v comme suit : c'est le vecteur w tel que

$$T_{\vec{w}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} (= T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}) .$$

Ce vecteur $\vec{w}$ se note $\vec{u}+\vec{v}$. Ainsi l'addition des vecteurs ne fait que traduire la composition des translations. Puisque les translations forment un groupe commutatif, l'addition des vecteurs définit sur l'ensemble des vecteurs une loi de groupe commutatif (traduire cela en formules). Interprétation géométrique : le point w est le quatrième sommet du parallélogramme dont deux côtés sont (0,u) et (0,v).

L'élément neutre de l'addition est le vecteur $\vec{0}$.



On note $-\vec{u}$ le vecteur $\vec{u}'$ tel que $\vec{u}+\vec{u}' = \vec{0}$, et on l'appelle le vecteur *opposé* à $\vec{u}$. On observe que les points u et u' sont symétriques par rapport à l'origine 0.

Etant donnés deux points p et q, ils définissent un vecteur, noté $\overrightarrow{pq}$: c'est le vecteur de la translation telle que $q = T(p)$. Alors l'équipollence de deux bipoints (p,q) et (p',q') se traduit par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'} .$$

Si on effectue successivement la translation qui amène p en q et celle qui amène q en r, on obtient la translation qui amène p en r ; d'où la relation vectorielle.

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr},$$

et de plus on a $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$. On notera que

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0q} - \overrightarrow{0p} = \vec{q} - \vec{p}.$$

Produit d'un vecteur par un nombre.

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. On va définir un nouveau vecteur, noté $\overrightarrow{ku}$, et appelé produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, on pose $\overrightarrow{ku} = \vec{0}$ quel que soit le nombre k. Supposons maintenant $\vec{u} \neq 0$, et soit D la droite contenant les points 0 et u ; orientons D. Il existe sur D un unique point v tel que

$$\overline{0v} = k.\overline{0u}.$$

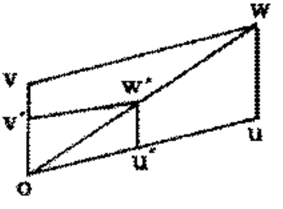
et ce point v ne change pas si on change l'orientation de D. Soit $\vec{v} = (0,v)$ le vecteur correspondant ; c'est le vecteur $\overrightarrow{ku}$, par définition.

Si k = 1, on a $k\vec{u} = \vec{u}$; si k = 0, on a $k\vec{u} = \vec{0}$. Si k = n (entier > 0), on a $n\vec{u} = \vec{u} + \ldots + \vec{u}$ (n fois).

Propriété fondamentale : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et k un nombre ; on a

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}.$$

Démonstration : c'est évident si les points 0, u et v sont alignés (on dit alors que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires*). Supposons donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires, et soit $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$. Le quadrilatère (0,u,w,v) est un parallélogramme (non aplati). Soit $\vec{w}'$ le produit $k\vec{w}$. Le point w' (qui est sur la droite 0w) se projette en u' sur la droite ou parallèlement à 0v, et se projette en v' sur la droite Ov parallèlement à Ou. On a évidemment $\vec{w}' = \vec{u}' + \vec{v}'$, puisque (O, u', w', v') est un parallélogramme. Il reste à montrer que $\vec{u}' = k\vec{u}$ et $\vec{v}' = k\vec{v}$; or c'est une conséquence immédiate du théorème de Thalès.



Autres formules : $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$, $(kk')\vec{u} = k(k'\vec{u})$. Elles sont évidentes à partir de la définition (et des propriétés des opérations dans R).

Exemple : On exprime que m est le milieu d'un segment $[u,v]$ en écrivant :

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \ .$$

Exercice : les points du segment $[u,v]$ sont les x tels que $\overrightarrow{ux} = t(\overrightarrow{uv})$, où t est un nombre réel compris entre 0 et 1. En écrivant $\overrightarrow{ux} = \vec{x} - \vec{u}$, $\overrightarrow{uv} = \vec{v} - \vec{u}$, on obtient

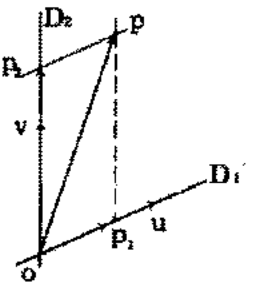
$$\vec{x} = (1-t)\vec{u} + t\vec{v} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \ .$$

Base du plan vectoriel.

Théorème. Soient donnés deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour tout vecteur $\vec{p}$, il existe deux nombres réels x et y tels que

$$\vec{p} = x\vec{u} + y\vec{v} \ ,$$

et ce couple (x,y) est unique.



Démonstration : soit D_1 la droite contenant 0 et u, et soit D_2 la droite contenant 0 et v . Ces droites sont distinctes. Projetons le point p en p_1 sur D_1 parallèlement à D_2 , et projetons p en p_2 sur D_2 parallèlement à D_1 . Le vecteur $\vec{p}_1$ est de la forme $x\vec{u}$ (produit de $\vec{u}$ par un nombre réel x), et $\vec{p}_2$ est de la forme $y\vec{v}$. Comme on a $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, on en déduit $\vec{p} = x\vec{u} + y\vec{v}$, comme annoncé. Il reste à prouver l'unicité du couple (x,y). Or supposons que l'on ait aussi $\vec{p} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$; par soustraction, on en déduit

$$\vec{0} = (x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v} \ .$$

Ceci oblige $x - x'$ et $y - y'$ à être nuls, sinon les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaires, contrairement à l'hypothèse.

Dans la situation du théorème précédent, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une *base* du plan vectoriel. Les nombres x et y s'appellent les *coordonnées* du vecteur $\vec{p}$ *relativement à cette base*. On les appelle aussi les coordonnées du point p (relativement à cette base).

La donnée d'une *base* $(\vec{u}, \vec{v})$ définit donc une bijection du plan sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (ensemble des couples (x,y) de nombres réels).

Soit toujours $(\vec{u}, \vec{v})$ une base du plan vectoriel. Soient $\vec{p}$ et $\vec{p}'$ deux vecteurs, et k un nombre réel. Si on a

$$\vec{p} = x\vec{u} + y\vec{v}, \quad \vec{p}' = x'\vec{u} + y'\vec{v},$$

on en déduit

$$\vec{p} + \vec{p}' = (x+x')\vec{u} + (y+y')\vec{v}, \quad k\vec{p} = (kx)\vec{u} + (ky)\vec{v}.$$

11 *Equation d'une droite*. Ayant choisi une base $(\vec{u}, \vec{v})$, on se demande à quelle condition soivent satisfaire les coordonnées x et y d'un point p pour que p appartienne à une droite donnée D.

Supposons D définie par deux points distincts : p_0 de coordonnées x_0, y_0, et p_1 de coordonnées x_1, y_1. Les points p de la droite D qui les joint sont ceux tels que

$$\overrightarrow{p_0 p} = t(\overrightarrow{p_0 p_1}), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cette équation vectorielle se traduit par deux équations :

$$x - x_0 = t(x_1 - x_0), \quad y - y_0 = t(y_1 - y_0).$$

Pour que le points de coordonnées x et y appartienne à D, il faut et il suffit que ces deux équations en t soient compatibles. Or $x_1 - x_0$ et $y_1 - y_0$ ne sont pas nuls tous deux. Supposons par exemple $x_1 - x_0 \neq 0$; la première équation donne $t = (x - x_0) / (x_1 - x_0)$, et si on porte cette valeur dans la seconde on trouve la condition nécessaire et suffisante cherchée :

$$(x_1 - x_0)(y - y_0) = (y_1 - y_0)(x - x_0).$$

Le même résultat est valable si $y_1 - y_0 \neq 0$. Telle est l'équation de la droite D ; elle a la forme

$$ax + by = c, \tag{1}$$

où les coefficients a et b *ne sont pas nuls tous deux*.

Réciproquement, toute équation de la forme (1), où a et b ne sont pas nuls tous deux, est l'équation d'une droite. En effet, supposons par exemple $a \neq 0$; le point de coordonnées $(c/a, 0)$ et le point de coordonnées $((c-b)/a, 1)$ satisfont à l'équation (1), et on vérifie que la droite passant par ces deux points a pour équation (1).

Cas particuliers : droite $x = x_0$, droite $y = y_0$, droite passant par l'origine $(y = kx)$.

Inéquation d'un demi-plan. Soit D une droite d'équation $ax + by = c$. Les deux demi-plans définis par D sont composés des points dont les coordonnées x,y satisfont à

$$ax + by < c \quad , \quad \text{resp.} \quad ax + by > c \quad .$$

A titre d'exercice, on peut le démontrer en vérifiant que chacun des ensembles définis par ces inégalités est convexe, et que le segment joignant un point (x_0, y_0) tel que $ax_0 + by_0 < c$ et un point (x_1, y_1) tel que $ax_1 + by_1 > c$ contient un point (x,y) tel que $ax + by = c$.

12 *Exercices divers.*

Equation d'une translation : la translation définie par un vecteur $\vec{a}$ associe à tout point p le point p' tel que

$$\overrightarrow{pp'} = \vec{a}\ , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \vec{p'} = \vec{p} + \vec{a}\ ,$$

Si l'on choisit une base $(\vec{u}, \vec{v})$, soient x_0 et y_0 les coordonnées du vecteur $\vec{a}$, x et y celles de $\vec{p}$, x' et y' celles de $\vec{p'}$, alors la translation est définie par

$$x' = x + x_0 \quad , \quad y' = y + y_0 \ .$$

Equation d'une symétrie par rapport à un point : si p et p' sont symétriques par rapport au point a, on a

$$\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{p'}) \quad , \quad \text{d'où}$$

$$\vec{p'} = -\vec{p} + 2\vec{a}\ .$$

Si maintenant p'' est symétrique de p' par rapport à b, on a

$$\vec{p''} = -\vec{p'} + 2\vec{b}\ .$$

On en déduit $\vec{p''} = \vec{p} + 2(\vec{b} - \vec{a}) = p + 2(\overrightarrow{ab})$. Donc l'application composée de la symétrie par rapport à a et de la symétrie par rapport à b est la translation de vecteur $2(\overrightarrow{ab})$. (Figure!).

Barycentres.

Soient e et b deux points distincts. On sait que les points p de la droite qui les joint sont définis par

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \text{ , où } t \in \mathbb{R} \text{ .}$$

On peut encore écrire $\vec{p} = \alpha\, a + \beta\, b$, où α et β sont deux nombres réels *dont la somme est un*. On dit que p est le *barycentre* des points a et b affectés des "masses" α et β (dont la somme est 1). Cette relation équivaut à $\alpha\,(\overrightarrow{pa}) + \beta\,(\overrightarrow{pb}) = \vec{0}$.

On peut généraliser à plusieurs points, par exemple trois : soient a,b,c trois points, et α,β,γ trois nombres dont la somme est égale à 1 ; le barycentre des points a,b,c affectés des masses α,β,γ est le point p défini par

$$\vec{p} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} \text{ .}$$

Cette relation équivaut à :

$$\alpha\,(\overrightarrow{pa}) + \beta\,(\overrightarrow{pb}) + \gamma\,(\overrightarrow{pc}) = 0 \text{ .}$$

Par exemple, soient a,b,c les sommets d'un triangle (i.e. trois points non alignés). Prenons $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$. Le point p défini par

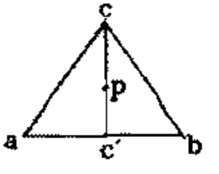
$$\vec{p} = \frac{1}{3}\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

peut être construit de la façon suivante : on a

$$\vec{p} = \frac{2}{3}\,(\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})) + \frac{1}{3}\,\vec{c} \text{ ;}$$

le point c' tel que $\vec{c}' = \frac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b})$ est le milieu du segment [a,b].
Et p est barycentre des points c et c' , affectés des masses $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. On a donc

$$\overrightarrow{cp} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{cc'} \text{ .}$$



Ainsi le point p est sur la "médiane" joignant le sommet c au milieu c' du côté opposé, et se trouve aux 2/3 de cette médiane. On en déduit notamment que p appartient aux trois médianes.

Homothétie. Par définition, l'homothétie de *centre* a et de *rapport* $k \in \mathbb{R}$ est l'application qui, à chaque point p, associe le point p' défini par

$$\overrightarrow{ap'} = k(\overrightarrow{ap}).$$

(C'est l'identité si $k = 1$, la symétrie par rapport à a si $k = -1$).

On a donc

$$\vec{p}' = k\vec{p} + (1-k)\vec{a}.$$

Si l'on a choisi une base (u,v), soient x_0, y_0 les coordonnées du point a, x et y celles de p, x' et y' celles de p'. On a

$$x' = kx + (1-k)x_0 \quad , y' = ky + (1-k)y_0 \; .$$

Composition des homothéties soit :

$$\vec{p}'' = k'\vec{p}' + (1-k')\vec{b}$$

une autre homothétie. On a

$$\vec{p}'' = kk'\,\vec{p} + k'\,(1-k)\,\vec{a} + (1-k')\vec{b}\;.$$

Cette transformation est une translation si $kk' = 1$. Le vecteur de cette translation est $(1-k')\,\overrightarrow{ab}$. Si $kk' \neq 1$, on a

$$\vec{p}'' = kk'\vec{p} + (1-kk')\vec{c},$$

où le point c est défini par

$$c = \frac{k' - kk'}{1 - kk'}\,\vec{a} + \frac{1 - k'}{1 - kk'}\vec{b}\;.$$

Le point c est le "centre" de l'homothétie composée : c'est un *barycentre* de a et b, donc il est *aligné avec* a *et* b.

GEOMETRIE DE LA CLASSE DE TROISIEME

1 Définition : on appelle *isométrie* du plan Π une transformation bijective de Π sur Π qui conserve les distances.

Exemples : on a vu en quatrième que la symétrie par rapport à un point est une isométrie, et que toute translation est une isométrie.

Inégalité triangulaire : on pose l'axiome suivant : si p,q,r sont trois points du plan, on a

$$d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q),$$

et on suppose que *l'égalité n'a lieu que si* p,q,r *sont alignés* (ce qui implique alors que r appartient au segment de droite [p,q]).

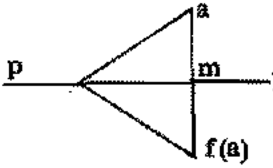
Avec cet axiome, on peut prouver que *toute isométrie transforme les droites en droites, et les segments de droite en segments de droite*. (Démonstration : soient p,q,r trois points distincts, mais alignés ; alors on a par exemple $r \in [p,q]$. Si f est une isométrie on a $d(f(p),f(q)) = d(f(p),f(r)) + d(f(r),f(q))$, donc f(r) appartient au segment [f(p),f(q)].)

2 Symétrie par rapport à une droite D.

Le pliage d'une feuille de papier suggère l'axiome suivant :

Axiome : pour toute droite D, il existe une isométrie qui laisse fixes les points de D et échange les deux demi-plans définis par D.

Etudions une telle isométrie f. Soit a un point non situé sur D ; a et f(a) appartiennent à deux demi-plans différents, donc D rencontre le segment [a,f(a)]. Soit m l'intersection. On a $f(m) = m$, et puisque f conserve les distances, m est à la même distance de a et f(a). Ainsi m est le milieu du segment [a,f(a)]. Cherchons le point f(f(a)) : il est aligné avec f(a) et $f(m) = m$,



et m est milieu du segment [f(a),f(f(a))]. Donc f(f(a)) coïncide avec a. Ceci étant vrai pour tout $a \in D$ (et aussi lorsque $a \in D$), on voit que $f \circ f$ est l'application identique : l'application f est *involutive* (égale à la bijection réciproque).

Soit p un point de D autre que m. Il est à la même distance de a et de f(a) ; or $d(a,f(a)) < d(a,p) + d(p,f(a))$ à cause de l'inégalité triangulaire. En prenant la moitié des deux membres, on obtient

$$d(a,m) < d(a,p)$$

pour tout $p \in D$ distinct de m.

Le point m est donc l'*unique* point de D qui rend minimum la distance de a à un point de D. Ceci entraîne l'unicité de l'isométrie f laissant fixes les points de D et échangeant les deux demi-plans. Car si f_1 est une autre isométrie ayant les mêmes propriétés le milieu du segment $[a,f_1(a)]$ est encore m, d'où $f_1(a) = f(a)$.

On notera σ_D l'unique isométrie laissant fixes les points de D et échangeant les deux demi-plans définis par D. On l'appelle la *symétrie par rapport à D*. On dit que a et $\sigma_D(a)$ sont *symétriques* par rapport à D.

Proposition. — Toute isométrie du plan qui laisse fixes les points d'une droite D et transforme chaque demi-plan en lui-même est l'application identique. Toute isométrie du plan qui laisse fixes les points de D et n'est pas l'identité est la symétrie σ_D.

Démonstration : soit g une isométrie laissant fixes les points de D et transformant chaque demi-plan en lui-même. Alors $\sigma_D \circ g$ est une isométrie laissant fixes les points de D et échangeant les demi-plans, donc c'est σ_D. De la relation $\sigma_D \circ g = \sigma_D$ on déduit aussitôt que g est l'identité. — Soit maintenant f une isométrie laissant fixes les points de D et distincte de l'identité. Alors $\sigma_D \circ f$ est une isométrie laissant fixes les points de D et transformant chaque demi-plan en lui-même, donc c'est l'identité, et par suite $f = \sigma_D$.

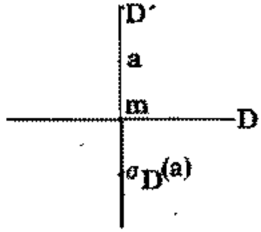
Corollaire : si une isométrie f laisse fixes trois points a,b,c non alignés, f est l'identité.

En effet, f laisse fixes tous les points de la droite D passant par a et b ; puisque $f(c) = c$, f transforme en lui-même le demi-plan qui contient c, et par suite transforme aussi en lui-même l'autre demi-plan. Donc f est l'identité.

3 Droites perpendiculaires

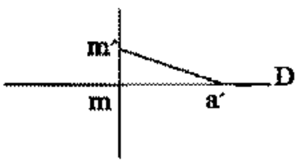
Définition : on dit qu'une droite D' est *perpendiculaire* ou *orthogonale* à D si elle est distincte de D et est transformée en elle-même par la symétrie σ_D.

Pour que D' soit perpendiculaire à D, il faut et il suffit que D' contienne un point $a \in D$ et son symétrique $\sigma_D(a)$. Autrement dit, on obtient toutes les perpendiculaires à D en joignant un point arbitraire a non situé à son symétrique $\sigma_D(a)$. Par tout point $a \in D$ il passe une perpendiculaire et une seule à D. Le point m, milieu

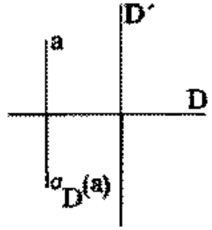


du segment $[a, \sigma_D(a)]$, s'appelle le *pied de la perpendiculaire* à D passant par a ; on a vu qu'il minimise la distance de a aux points de D.

Proposition : si D' est perpendiculaire à D, D est perpendiculaire à D'. (On dit alors que les droites D et D' sont perpendiculaires entre elles, ou simplement qu'elles sont perpendiculaires).



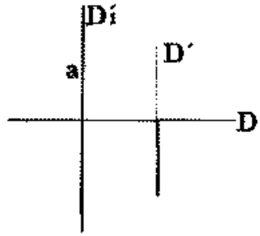
Démonstration : soit m l'intersection de D et D'. Prenons un point $a' \in D$, distinct de m, et soit m' le pied de la perpendiculaire à D' passant par a' ; les distances $d(a', m')$ et $d(a', \sigma_D(m'))$ sont égales, et $\sigma_D(m') \in D'$ puisque σ_D transforme D' en elle-même. Les points m' et $\sigma_D(m')$ réalisent le minimum de la distance de a' aux points de D, donc ils coïncident, et ceci exige que m' soit en m. Donc D est perpendiculaire à D'.



Si D' est perpendiculaire à D, la symétrie σ_D *transforme en lui-même chacun des deux demi-plans définis par D'* ; sinon en effet, σ_D échangerait ces demi-plans, ce qui contredirait le fait que σ_D laisse fixes les points de D. De là il résulte que si un point $a \in D$ n'est pas sur D', les points a et $\sigma_D(a)$ sont dans une même demi-plan défini par D' ; le segment de droite $[a, \sigma_D(a)]$ ne rencontre donc pas D'. La droite joignant a et $\sigma_D(a)$ ne rencontre pas non plus D', car si elle rencontrait D' en un point p (nécessairement hors du segment $[a, \sigma_D(a)]$, elle rencontrerait aussi D' au point $\sigma_D(p)$ distinct de p, donc serait confondue avec D', ce qui est absurde. On vient donc de montrer que *toute droite perpendiculaire à* D *et distincte de* D' *est parallèle à* D'. Ainsi :

Proposition. — Si D et D' sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à D est parallèle à D'. Pour la même raison, toute perpendiculaire à D' est parallèle à D.

Corollaire. — Si D et D' sont perpendiculaires, toute droite parallèle à D' est perpendiculaire à D, et toute droite parallèle à D est perpendiculaire à D'. (En effet, si D'_1 est parallèle à D', et si a est un point de D'_1 non sur D, l'unique perpendiculaire à D passant par a est parallèle à D', donc c'est D'_1 en vertu de l'axiome d'Euclide).



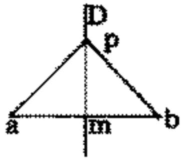
On a vu que par tout point $a \in D$ il passe une unique droite perpendiculaire à D. Si maintenant m est un point de D, par m il passe une unique droite perpendiculaire à D, à savoir la parallèle à n'importe quelle perpendiculaire à D.

Remarque : Si D et D' sont perpendiculaires, toute isométrie les transforme en deux droites perpendiculaires.

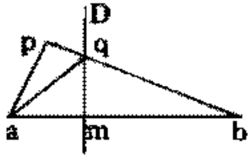
4 Médiatrice d'un segment

Soient a et b deux points *distincts* du plan. On appelle *médiatrice* du segment [a,b] la perpendiculaire à la droite ab qui passe par le milieu m du segment [a,b].

Proposition. — La médiatrice de [a,b] est l'ensemble des *points équidistants de* a *et de* b.



Démonstration : soit D la médiatrice. La symétrie σ_D échange les points a et b. Comme c'est une isométrie laissant fixes les points de D, tout point $p \in D$ est à la même distance de a et de b.



Il reste à montrer que si un point p n'est pas sur D, il n'est pas équidistant de a et b. D'une façon plus précise :

Si p et a sont dans l'un des demi-plans définis par D, on a

$$d(p,a) < d(p,b)$$

En effet, le segment [p,b] coupe D en un point q, puisque b et p ne sont pas dans le même demi-plan. On a

$$d(p,a) < d(p,q) + d(q,a).$$

parce que q n'est pas sur le segment [a,p] (qui ne rencontre pas D). Or $d(q,a) = d(q,b)$ puisque $q \in D$. On obtient

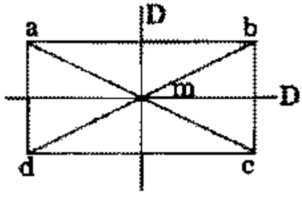
$$d(p,a) < d(p,q) + d(q,b),$$

et le second membre est égal à d(p,b) parce que $q \in [p,b]$.

Définition : on appelle *rectangle* un parallélogramme dont deux côtés consécutifs quelconques sont perpendiculaires.

Pour qu'un parallélogramme (a,b,c,d) soit un rectangle, il suffit que les droites ab et bc soient perpendiculaires (alors cd et cb sont perpendiculaires, puisque cd est parallèle à ab, etc...). On notera qu'un rectangle n'est jamais aplati.

Symétries du rectangle. — Un rectangle (a,b,c,d) possède un centre de symétrie m (comme tout parallélogramme). Mais il possède en outre deux axes de symétrie : en effet, la médiatrice D de [a,b] est parallèle à ad et bc, donc (voir programme de quatrième) elle passe par le centre de symétrie m et par le milieu du côté [c,d].

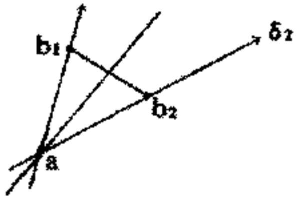


La droite D est aussi médiatrice de [c,d]. La symétrie par rapport à D échange a et b, et échange c et d, donc elle transforme le rectangle en lui-même (on dit que D est un axe de symétrie). De même, les segments [a,c] et [b,d] ont même médiatrice D', et D' est aussi un axe de symétrie du rectangle. Ainsi le rectangle possède deux axes de symétrie, perpendiculaires entre eux, et leur intersection m est le centre de symétrie.

L'étude de la figure précédente montre ceci : si D et D' sont deux droites perpendiculaires se coupant en m, la composée $\sigma_D \circ \sigma_{D'}$ est égale à $\sigma_{D'} \circ \sigma_D$ et à la symétrie σ_m ; la composée $\sigma_m \circ \sigma_D$ est égale à $\sigma_D \circ \sigma_m$ et à la symétrie $\sigma_{D'}$.

Bissectrice.

Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes passant par un point a, et choisissons sur D_1 une demi-droite δ_1 d'origine a, et sur D_2 une demi-droite δ_2 d'origine a. Alors *il existe une droite*



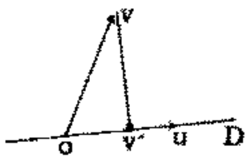
D et une seule, telle que la symétrie σ_D *échange les deux demi-droites* δ_1 *et* δ_2. On l'appelle la *bissectrice* des deux demi-droites ; elle passe par le point a.

Démonstration : prenons un point b_1 distinct de a sur δ_1, et un point b_2 sur δ_2, tel que $d(b_2,a) = d(b_1,a)$. Soit D la médiatrice du segment $[b_1,b_2]$. Elle passe par a, puisque a est équidistant de b_1 et b_2. Puisque b_1 et b_2 sont symétriques par rapport à D, la symétrie σ_D échange les demi-droites δ_1 et δ_2. Réciproquement, si une droite D est telle que σ_D échange δ_1 et δ_2, σ_D laisse fixe le point a, donc a $\in$ D, et de plus σ_D échange b_1 et b_2, donc D est la médiatrice de $[b_1, b_2]$.

5 Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définissons d'abord la notion de *projection orthogonale* du plan Π sur une droite D : c'est la projection sur D parallèlement à une direction perpendiculaire à D. La projection orthogonale associe donc à tout point a le pied a de la perpendiculaire à D passant par a.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel (plan muni d'une origine 0). On va définir un nombre réel, appelé produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, et noté $\vec{u}.\vec{v}$.



Si $\vec{u} = \vec{0}$, on pose $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Si $\vec{u} \neq 0$, soit D la droite passant par l'origine 0 et le point u, et soit v' la projection orthogonale du point v sur D. On pose

$$\vec{u}.\vec{v} = \overline{0u}.\overline{0v'}$$

(produit des mesures algébriques sur la droite D ; ce produit est indépendant du choix d'une orientation de D). On voit que si $\vec{u} = 0$ ou si $\vec{v} = 0$, le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul.

Par abus de langage, on convient de dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si l'un d'eux au moins est nul, ou si les droites 0u et 0v sont perpendiculaires. On voit alors que la condition $\vec{u}.\vec{v} = 0$ est nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}_1 + \vec{u}.\vec{v}_2$.

C'est évident, car $0v' = 0v'_1 + 0v'_2$.

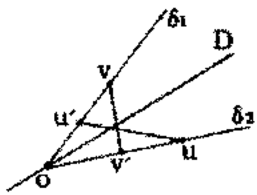
Il est évident que si $k \in \mathbb{R}$, on a $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}, \vec{v})$.

Si $\vec{w} = k\vec{v}$, on a $\vec{u}.\vec{w} = k(\vec{u}.\vec{v})$, car on a $\overline{0w'} = k.\overline{0v'}$ d'après le théorème de Thalès.

Enfin, si $\vec{v} = \vec{u}$, on a $\vec{u}.\vec{u} = (\overline{0u})^2$, carré de la distance d(0,u), distance qu'on appelle aussi longueur du vecteur $\vec{u}$, et que l'on note $|\vec{u}|$. Ainsi $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Théorème. — Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a (1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Démonstration. — C'est évident si u = 0 ou si v = 0, puisque dans un tel cas les deux membres de (1) sont nuls. Supposons donc $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Examinons d'abord le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même longueur ; soient D_1 et D_2 les deux droites 0u et 0v, et soient



δ_1 et δ_2 les demi-droites d'origine 0 qui contiennent respectivement les points u et v. La bissectrice D des demi-droites δ_1 et δ_2 est un axe de symétrie de la figure : la symétrie σ_D échange les points u et v, et elle échange aussi les points u' et v' (u' étant la projection orthogonale de u sur D_2 , et v' la projection orthogonale de v sur D_1) ; en effet, σ_D transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires. Or deux points symétriques par rapport à D ont même abscisse (sur D_1 , resp. sur D_2), pourvu qu'on ait orienté D_1 au moyen de δ_1 ,et D_2 au moyen de δ_2 . Donc $\overline{0u} = \overline{0v}$, $\overline{0u'} = \overline{0v'}$, et par suite $\overline{0u}.\overline{0v'} = \overline{0v}.\overline{0u'}$.

Or le premier membre de cette relation est, par définition, égal à $\vec{u}.\vec{v}$, et le second membre est égal à $\vec{v}.\vec{u}$.

Si u et v, tous deux = 0, n'ont pas la même longueur, il existe un nombre $k > 0$ tel que $\vec{v} = k\vec{v}_1$, $\vec{v}_1$ ayant même longueur que $\vec{u}$. On a alors

$$\vec{u}.\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v_1}),\ \vec{v}.\vec{u} = k(\vec{v_1}.\vec{u}),$$

et comme $\vec{u}.\vec{v_1} = \vec{v_1}.\vec{u}$, la relation (1) est démontrée.

Si on écrit que $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u}$, on obtient, compte tenu du théorème précédent :

(2) $$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}).$$

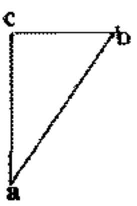
D'où :

Proposition. — Pour que $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$, il faut et il suffit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Théorème de Pythagore. — Soit un triangle (a,b,c). Pour qu'il soit "rectangle" en c, c'est-à-dire pour que les droites ca et cb soient perpendiculaires, il faut et il suffit que

$$|\vec{ab}|^2 = |\vec{ac}|^2 + |\vec{cb}|^2 \text{ (observer que } |\vec{ab}| = d(a,b)).$$

Démonstration : on pose $\vec{ac} = \vec{u}$, $\vec{cb} = \vec{v}$, et on applique la proposition précédente.



6 Utilisation d'une base orthonormée.

Rappelons (classe de 4e) que tout couple de vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ non colinéaires est une *base* du plan vectoriel : tout vecteur $\vec{p}$ s'écrit d'une seule manière

$$\vec{p} = x\vec{u} + y\vec{v},$$

où x et y sont des nombres réels, appelés coordonnées du point p relativement à la base $(\vec{u},\vec{v})$. Désormais, on supposera que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base *orthonormée*, c'est-à-dire (par définition) que

$$|\vec{u}| = 1,\ |\vec{v}| = 1,\ \vec{u}.\vec{v} = 0.$$

Soient alors deux vecteurs $\vec{p} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et $\vec{p}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$. Un calcul facile montre que

$$p.p' = xx' + yy',\ \text{et en particulier } |p|^2 = x^2 + y^2.$$

La condition d'orthogonalité de deux vecteurs de coordonnées (x,y) et (x',y') est donc $xx' + yy' = 0$. La distance de deux points de coordonnées (x,y) et (x',y') a pour carré

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 .$$

Les coordonnées relatives à une base orthonormée s'appellent souvent *coordonnées rectangulaires*. On n'utilisera plus que des coordonnées rectangulaires.

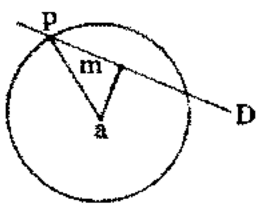
Définition : on appelle *cercle* de centre a et de rayon r (r nombre réel $\geqslant 0$) l'ensemble des points p tels que

$$d(p,a) = r, \text{ ce qui équivaut à } |\overrightarrow{ap}|^2 = r^2 ,$$

Si x_0 et y_0 sont les coordonnées du point a (appelé centre du cercle), l'*équation du cercle* est

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0) = r^2 .$$

Intersection d'un cercle de centre a et de rayon r *avec une droite* D : les points communs au cercle et à la droite sont les points $p \in D$ tels que $|\overrightarrow{ap}|^2 = r^2$. Soit m le pied de la perpendiculaire à D passant par a. On a, d'après Pythagore,



$$|\overrightarrow{ap}|^2 = |\overrightarrow{am}|^2 + |\overrightarrow{mp}|^2$$

donc les points cherchés sont les points $p \in D$ qui satisfont à

$$|\overrightarrow{mp}|^2 = r^2 - |\overrightarrow{am}|^2 .$$

$|am|$ est la *distance* d du point a à la droite D. On cherche, sur la droite D, les points p tels que la distance $d(p,m)$ ait pour carré le nombre r^2-d^2. Il ne peut y avoir de tels points p si $r^2-d^2 < 0$, c'est-à-dire si $r < d$. Si $r = d$, le seul point p qui convient est $p = m$; on dit alors que la droite D est *tangente* au cercle au point m. Si $r > d$, l'existence de la racine carré d'un nombre > 0 montre qu'il y a deux points communs au cercle et à la droite, et m est le milieu du segment qui les joint. La droite am est un axe de symétrie de la figure.

(Les résultats précédents se vérifient expérimentalement avec une règle et un compas).

Intersection de deux cercles. Pour simplifier, on supposera que l'un d'eux a pour centre l'origine 0 (cas auquel on peut toujours se ramener au moyen d'une translation).

Par un choix convenable de la base orthonormée, on se ramène au cas où le centre du second cercle a pour coordonnées $(x_0, 0)$. Les équations des deux cercles sont alors

$$x^2 + y^2 = r^2,\ (x-x_0)^2 + y^2 = r'^2 .$$

Les points d'intersection sont les solutions (x,y) de ce système de deux équations. En retranchant les équations membre à membre, on obtient

$$2x_0 x = (x_0)^2 + r^2 - r'^2 .$$

Si $x_0 = 0$ (les cercles sont "concentriques"), cette équation n'a pas de solution, sauf si $r = r'$, auquel cas les cercles coïncident. Supposons donc $x_0 \neq 0$. Les points d'intersection cherchés sont aussi les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ et de la droite

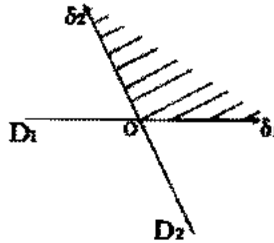
$$x = \frac{(x_0)^2 + r^2 - r'^2}{2x_0} .$$

il y en a *deux* si ce second membre est $> -r$ et $< +r$, un si ce second membre est égal à $\pm r$, point dans le cas contraire. A titre d'exercice, on peut mener au bout de cette discussion, et on trouve qu'il y a deux points communs aux deux cercles si et seulement si la distance $|x_0|$ de leurs centres est strictement comprise entre $|r-r'|$ et $r+r'$ (condition évidemment nécessaire à cause de l'inégalité triangulaire).

7 Angles

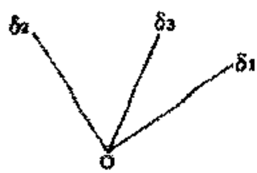
Il ne s'agit pas de faire une théorie des angles, ni une théorie de la mesure des angles. On se bornera à considérer des *secteurs angulaires*.

Définition : soient deux demi-droites δ_1 et δ_2 portées par deux droites distinctes, de même origine 0. Elles définissent un secteur angulaire, qui est, par définition, l'intersection des deux demi-plans suivants : celui des deux demi-plans définis par la droite D_1 portant δ_1 qui contient la demi-droite δ_2, et celui des deux demi-plans définis par la droite D_2 portant δ_2 qui contient δ_1. Ici il peut être commode de considérer les demi-plans *fermés*, de sorte que δ_1 et δ_2 sont contenus dans le secteur angulaire.



On étend cette définition au cas où $\delta_1 = \delta_2$; dans ce cas le secteur angulaire est réduit à δ_1. Enfin, lorsque les demi-droites δ_1 et δ_2 sont opposées (portées par la même droite D), on convient que δ_1 et δ_2 définissent deux secteurs angulaires distincts : ce sont, par définition, les deux demi-plans fermés définis par la droite D, un tel secteur angulaire est dit *plat*.

L'usage du rapporteur conduit à admettre qu'on peut mesurer chaque secteur angulaire par un nombre $\geqslant 0$, une fois choisie une unité de mesure. De façon plus précise, considérons le cercle de centre 0 (sommet du secteur angulaire) et de rayon un ; son intersection avec le secteur angulaire est un "arc de cercle", et l'on a admis dans les classes antérieures qu'on sait définir la *longueur* d'un tel arc de cercle. Cette longueur est, par définition, la mesure *en radians* du secteur angulaire ; la mesure d'un secteur angulaire *plat* est alors égale à π, celle d'un secteur angulaire *droit* (δ_1 et δ_2 orthogonales) est $\pi/2$. Tout ce que l'on doit savoir sur cette mesure est ceci : si un secteur angulaire de sommet 0 et limité par deux demi-droites δ_1 et δ_2 contient une demi-droite δ_3 d'origine 0, la mesure du secteur angulaire défini par δ_1 et δ_2 est la *somme* de la mesure du secteur angulaire défini par δ_1 et δ_3, et de la mesure du secteur angulaire défini par δ_2 et δ_3. On doit aussi savoir qu'une isométrie du plan transforme un secteur angulaire dans un secteur angulaire *de même mesure*.

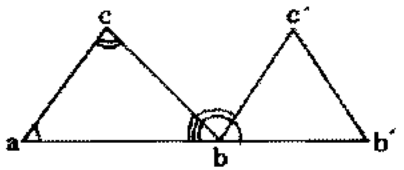


Il y a d'autres unités de mesure. Le *degré* est défini par la condition que la mesure d'un secteur angulaire plat est 180 degrés. Le grade est défini par la condition que la mesure d'un secteur angulaire plat est 200 grades.

On adopte la convention de langage suivante : une fois choisie une unité de mesure, on appellera *angle de deux demi-droites* de même origine le nombre qui mesure le secteur angulaire qu'elles définissent (lorsque le secteur est plat, il y a deux secteurs angulaires possibles, mais ils ont la même mesure).

Par exemple, soit un triangle (a,b,c).

L'angle en a du triangle est la mesure du secteur angulaire défini par les deux demi-droites d'origine a qui contiennent respectivement les points b et c.



Théorème. — Si on choisit le radian comme unité de mesure, la somme des angles d'un triangle est égale à π .

Démonstration : introduisons une notation : étant donnés 3 points distincts a,b,c, on notera (ab, ac) l'angle (en radians) des deux demi-droites d'origine a qui passent respectivement par b et c. Considérons la translation de vecteur $\overrightarrow{ab}$: elle amène a en b, b en b$'$, c en c$'$. Donc l'angle (ab, ac) est égal à l'angle (bb$'$, bc$'$)

La symétrie par rapport au milieu du segment [b,c] transforme ca en bc$'$ et cb en bc, donc les angles (ca, cb) et (bc$'$, bc) sont égaux. La somme des trois angles (ba, bc), (bc, bc$'$) et (bc$'$, bb$'$) est évidemment égale à π . Ces angles sont respectivement égaux aux angles en b, en c et en a du triangle (a,b,c) et ceci démontre le théorème.

Nous jugeons inutile de commenter la fin du programme de géométrie de la classe de troisième.

ANNEXE B
L'enseignement de la géométrie à l'aide du calcul vectoriel en quatrième et troisième

par Jean LERAY.

L'enseignement traditionnel de la géométrie suivait l'ordre historique : raisonnements sans structure algébrique du type classique d'Euclide ; emploi de coordonnées ; calculs vectoriels. Si l'on opte, au niveau des classes de quatrième et de troisième, pour une synthèse de ces trois points de vue, des précautions sont à prendre; elles sont l'objet de cette annexe.

CLASSE DE QUATRIEME

L'élève acquiert d'abord, par l'observation, les notions de *droite*, de demi-droite, de segment $[p,q]$, de *distance* de deux points et de sa mesure $d(p,q)$; une demi-droite d'origine p contient un seul point q tel que $d(p,q)$ ait une valeur positive donnée ;

(1) $d(p,q) + d(q,r) = d(p,r)$ si et seulement si $q \in [p,r]$;

d'où l'existence et les premières propriétés du milieu m de $[p,q]$.

[La notion de repère de la droite est ajournée : de même que les coordonnées d'un point du plan ne sont pas des distances, l'abscisse d'un point de la droite D n'est pas nécessairement sa distance à une origine de D : elle peut lui être proportionnelle.]

L'élève observe les deux sens de parcours de la droite, acquiert ainsi la notion de droite orientée, c'est-à-dire d'*axe*, de la mesure $\overline{pq}$ d'un bipoint (p,q) d'un axe ; d'où, vu (1), la relation de *Chasles*

(2) $\overline{pq} + \overline{qr} = \overline{pr}$ (p,q,r : points d'un même axe)

et une nouvelle caractérisation du milieu m de $[p,q]$:

$$\overline{mp} + \overline{mq} = 0 .$$

Deux bipoints (p,q) et (p',q') d'un même axe sont dits *équipollents* quand $\overline{pq} = \overline{p'q'}$; l'addition de $\overline{qp'}$ aux deux membres prouve ceci :

(3) $\overline{pq} = \overline{p'q'}$ équivaut à : $\overline{pp'} = \overline{qq'}$.

L'élève peut prouver, à titre d'exercice, que les conditions (3) équivalent aussi à la suivante :

$[p,q']$ et $[p',q]$ ont le même milieu.

[Il importe qu'on étudie rapidement la droite et, surtout, qu'on évite le concept abstrait : «géométrie de R» .]

*

On définit le *parallélisme* de deux droites, on admet l'axiome d'Euclide, on en déduit que le parallélisme est une relation d'équivalence ; la classe d'équivalence d d'une droite D est appelée *direction de* D . [Dire qu'une droite D appartient à une direction d constitue une faute de français.]

L'élève acquiert par l'observation la notion d'axes, demi-droites, bipoints parallèles de même sens ; on définit la notion de *direction d'axe*.

On définit alors l'*équipollence* de deux bipoints (p,q) et (p', q') du plan par les conditions :

$$d(p,q) = d(p',q') \ ;$$

si $d(p,q) \neq 0$, alors (p,q) et (p', q') sont parallèles de même sens.

L'équipollence est une relation d'équivalence, l'ensemble des bipoints (p,p) constituant une classe d'équivalence.

On choisit un point 0 , qu'on nomme *origine* ; on nomme *vecteur* tout bipoint d'origine 0 ; on le note :

$$\vec{u} = (0,u) \ ;$$

on note $\overrightarrow{pq}$ le vecteur équipollent au bipoint (p,q) . Un vecteur est donc le représentant d'une classe d'équipollence. L'ensemble des vecteurs est nommé «*plan vectoriel*» . Le plan vectoriel n'est autre qu'un plan muni d'une origine, c'est-à-dire un *plan pointé*.

L'équipollence de (p,q) et (p', q') est donc notée :

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'} \ .$$

On définit la *norme* de $\vec{u}$: $|\vec{u}| = d(0,u)$.

*

Un *parallélogramme* propre est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et dont les sommets ne sont pas alignés.

L'élève observe ceci :

les côtés opposés d'un parallélogramme propre sont de même *longueur* ; un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme, *s'il n'est pas croisé* ; un quadrilatère dont les côtés opposés ont même longueur est un parallélogramme, *s'il n'est pas croisé* ; (on dit donc comment le compas permet de construire le parallélogramme dont trois sommets sont donnés).

Ainsi l'élève comprend qu'il importe d'énoncer plus précisément ceci :
Si $pp'q'q$ est un parallélogramme, alors (p,q) et (p', q') sont équipollents :

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'} \ .$$

Cette propriété est admise (*axiome* du parallélogramme) et sa réciproque prouvée. Donc, si p,p', q,q' ne sont pas alignés et, vu (3), même s'ils le sont :

(4) $\qquad \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'}$ équivaut à $\overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{qq'}$.

Quand les conditions (4) sont vérifiées, on dit que $pp'q'q$ est un parallélogramme, propre si p,p', q',q ne sont pas alignés, aplati sinon.

[Bien entendu, l'axiome du parallélogramme rend superflu tout axiome concernant la symétrie centrale.]

*

Un raisonnement aisé, dont les figures expliqueront la signification géométrique, prouve ceci :

$$\text{Si } \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'} \text{ et si } \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{q'r'} \text{ , alors } \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{p'r'} \ .$$

[En effet ces hypothèses impliquent : $\overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{qq'} = \overrightarrow{rr'}$.]

Ainsi : $\vec{w} = \overrightarrow{pr}$ ne dépend que de $\vec{u} = \overrightarrow{pq}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{qr}$; on note : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, en définissant donc *l'addition des vecteurs* par la formule analogue à celle de Chasles :

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr} \ ;$$

en choisissant $0 = p$, on voit que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ signifie ceci : w est le quatrième sommet du parallélogramme de sommets $u,0,v$.

Cette addition est donc commutative. Chaque vecteur $\vec{u}$ a un opposé $-\vec{u}$; le produit $n\vec{u}$ de tout vecteur $\vec{u}$ par tout entier relatif n est donc défini et vérifie la loi de distributivité :

$$(5) \qquad n(\vec{u}+\vec{v}) = n\vec{u} + n\vec{v} \ .$$

[Il est essentiel d'expliquer le sens géométrique de cette formule sur le réseau que constituent les extrémités de tous les vecteurs

$k\vec{u} + \ell\vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$: vecteurs donnés, non colinéaires ; $k, \ell \in \mathbb{Z}$) ;

des parties de cette figure constituent en effet les figures qui servent classiquement à prouver le théorème de Thalès, à étudier les milieux des côtés d'un triangle, etc. ; les raisonnements qu'on fait classiquement sur ces figures ne sont que les expressions géométriques du calcul qui établit (5) dans le cas général, dans le cas $n = 2$, etc.].

On définit $t\vec{u}$ pour tout nombre réel t : $|t\vec{u}| = |t| \cdot |\vec{u}|$; $t\vec{u}$ est parallèle à $\vec{u}$, de même sens ou de sens opposé, suivant le signe de t ; on déduit de (5) la loi de *distributivité* :

$$(6) \qquad t(\vec{u}+\vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \ ,$$

si t est rationnel ; on l'admet sinon [comme on admet classiquement le théorème général de Thalès].

*

L'élève ne peut assimiler ce qui précède que par des *exercices de géométrie*, lui faisant découvrir et énoncer les propriétés de figures très simples ; bien des élèves comprendront la signification géométrique concrète de cas particuliers d'une formule telle que (6) avant de comprendre cette formule vectorielle et même son analogue numérique.

Indiquons très schématiquement quelques-uns de ces exercices, étant bien entendu que ce ne sont pas les formules vectorielles qui importent mais leur interprétation géométrique, c'est-à-dire *les propriétés de figures*.

$$\overrightarrow{pq} = \vec{q} - \vec{p} \ .$$

Si m est le *milieu* de $[p,q]$, on a (quelle que soit l'origine 0) :

$$\vec{m} = \frac{1}{2}[\vec{p} + \vec{q}] \ .$$

La condition que p q r s soit un *parallélogramme* s'énonce :

$$\vec{p} - \vec{q} + \vec{r} - \vec{s} = 0 \ ;$$

elle équivaut manifestement à chacune des conditions :

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{sr} \ , \ \overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr} \ ; \ \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{q} + \vec{s}) \ ;$$

cette dernière condition signifie que *les diagonales ont même milieu* ; d'où une seconde construction du parallélogramme dont trois sommets sont donnés.

Si p',s',r' sont les milieux des côtés du triangle p q r , on a :

$$\overrightarrow{p'q'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{pq} \ , \text{ etc. } ;$$

p'q'pr' est donc un parallélogramme ; etc.

Le *barycentre* g de deux points p et q , de poids P et Q (nombres tels que $P + Q \neq 0$), est défini par la condition :

$$P\,pg + Q\,qg = 0 \text{ (c.a.d. : g divise [p,q] dans le rapport } -\frac{Q}{P}) \ ;$$

qui équivaut à :

$$\vec{g} = \frac{P}{P+Q}\vec{p} + \frac{Q}{P+Q}\vec{q} \quad \text{(quelle que soit l'origine)} \ .$$

Le *barycentre* g de trois points p,q,r (de même poids) est défini par la condition :

$$\overrightarrow{pg} + \overrightarrow{qg} + \overrightarrow{rg} = 0 \ , \ \text{c.à.d.} \quad \vec{g} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q} + \frac{1}{3}\vec{r} \ ;$$

si p',q',r' sont les milieux des côtés du triangle p q r , on a donc:

$$\vec{g} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{p'} \ ;$$

d'où les propriétés des médianes du triangle.

On définit le barycentre de quatre points de même poids ; l'élève doit être capable de découvrir ses propriétés.

*

Le *translaté d'un point* p par un vecteur $\vec{u}$ est le point p' tel que $\overrightarrow{pp'} = \vec{u}$; si p' et q' sont les translatés de p et q par un même vecteur $\vec{u}$, on a donc, vu (4) :

(7) $$\overrightarrow{p'q'} = \overrightarrow{pq} .$$

On définit la translation T d'un ensemble fini de points (par exemple des milieux p', q', r' des côtés u du triangle $p\,q\,r$ par le vecteur $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{pq}$) avant de définir les translations du plan : bijections du plan sur lui-même, conservant, vu (7), la distance, la direction de droite et d'axe, l'alignement ; elles se composent comme s'additionnent les vecteurs qui les définissent.

(A titre d'exercice, on dalle le plan par un parallélogramme et ses translatés. On observe que le glissement de l'équerre le long de la règle opère une translation de l'équerre ; d'où une construction de la parallèle à une droite donnée contenant un point donné).

*

La *symétrie* S_c par rapport à un centre c est étudiée de même. Soient $p' = S_c p$, $q' = S_c q$; par définition

$$\overrightarrow{cp'} = -\overrightarrow{cp} , \ \overrightarrow{cq'} = -\overrightarrow{cq} ;$$

d'où :

$$\overrightarrow{p'q'} = \overrightarrow{pq} .$$

La symétrie est donc une bijection du plan sur lui-même conservant la distance, la direction de droite et l'alignement, changeant chaque direction d'axe en son opposé. Elle est sa propre inverse.

On prouve que les quadrilatères possédant un centre de symétrie sont les parallélogrammes (le symétrique d'un sommet étant le sommet opposé).

(A titre d'exercice ou d'approfondissement, on peut étudier la composition des symétries :

$$S_b\, S_a = T_{\vec{u}} \ , \text{ donc } S_a = S_b\, T_{\vec{u}} \text{ et } S_b = T_{\vec{u}}\, S_a \ , \text{ où } \vec{u} = 2\,\overrightarrow{ab} \ ;$$

les symétries et translations ne commutent donc pas.

Puis on peut étudier les symétriques d'un triangle par rapport aux milieux de ses côtés et daller le plan par un triangle, ses translatés et symétriques.)

Les *homothéties* (et leur composition) peuvent être étudiées de même, à titre d'exercice ou d'approfondissement.

*

Soient deux droites non parallèles, X et Y ; leur intersection est choisie pour origine. Soient p_X et p_Y les *projections* d'un point p respectivement sur X parallèlement à Y et sur Y parallèlement à X ; $\vec{p}$ se décompose de façon unique en la somme de deux vecteurs respectivement parallèles à X et Y, appelés *composantes* ou *projections* de $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \overrightarrow{p_X} + \overrightarrow{p_Y} \;,\; \text{où } \overrightarrow{p_X} = (0, p_X) \;,\; \overrightarrow{p_Y} = (0, p_Y) \;;$$

l'unicité de cette décomposition prouve que :

$$(\vec{p} + \vec{q})_X = \overrightarrow{p_X} + \overrightarrow{q_X} \;;\; (t\vec{p})_X = t\overrightarrow{p_X} \;;\; (\overrightarrow{pq})_X = \overrightarrow{p_X\, q_X} \;.$$

(Commutativité de la projection avec l'addition et le produit par un nombre).

Donc :

$$\text{si } \overrightarrow{pq} = t\, \overrightarrow{rs} \;,\; \text{alors } \overrightarrow{p_X\, q_X} = t\, \overrightarrow{r_X\, s_X} \;;$$

c'est le théorème de *Thalès* [précisé, quant au signe].

(A titre d'exercice, on peut prouver ceci : la projection du milieu est le milieu de la projection ; la projection d'un parallélogramme est un parallélogramme aplati.)

*

Par définition, une *base* du plan vectoriel est constituée par deux vecteurs non colinéaires ; soit : $\vec{u}$ inclus dans X et $\vec{v}$ inclus dans Y. Il existe un couple unique (x,y) de nombres tel que :

$$\overrightarrow{p_X} = x\,\vec{u} \,,\, \overrightarrow{p_Y} = y\,\vec{v} \;;\; \text{c'est-à-dire : } \vec{p} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v} \;;$$

d'où une bijection $\vec{p} \longmapsto (x,y)$ du plan vectoriel sur R^2 ; on précise ses propriétés [sans la nommer isomorphisme] ; cette bijection dépend du choix de la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

*

Les deux nombres x et y sont appelés *coordonnées* de p ; $p \longmapsto (x,y)$ est une bijection du plan sur R^2 ; elle dépend du choix du triplet $(0, \vec{u}\, \vec{v})$, appelé *repère* du plan.

(A titre d'exercices, on exprime, en fonction des coordonnées de p,q, ..., les composantes de $\overrightarrow{pq}$, les coordonnées du milieu de [p,q], les coordonnées du barycentre, la condition que pqrs soit un parallélogramme, l'équipollence).

On définit enfin *une base des vecteurs parallèles à une droite* D : c'est un vecteur non nul $\vec{d}$ parallèle à D ; tout vecteur parallèle à D a donc l'expression $t\,\vec{d}$($d \in$ R) ; on définit *une origine* c *de* D : c'est un point de D ; c et $\vec{d}$ constituent un repère de D ; *l'abcisse* d'un point p de D dans ce repère est le nombre t tel que

$$\overrightarrow{cp} = t\vec{d}$$

Equation d'une droite D non parallèle à Y : on peut choisir $\vec{d}$ et c tels que :

$$\vec{d} = \vec{u} + a\vec{v}\,;\,\vec{c} = b\vec{v} \quad (a,b \in \mathrm{R})\,;$$

le point p de D d'abcisse t est alors défini par

$$\vec{p} = t\,\vec{u} + (at + b)\vec{v}\,;$$

il a les coordonnées : $x = t$, $y = at + b$; D a donc pour équation :

$$y = ax + b$$

On admet que le complémentaire de D dans le plan est la réunion de deux demi-plans convexes ; ils sont donc respectivement définis par les inéquations : $y > ax + b$ et $y < ax + b$.

Une droite D parallèle à Y a évidemment pour équation $x = c$.

Une droite D quelconque a donc pour équation :

$$ax + by + c = 0, \quad \text{où } (a,b) \neq (0,0)\,;$$

les deux demi-plans complémentaires sont définis par les inéquations respectives :

$$ax + by + c > 0\,;\, ax + by + c < 0\,.$$

Approfondissement : — Quelques thèmes ont été indiqués (composition des symétries et translations ; homothéties) ; on peut, par exemple, étudier divers dallages du plan ; il existe beaucoup d'autres possibilités ; (barycentre de trois points affectés de poids, etc.)

CLASSE DE TROISIEME

Le produit scalaire peut être défini sans l'intermédiaire, certainement lourd, d'autres notions telles que : le rapport de projection orthogonale, cosinus.

Soient : X et Y deux axes contenant l'origine, $p \in X$, $q \in Y$, p' la projection orthogonale de p sur Y, q' celle de q sur X. La symétrie par rapport à la bissectrice D de (X,Y) prouve que, si les mesures algébriques de (0,p) sur X et de (0,q) sur Y sont égales c'est-à-dire :

$$\text{si } \overline{0p} = \overline{0q}\text{, alors } \overline{0p'} = \overline{0q'}$$

Donc, vu le théorème de Thalès, quelles que soient $\overline{0p}$ et $\overline{0q}$:

$$\overline{0p'} \cdot \overline{0q} = \overline{0q'} \cdot \overline{0p}\ ;$$

ce nombre est nommé produit scalaire de $\overrightarrow{0p}$ et $\overrightarrow{0q}$; il est noté $\overrightarrow{0p} \cdot \overrightarrow{0q}$.

Pour que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ il faut et suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

$$\vec{u} = 0\ ;\ \vec{v} = 0\ ;\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

D'où le théorème de Pythagore et sa réciproque.

La formule :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \quad .$$

la bilinéarité du produit scalaire et son expression en coordonnées orthonormées sont évidentes.

L'équation de la droite :

$$a\,x + b\,y = c$$

définit donc ses points p par la condition :

$$n \cdot p = c\ ,$$

n étant le point de coordonnées (a,b) ; il y a lieu d'expliciter la signification géométrique de cette condition.

ANNEXE C

Projet de programme de mathématiques pour les classes de quatrième et troisième

(d'inspiration surtout métrique).

par Gustave CHOQUET.

Le projet de l'Académie et celui-ci ont de nombreux points communs : en fin de troisième, ils auront apporté aux élèves les mêmes notions et les mêmes connaissances. Globalement, ces deux projets sont donc équivalents ; mais ils diffèrent beaucoup dans leur approche de la géométrie.

Le projet officiel se propose de dégager et d'utiliser en fin de quatrième la notion de vecteur ; le présent projet reporte en troisième l'introduction de cette notion ; il est même possible que des expériences pédagogiques bien conduites montrent que cette introduction en troisième est encore trop hâtive et que, lors d'une refonte et d'une harmonisation des programmes de mathématiques de la sixième à la première, il apparaisse souhaitable de ne faire de calcul vectoriel qu'en seconde.

Nous conserverons sans modification la partie algébrique des programmes de l'Académie. Par contre, nous pensons qu'en quatrième et troisième, la géométrie doit rester fortement liée au monde physique et à l'expérience quotidienne, à la notion de solide et de règle graduée, et doit s'appuyer sur une familiarité totale avec un petit nombre de figures simples : rectangle, parallélogramme, médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle.

La notion de déplacement d'un solide, convenablement mathématisée, doit être le roc sur lequel doit être basée la géométrie en quatrième.

Notre programme de quatrième, consacré à la géométrie métrique plane, se termine par le théorème de Pythagore et ses applications élémentaires.

Celui de troisième commence par le calcul vectoriel dans le plan, basé sur les propriétés déjà acquises du parallélogramme et de la projection oblique ; on définit ensuite le produit scalaire et on en donne quelques applications ; si le programme de troisième s'avérait trop gros et si, dans cette classe, les physiciens n'ont pas besoin de produit scalaire, on pourrait, compte tenu qu'on dispose déjà du théorème de Pythagore, reporter le produit scalaire en seconde.

La seconde partie de notre programme de géométrie de troisième est identique à celle du projet de l'Académie.

Nous donnerons d'abord les programmes, avant de passer à leur commentaire détaillé.

PROGRAMME DE QUATRIEME

I. NOMBRES DECIMAUX ET APPROCHE DES REELS

Même programme que dans le projet de l'Académie ; on pourra y ajouter la définition de la racine carrée et en donner quelques propriétés simples.

II. GEOMETRIE PLANE

1. Le plan, ensemble de points muni d'une distance ; la distance $d(p,q)$ de deux points p et q est un nombre réel $\geqslant 0$, une fois choisie une unité de longueur ; changement d'unité.

Les droites sont des parties du plan. Deux points distincts du plan appartiennent à une droite et une seule. Chaque droite peut être munie de deux "sens de parcours" ; demi-droite d'origine p, segment de droite $[p,q]$ d'extrémités p et q ; les points x de $[p,q]$ sont caractérisés par l'égalité $d(p,q) = d(p,x) + d(x,q)$.

Sur une droite orientée (ou axe), mesure algébrique d'un bipoint (p,q) : notation $\overline{pq}$. Relation de Chasles. Etant donné un point p, il existe un unique point q de l'axe tel que $\overline{pq}$ soit égal à un nombre donné. Abscisse d'un point sur un axe, une fois choisie une origine. Abscisse du milieu d'un segment.

2. Les deux demi-plans associés à une droite ; convexité.

— Notion d'isométrie et son lien avec la notion de solide.

— Symétrie (ou retournement) par rapport à une droite.

— Plus courte distance d'un point à une droite et projection d'un point sur une droite.

— Droites perpendiculaires à une droite ; elles sont parallèles ; la relation $D \perp D'$ est symétrique.

3. Par tout point du plan il passe au moins une parallèle à D. Axiome d'Euclide (unicité de cette parallèle) ; direction de droite ; directions perpendiculaires.

4. Médiatrice d'un segment [a,b] et régionnement du plan. Axe de symétrie d'un triangle isocèle ; bissectrice de deux demi-droites (axe de symétrie de la figure). Rectangle ; le groupe de ses symétries, centrales et axiales.

5. Symétrie centrale, symétrique d'une droite. Parallélogramme (propre ou aplati) ; la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés est parallèle aux autres côtés. Projection oblique du plan sur une droite ; projection du milieu d'un segment ; division d'un segment en n parties égales. Enoncé de Thalès (on l'admet pour les rapports non rationnels).

6. Cosinus des demi-droites δ_1, δ_2 de même origine ; il est symétrique en δ_1, δ_2. Conséquences : théorème de Pythagore. Applications ; triangles rectangles à côtés entiers ; problèmes de constructions. Coordonnées rectangulaires et calcul de distances.

Nous incluons aussi dans ce programme le "Nota bene" et la "Remarque sur ce programme" qui terminent le projet de l'Académie pour la quatrième.

PROGRAMME DE TROISIEME

I. CALCULS ALGEBRIQUES

Comme dans le programme de l'Académie.

II. GEOMETRIE PLANE

1. Rappels sur le parallélogramme et la projection oblique. Système des projections obliques associées à deux droites sécantes ; coordonnées par rapport à deux axes ; coordonnées du milieu d'un segment.

Bipoint (p.q). Equivalence de deux bipoints ; sa caractérisation en termes de coordonnées ; relation d'équivalence associée. Plan vectoriel : le choix d'une "origine" 0 associe à chaque point

u le bipoint $(0,u)$ appelé vecteur et noté $\vec{u}$; vecteur $\overrightarrow{pq}$ défini par un bipoint (p,q). Translation définie par un vecteur ; addition des vecteurs, relation $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.
Produit $k\vec{u}$ d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre k, relation
$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Bases du plan vectoriel, coordonnées relatives à une base, équation d'une droite.
Exercices : homothétie, barycentre, médianes d'un triangle.

2. Produit scalaire $\vec{u}, \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Identités $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ et $(a+b)^2 + (a-b)^2 = (a^2 + b^2)$; leur interprétation géométrique. Théorème de Pythagore et sa réciproque. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs dans une base ; équation d'un cercle ; intersection de cercles et droites.

3 et III. Les paragraphes du projet de l'Académie intitulés "Angles" et "Observations de figures simples de l'espace" sont également inclus dans notre programme.

COMMENTAIRES SUR LA GEOMETRIE DU PROGRAMME DE QUATRIEME

Les commentaires détaillés qui accompagnent le projet de l'Académie s'appliquent en grande partie au présent projet, ce qui nous permettra d'être assez brefs.

Nous indiquerons seulement ici la trame logique qui unit les matières du programme ; ce qui est donc essentiellement destiné au professeur qui se doit de connaître le déroulement logique complet sous-jacent à son cours. Il est en effet hors de question de présenter aux élèves, à ce niveau, un exposé entièrement déductif de la géométrie ; ce serait à la fois trop long et non adapté au développement mental des élèves. Par contre, il est important que ces élèves se familiarisent avec de nombreux objets géométriques, et qu'ils commencent à suivre et à reconstituer de courts raisonnements ; la conception du présent programme est particulièrement bien adaptée à ce cheminement : à partir de quelques figures simples telles que rectangle, parallélogramme dont les propriétés de base auront bien été comprises par l'observation et l'expérimentation ou même par les courts raisonnements d'une étape antérieure, on déduira par un raisonnement précis, des propriétés beaucoup moins évidentes, par exemple le théorème de Thalès pour des rapports rationnels, ou le théorème de Pythagore.

Ces figures clefs seront les étapes qui permettront aux élèves de "souffler", de reprendre pied sur un concret familier, d'où ils pourront repartir pour aller un peu plus loin. L'essentiel, en fin de compte, sera qu'ils aient parcouru un paysage géométrique varié et enrichissant et qu'ils s'en souviennent comme d'un monde non pas arbitraire mais raisonnable et compréhensible.

Certains des énoncés du cours, et en tout cas ceux du début, seront une mise en forme d'observations qui se dégagent de mesures faites avec une règle graduée sur des morceaux de plans constitués par une table ou un mur et sur les morceaux de droite qu'on peut y tracer avec une telle règle.

ESQUISSE D'UN DEVELOPPEMENT LOGIQUE

Nous ne parlerons pas ici des difficultés, surtout pédagogiques, liées au fait que le monde physique nous offre des exemples de morceaux de droite ou de plan, mais jamais de droite ou de plan entiers. Par contre, il nous semble utile de souligner que les relations d'ordre et les relations d'incidence sont plus fondamentales et plus intuitives encore que la notion de distance.

Aussi la liste raisonnée des observations du monde réel pourrait-elle suivre à peu près l'ordre suivant :

Par deux points passe une droite et une seule. Chaque droite peut être munie de deux "sens de parcours" (ordres totaux opposés l'un de l'autre) ; d'où les notions de demi-droite et de segment $[p,q]$. On peut dès lors introduire la notion d'ensemble convexe ; c'est une partie du plan qui, dès qu'elle contient deux points p,q, contient aussi le segment $[p,q]$.

Les élèves auront grand plaisir à dessiner des portions de plan qui sont convexes et *d'autres qui ne le sont pas* ; et la simplicité de la définition leur permettra de comprendre la preuve d'un premier théorème intéressant :

"L'intersection d'une famille d'ensembles convexes est un ensemble convexe". Illustration facile par superposition d'ensembles convexes dessinés sur des feuilles transparentes. La notion d'ensemble convexe s'applique immédiatement à la définition des demi-plans (ouverts ou fermés) associés à une droite.

Par exemple on donnera l'énoncé suivant tiré de l'expérience :

Pour toute droite D du plan P, il existe une partition unique de $(P \setminus D)$ en deux ensembles convexes P_1, P_2 non vides (appelés demi-plans ouverts) tels que si $p_1 \in P_1$ et $p_2 \in P_2$, le segment $[p_1, p_2]$ rencontre D.

Montrer que les demi-plans fermés $(p_i \cup D)$ sont aussi convexes, peut constituer un intéressant exercice ; et bien sûr les intersections de familles de demi-plans fourniront de nombreux exemples d'ensembles convexes.

On peut alors arriver aux notions métriques :
Une fois choisie une unité de longueur, la distance $d(p,q)$ de deux points p,q (mesurée au moyen d'une règle graduée) est un nombre positif, et cette distance vérifie les relations suivantes :

$$d(p,q) = d(q,p) \ ; \ d(p,p) = 0 \ ; \ d(p,q) > 0 \text{ si } p \neq q$$

et $d(p,q) \leqslant d(p,x) + d(x,q)$ quels que soient p,q,x, l'égalité n'étant réalisée que si x appartient au segment $[p,q]$.

En outre, pour chaque demi-droite δ d'origine p, et pour chaque nombre positif ℓ, il existe sur δ un unique point q tel que $d(p,q) = \ell$.

On peut dès lors développer la fin du (1) concernant la mesure algébrique et la relation de Chasles, ce développement pouvant se résumer en disant que deux points quelconques A, B d'une droite D tels que $d(A,B) = 1$ définissent une isométrie unique de D sur $\mathbf{R}$ qui envoie le couple (A,B) sur $(0,1)$. Mais il faut pour cela avoir défini la notion d'isométrie. Dans le monde réel, l'expression "corps solide" évoque un corps tel que, deux quelconques de ses molécules restent à une même distance mutuelle, indépendante du temps ; cette notion physique a conduit les mathématiciens à la notion voisine suivante :

Si A,B sont deux parties du plan, et f une bijection de A sur B, on dit que f est une isométrie si elle conserve les distances, c'est-à-dire si

$$d(f(x) , f(y)) = d(x,y)$$

quels que soient x,y dans A. On dit alors que A,B sont isométriques, ou congruentes, ou superposables (la question de savoir s'il s'agit d'une isométrie directe ou inverse, paire ou impaire n'est pas essentielle ici puisque les morceaux de plan qu'on utilise sont plongés dans l'espace de dimension 3).

Le problème pédagogique posé par la notion d'isométrie est intéressant ; on sait les difficultés qu'éprouvent la plupart des enfants pour bien comprendre les bijections entre ensembles infinis ; on commencera donc par prendre pour A,B des ensembles finis de 2, 3, 4 points ; on pourra ensuite utiliser un couple de rondelles planes ridiges et congruentes, les rotations d'une porte autour de ses gonds, le retournement d'une plaque plane symétrique autour de son axe de symétrie, la réflexion dans un miroir ; mais surtout on devrait commencer à utiliser de façon systématique dans l'enseignement de la géométrie à ce niveau, l'outil splendide que constituent les films mathématiques ou mieux encore les cassettes-vidéo qui, en une projection de dix minutes, peuvent faire prendre conscience aux élèves de la dynamique sous-jacente aux notions et aux relations de base d'un programme tel que celui présenté ici. Nous pensons d'ailleurs qu'un argument très fort qui doit faire préférer notre présentation géométrique à une présentation plus algébrisée est le fait qu'elle s'adapte de façon étonnante à une animation par film, avec les conséquences que cela implique pour de jeunes enfants, encore plus sensibles à l'image et au mouvement qu'au raisonnement.

Revenons au déroulement du programme :

La caractérisation d'un segment $[p,q]$ par une égalité métrique (voir (1)) démontre que tout ensemble isométrique à un segment est un segment de même longueur ; il en résulte que tout isométrique d'un ensemble convexe, d'une demi-droite, est un ensemble de même nature ; que si P_1, P_2 sont les demi-plans ouverts associés à une droite D, et f une isométrie du plan, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ sont les demi-plans ouverts associés à la droite $f(D)$. On est prêt alors à aborder la symétrie par rapport à une droite, mathématisation de deux faits concrets de l'expérience courante :

Le retournement d'une plaque rigide plane symétrique autour de son axe, et le pliage d'une feuille de papier autour d'une de ses droites. Voici sa formulation mathématique :

Pour toute droite D d'un plan P, il existe une isométrie f de P sur P telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in D$, et qui échange les demi-plans ouverts P_1, P_2 associés à D (i.e. $f(P_1) = P_2$ et $f(P_2) = P_1$).

Une fois admise (ou démontrée) l'unicité de f, on l'appelle symétrie d'axe D ou retournement autour de D.

On dit qu'une droite D' est perpendiculaire à D si $D' \neq D$ et si $f(D') = D'$.

Pour tout $x \in D'$ avec $x \notin D$, le segment $[x,f(x)]$ rencontre D en un point m milieu de ce segment ; pour tout $y \in D$ distinct de m, on a $d(x,y) = d(f(x),y)$, d'où d'après l'inégalité triangulaire stricte, $d(x,m) < d(x,y)$; dont le point m est caractérisé comme étant le point de D à distance minimum de x ; on dit que c'est la projection de x sur D, ou encore que c'est le pied de la perpendiculaire D' menée de x à D.

Cette caractérisation montre que m est aussi la projection de $f(x)$ sur D ; donc $f(f(x)) = x$; cette relation est valable pour tout $x \in P$; donc f est ce qu'on appelle une *involution* ; c'est une bijection de P telle que $f = f^{-1}$ ou, ce qui revient au même, f^2 = identité. Il faudrait souligner ici l'analogie de f avec la symétrie $x \to -x$ de $\mathbb{R}$, en opposition avec la translation $x \to (x+1)$ de $\mathbb{R}$ dont l'inverse est $y \to y - 1$.

Le symétrique $f(x)$ d'un point x par rapport à D s'obtient, si $x \notin D$, comme unique point de la droite D' contenant x et sa projection m, tel que m soit milieu de $[x,f(x)]$; cette construction démontre en particulier l'unicité de f.

La relation de perpendicularité qu'on vient de définir se note $D \perp D'$; montrons qu'elle entraîne $D' \perp D$:

Soit m l'intersection de D,D' ; nous devons montrer que la projection a sur D' d'un point y de D distinct de m, n'est autre que m ; car si $a \neq m$, on aurait par symétrie $d(y,a) = d(y,a')$ où a' est le symétrique de a par rapport à D ; comme $a' \neq a$, ceci est en contradiction avec l'unicité de la projection.

Toute isométrie transforme deux droites perpendiculaires en droites perpendiculaires : c'est une conséquence de l'unicité de la projection d'un point sur une droite.

Si $D' \perp D$ et si P_1, P_2 désignent les demi-plans ouverts associés à D', chacun est invariant par la symétrie f d'axe D ; en effet puisque $f(D') = D'$ nous savons que, ou bien f échange P_1, P_2, ou bien conserve chacun d'eux ; mais comme f laisse fixe tout point de D, l'échange est impossible.

Il résulte de là que si $D'' \perp D$, avec $D'' \neq D'$, la droite D'' est contenue, soit dans P_1, soit dans P_2, autrement dit D'' et D' sont disjointes.

Autrement dit par tout point a du plan il passe au plus une perpendiculaire à D. Il est alors tentant d'essayer de démontrer ici l'*existence* d'une telle perpendiculaire : c'est immédiat si $a \notin D$: c'est la droite contenant a et f(a) ; ça l'est moins si $a \in D$. On va donc pour simplifier s'orienter vers l'axiome d'Euclide.

Disons que deux droites du plan P sont parallèles si, ou bien elles sont disjointes, ou bien elles sont identiques.

Nous venons de voir que deux perpendiculaires quelconques à une droite D sont parallèles ; on va en déduire que par tout point a du plan passe au moins une parallèle à une droite D' : soit D une perpendiculaire à D' ne contenant pas a, et soit D'' la perpendiculaire à D passant par a ; les droites D'' et D' sont perpendiculaires à D, donc parallèles. Il devient alors naturel d'énoncer l'axiome d'Euclide :
"Par tout point du plan il passe *au plus* une parallèle à une droite donnée".

On sait que cet axiome équivaut aussi à dire que la relation de parallélisme (notée $D_1 \parallel D_2$) sur l'ensemble des droites du plan P est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence associées s'appellent des *directions*.

Montrons que si $D' \perp D$ et $D'' \parallel D'$, alors $D'' \perp D$: Supposons $D' \neq D''$, soit $a \in D'' \setminus D'$ et D''' la perpendiculaire à D menée par a. Alors D''' et D' étant perpendiculaires à D sont parallèles, donc $D'' = D'''$ d'après l'axiome d'Euclide.

En particulier en résulte l'existence, que nous ignorions encore, de la perpendiculaire à D menée par un point de D.

Médiatrice d'un segment [a,b], où $a \neq b$: Par définition c'est la perpendiculaire D au segment [a,b] (i.e. à la droite le contenant) menée par son milieu m. Comme a,b sont symétriques par rapport à D, $d(a,x) = d(b,x)$ pour tout x de D ; et si x est dans le demi-plan ouvert P_a associé à D et contenant a (i.e. si [a,x] ne rencontre pas D) on a $d(a,x) < d(b,x)$; c'est évident en utilisant l'inégalité triangulaire stricte dans le triangle de sommets x,a,p, où $p = D \cap [b,x]$. On caractérise ainsi les points de D, P_a, P_b par comparaison de leurs distances à a et b.

Axe de symétrie d'un triangle isocèle : On se donne les points $0,a,b$ où $d(0,a) = d(0,b) \neq 0$. Il existe une droite D unique contenant 0 et telle que a,b soient symétriques par rapport à D : c'est la droite contenant $0,a$ si $a = b$; c'est la médiatrice de $[a,b]$ si $a \neq b$; on l'appelle axe de *symétrie* du triangle isocèle $(0,a,b)$.

Si δ_1, δ_2 sont deux demi-droites d'origine 0, il existe une droite unique D telle que δ_1, δ_2 soient symétriques par rapport à D : c'est l'axe de symétrie du triangle isocèle $(0,a_1,a_2)$, où a_1, a_2 sont des points quelconques sur δ_1, δ_2 tels que

$$d(0,a_1) = d(0,a_2) \neq 0 .$$

Rectangle : On utilisera la terminologie suivante, relative à un quadrilatère (a,b,c,d) ; on appelle côtés opposés les couples de segments $[a,b]$, $[c,d]$ et $[b,c]$, $[d,a]$; et on appelle diagonales les segments $[a,c]$, $[b,d]$.

Les rectangles peuvent être définis par de nombreuses propriétés équivalentes ; il est essentiel de les connaître.

Supposons que tous les sommets de (a,b,c,d) soient distincts ; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Chacun des couples de côtés opposés a même direction ; et ces deux directions sont perpendiculaires.

2) Chacun des couples de côtés opposés a même médiatrice, et ces deux médiatrices sont perpendiculaires.

3) Les diagonales ont même longueur et même milieu.

On appelle rectangle tout quadrilatère ayant ces propriétés.

Montrons par exemple que $2 \Rightarrow 3$; notons D_1, D_2 les médiatrices des couples de côtés opposés, et m l'intersection unique des droites qui portent les diagonales ; comme la symétrie par rapport à D_1 échange les diagonales, m est fixe dans cette symétrie donc $m \in D_1$; de même $m \in D_2$. Donc m est le point commun à D_1, D_2 ; il en résulte aussitôt l'égalité des distances de 0 aux quatre sommets, donc l'énoncé 3.

Ceci montre de plus qu'un rectangle admet deux axes de symétrie perpendiculaires, et un centre de symétrie qui est le point de rencontre de ces axes.

Symétrie centrale. Ces propriétés du rectangle se traduisent plus généralement de la façon suivante :

Si D_1, D_2 sont deux droites perpendiculaires, et 0 leur point commun, si $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ désignent les symétries par rapport à D_1, D_2, et la symétrie de centre 0, le produit de deux de ces transformations est égal à la troisième ; et si on leur ajoute l'identité on obtient un groupe commutatif d'ordre 4 dont tout élément est égal à son inverse.

Comme β est produit de deux isométries, c'est aussi une isométrie ; elle transforme toute droite en droite, et plus précisément en une droite parallèle.

Disons alors qu'un quadrilatère (a,b,c,d) est un parallélogramme si les milieux de ses diagonales coïncident ; ce point commun D est donc un centre de symétrie de (a,b,c,d) ; donc deux côtés opposés quelconques sont parallèles et de même longueur. Un parallélogramme peut être aplati, c'est-à-dire avoir tous ses sommets sur une droite D ; sinon les directions des droites portant les couples de côtés opposés sont distinctes.

Réciproquement, si dans un quadrilatère à sommets distincts deux côtés opposés quelconques sont parallèles, les directions de ces deux couples étant distinctes, ce quadrilatère est un parallélogramme.

Une propriété importante des parallélogrammes non aplatis, analogue à l'identité des médiatrices des côtés opposés d'un rectangle, est la suivante : la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés est parallèle aux autres côtés. Par exemple, notons p (resp. q) l'intersection de la droite $\delta(a,b)$ (resp. $\delta(c,d)$) avec la parallèle à [b,c] menée par 0.

Les segments [a,p] , [c,q] sont égaux (symétrie/0) ; les segments [a,p] , [d,q] sont égaux, car (a,p,q,d) est un parallélogramme. Donc p est milieu de [a,b].

Corollaire : Toute projection oblique conserve les milieux. Plus précisément appelons projection oblique sur une droite D parallèlement à une direction δ distincte de celle de D, l'application f du plan P sur D qui à tout $x \in P$ associe le point f(x) d'intersection de D avec la droite de direction δ passant par x (on dira projection orthogonale lorsque D et δ sont perpendiculaires).

Soit alors m le milieu d'un segment [a,b] ; le corollaire affirme que f(m) est le milieu de [f(a), f(b)] ; la preuve, classique, utilise les propriétés élémentaires de la symétrie centrale et du parallélogramme.

On déduit de là de façon classique la construction qui permet de diviser un segment [a,b] en n parties égales.

On en déduit surtout l'énoncé de Thalès pour les rapports rationnels, dit "petit Thalès".

Voici cet énoncé : Soit D' une droite quelconque de direction $\neq \delta$; trois points a', b', x' de D' avec $a' \neq b'$; a,b,x, les points correspondants de D par la projection f. Si $k = \overline{ax} / \overline{ab}$, et $k' = \overline{a'x'} / \overline{a'b'}$, on a $k = k'$.

En voici une preuve rapide : Notons φ l'application $k \to k'$ de R dans R ; la conservation des milieux par projection oblique se traduit par :

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi(t_1) + \varphi(t_2)\right) ;$$

comme $\varphi(0) = 0$, on a en particulier l'identité $\varphi\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(u)$; on en déduit l'identité $\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$.

Donc φ est une application additive de R dans R, avec $\varphi(1) = 1$. Il en résulte que $\varphi(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis, $\varphi(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Pour une présentation plus élémentaire et plus visuelle de cette preuve, voir les commentaires du projet de l'Académie.

On admettra que la relation $\varphi(t) = t$ est valable pour tout t réel ; sa preuve est d'ailleurs fort simple pour qui connaît un peu la structure de R. En effet φ est une application croissante de R dans R (c'est une conséquence du fait que toute droite parallèle à une droite Δ du plan, ou bien est Δ, ou bien est contenue dans un des demi-plans ouverts associés à Δ) ; et φ coïncide avec l'identité sur Q donc c'est l'identité !

Soient δ_1, δ_2 deux demi-droites d'origine 0, et D_1, D_2 les axes associés qui les portent ; on note a_1, a_2 les points de δ_1, δ_2 à distance 1 de 0.

On appelle cosinus de (δ_1, δ_2) (noté $\cos(\delta_1, \delta_2)$) la mesure algébrique sur D_2 du bipoint $(0, a'_1)$ où a'_1 est la projection orthogonale de a_1 sur D_2.

Le théorème de Thalès montre que si x,y sont deux points quelconques de D_1, x' et y' leurs projections orthogonales sur D_2, on a $\overline{x'y'} = \cos(\delta_1, \delta_2) . \overline{xy}$.

La propriété fondamentale du cosinus est sa symétrie : $\cos(\delta_1, \delta_2) = \cos(\delta_2, \delta_1)$; elle résulte du fait que le couple des demi-droites δ_1, δ_2 possède un axe de symétrie, d'où la relation $\overline{0a'_2} = \overline{0a'_1}$.

On dit que (δ_1, δ_2) est un angle aigu, droit, obtus, suivant que $\cos(\delta_1, \delta_2)$ est > 0 , $= 0$, ou < 0 .

Si A,B,C sont trois points distincts, on appelle cosinus de l'angle en A du triangle (A,B,C), le cosinus des demi-droites d'origine A qui portent B,C.

Théorème de Pythagore. Soit (A,B,C) un triangle de sommets distincts, dont l'angle en A soit droit, et soit H la projection orthogonale de A sur la droite portant B,C.

On note a,b,c les longueurs des côtés du triangle, et β , γ les cosinus de ses angles en B,C.

On a : $\beta = c/a$ et $\gamma = b/a$, donc $\beta, \gamma > 0$; d'où $H \in [B,C]$. On a donc

$$a = d(B,H) + d(H,C) = \beta\, c + \gamma\, b = (c^2 + b^2)/a$$

ou encore $a^2 = b^2 + c^2$.

Nous ne parlerons pas ici des applications élémentaires ni des constructions associées au théorème de Pythagore.

Nous soulignerons seulement la simplicité de la démonstration ci-dessus qui, d'une part n'a nul besoin des cas de similitude de triangles, d'autre part est au moins aussi simple que la démonstration basée sur le produit scalaire, sans l'arsenal vectoriel que nécessite celui-ci.

A ce niveau, le théorème de Pythagore suffit pour tous les besoins ; par exemple, c'est un exercice simple et intéressant de rechercher la condition d'orthogonalité de deux vecteurs $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dans un repère orthogonal.

Il suffit d'écrire le théorème de Pythagore dans le rectangle de sommets 0,x,y :

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) ,$$

ou encore $x_1\, y_1 + x_2\, y_2 = 0$.

COMMENTAIRE SUR LE PROGRAMME DE TROISIEME

Notre programme de géométrie part de la connaissance du parallélogramme et de la projection oblique étudiées en quatrième. A partir de là, le développement peut s'inspirer des commentaires du projet de l'Académie : ceux de la quatrième en ce qui concerne les vecteurs, ceux de la troisième en ce qui concerne le produit scalaire.

Répétons ici que cette introduction du produit scalaire en troisième est sans doute inutile et prématurée, et que son étude pourrait être utilement remplacée par celle de propriétés métriques : structure des isométries, rotations, notion d'aire, etc...

On remarquera que nulle part dans nos programmes, de quatrième ou de troisième, n'a été conseillée une révision de l'algèbre élémentaire des ensembles ; la raison en est simple : il y a dans toutes les classes une inflation néfaste de l'enseignement de cette algèbre, qui aurait dû toujours rester un langage introduit au fur et à mesure des besoins ; il est grand temps que cesse cette inflation stérile qui gaspille un temps précieux qu'on pourrait utiliser à l'enseignement de mathématiques substantielles et utilisables.

97e CONGRES DE L'ASSOCIATION POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

sous la présidence de Jean-Claude PECKER, professeur au Collège de France, membre de l'Institut,

du 6 au 8 juillet 1978 à Mulhouse.

Pour tout renseignement :

Secrétariat de l'A.F.A.S.
250, rue Saint-Jacques
PARIS 5ème

III
L'enseignement des mathématiques en quatrième et troisième

par J. GIRAUD

Quoique rédigé dans un style différent, ce document est très voisin de l'Annexe C du projet de programme présenté par l'Académie des Sciences. Il donne des indications pédagogiques précises, mais ce n'est que pour mieux expliciter les conséquences possibles d'un choix souhaitable. Il souhaite prouver qu'une répartition différente du contenu mathématique entre les deux classes et un éclairage convenable permettent

(a) d'adapter l'enseignement à des situations variées

(b) d'éviter une rupture avec l'enseignement des classes précédentes

(c) de montrer comment les mathématiques expliquent certains aspects du monde qui nous entoure

(d) de mettre en place progressivement une doctrine mathématique où le langage a un sens parfaitement précis et où le raisonnement est aussi rigoureux que possible.

Ainsi conçu, l'enseignement se prête bien à l'acquisition d'un certain savoir-faire qui a son intérêt mais qui doit surtout servir de support sur lequel appuyer l'activité de réflexion autonome de l'élève. En effet, la capacité de réfléchir et raisonner de façon autonome est la partie durable de l'apport des mathématiques à la formation de l'élève.

Comme on le voit, l'objectif est ambitieux et les moyens indiqués pour l'atteindre supposent que le temps imparti à l'enseignement des mathématiques reste ce qu'il est.

I. Préambule

Il est indispensable que tous les mots utilisés en mathématique aient un sens précis. Dans ces classes, le langage ensembliste usuel accompagnant les notions d'ensemble, sous-ensemble, produit de deux ensembles, application, loi de composition, suffit.

Les notions de groupe, relation d'ordre et relation d'équivalence seront introduites lorsque l'on en rencontrera des exemples.

Ce langage précis permet d'énoncer certaines propriétés que l'on admet et d'en déduire d'autres, mais il n'est pas demandé de démontrer tous les énoncés du programme à partir d'un petit nombre d'entre eux plus ou moins judicieusement choisis ; mais il serait néfaste de réduire les mathématiques à une liste "d'évidences" sans lien raisonné. En Géométrie, il convient de faire voir que le langage adopté rend compte de l'activité du dessinateur et que le raisonnement permet d'en prévoir le résultat, que ce soit par des considérations géométriques, ou, dans des cas simples (problèmes linéaires), par le calcul. Mais s'en tenir à ce seul point de vue est insuffisant et il serait bon de faire voir que deux positions d'un même solide plan définissent une isométrie, ce qui éclaire bien des énoncés.

Bien que le texte soit court, l'étude des nombres réels est évidemment très importante, d'autant plus que les relations entre algèbre et géométrie sont un des points clefs du sujet étudié.

II. Nombres réels

Les *objectifs* sont : familiariser l'élève avec le maniement d'égalités ou d'inégalités portant sur des lettres qui représentent des nombres réels, l'habituer à des calculs d'erreur et à des estimations qui sont une première introduction à l'analyse (il s'agit uniquement d'exemples numériques), l'amener à passer aisément du langage géométrique au langage algébrique et choisir ainsi la méthode la plus efficace pour résoudre un problème. A cause du dernier point, il est hautement souhaitable que l'étude des nombres réels et de la géométrie soit menée de front. Cela est possible car les débuts de la géométrie ne font guère usage que de l'addition et de la valeur absolue et l'on peut y laisser provisoirement dans l'ombre la nature exacte des nombres que l'on manipule.

Classe de quatrième

Nombres décimaux : addition, soustraction, multiplication, division, erreur sur ces opérations.

Nombres réels, nombres réels positifs, addition, valeur absolue. Multiplication, inverse d'un nombre réel non nul ; notation

$\frac{x}{y}$: les règles qui gouvernent son usage sont déduites des propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication des nombres réels, cas où x et y sont entiers. Valeur approchée : traduction par une double inégalité.

Résolution, sur des exemples numériques, d'équations et inéquations du premier degré à une inconnue.

Classe de troisième

Consolidation du savoir acquis en quatrième. En outre, racine carrée : existence, valeur approchée, racine carrée d'un produit de nombres positifs, de l'inverse d'un nombre positif. Si $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.

Propriétés de la fonction $f(x) = ax + b$: son graphe est une droite, elle est connue quand on connaît deux de ses valeurs, le composé de deux telles fonctions en est une autre. Applications : changement d'unité, d'échelle de température, heure sidérale et heure solaire, etc..

Mise en équation de problèmes variés conduisant à des équations et inéquations du premier degré à deux inconnues. Sur des exemples numériques, résolution exacte ou approchée de tels systèmes, interprétation graphique et utilisation de celle-ci.

Sur des exemples numériques traités à l'aide de tables, de calculatrices ou de calculs simples, détermination par points du graphe de fonctions non nécessairement affines (par exemple : x^2, $1/x$, $\sqrt{x}$, $\cos(x)$, $(1-x)/(1+x)$) et estimation de la valeur d'une fonction (par exemple : $2x^3 - 17x + 1$ pour $x = 1000$, -1000 ou $0,001$). Les exemples donnés ici ne sont pas imposés : au contraire, il est préférable d'en choisir d'autres tirés de la pratique.

III. Géométrie

C'est l'étude d'un ensemble appelé plan, muni d'une distance (que ce texte note $|AB|$) et d'un ensemble de parties, lesquelles sont appelées droites. On pourra admettre beaucoup plus de propriétés qu'il ne serait nécessaire mais on ne perdra pas de vue que l'un des objectifs essentiels de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est l'apprentissage du raisonnement. Les énoncés explicités ont été choisis, soit parce qu'ils traduisent l'usage des instruments de dessin, soit parce qu'ils sont d'un emploi commode dans les exercices. A dessein, on ne précise pas ceux qu'il faut admettre et ceux qu'il convient de démontrer.

L'accent est mis sur l'étude du groupe des isométries du plan que l'on peut fonder solidement sans recours au calcul vectoriel. Cette approche ne prive d'aucun *outil de démonstration* car l'on peut disposer très tôt des coordonnées rectangulaires. D'ailleurs, il convient de les utiliser pour mettre en place peu à peu le calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^2$ et aussi pour bien mettre en évidence les liens entre algèbre et géométrie.

Le programme impose d'étudier plusieurs exemples d'isométries et de les composer dans des cas simples. Il y a sans doute là une difficulté que l'on s'abstiendra d'aggraver en utilisant prématurément le concept d'isométrie. Par exemple, en quatrième, pour la symétrie droite, on pourra commencer par la construction du symétrique d'un point, faire voir que cette construction conserve les distances et en tirer quelques conséquences. Puis l'on s'apercevra que l'on a défini une bijection du plan sur lui-même et l'on exprimera les propriétés établies comme des propriétés de cette bijection. Mais cette démarche prudente n'est pas imposée. Il est seulement demandé que les élèves connaissent les énoncés du programme, dans la formulation volontairement naïve adoptée ou dans une autre, et sachent s'en servir pour résoudre des problèmes simples. En résumé, il convient d'apprendre à l'élève la *méthode* qui consiste à prouver les propriétés d'une figure en lui appliquant une transformation convenable.

Le professeur est libre de la manière de traiter le programme, cependant le découpage en paragraphes ou le regroupement de certains énoncés dans un même alinéa signalent, parfois, des corrélations qu'il convient de mettre en lumière. A titre d'exemple, on trouve dans un même alinéa une notion purement affine : la symétrie par rapport à un point, un fait familier, ou en tout cas visuellement évident : l'égalité des diagonales d'un rectangle, un énoncé de nature plus "dynamique" sur le composé de deux symétries par rapport à des droites orthogonales et enfin la traduction calculatoire du tout. Ce regroupement signifie qu'il est plus important de bien faire voir à l'élève que l'on a là trois déguisements d'un même fait mathématique que, par exemple, de donner une démonstration du second énoncé à partir d'un système d'axiomes qui, suivant les cas, rend cette démonstration subtile ou évidente.

Dans chacune des classes, le dernier paragraphe du programme a un statut particulier. L'élève tirera grand profit de son étude si le maître veut bien admettre que l'on peut raisonner valablement sans disposer d'une théorie parfaitement axiomatisée. Mais il aura préalablement montré par des exemples que, en cas de doute, seul le raisonnement portant sur des êtres mathématiques soigneusement définis permet d'éviter les conclusions erronées.

Classe de quatrième

§ 1. *Droite dans un plan muni d'une distance*

Deux points distincts O et I déterminent une droite D. Si $|OI| = 1$, ils déterminent une position de la règle graduée, ce que l'on traduit ainsi : à tout point M de D, on attache un nombre f(M), appelé *abscisse de* M *sur l'axe* (O,I), on a $f(O) = 0$, $f(I) = 1$ et $|f(M) - f(N)| = |MN|$. On pose $\overline{MN} = f(M) - f(N)$, on a $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$.

Segment, demi-droite, demi-plan, convexité.

§ 2. *Médiatrice, orthogonalité, symétrie droite, parallélisme*

Cercle de centre et de rayon donnés ; disque.

L'ensemble des points équidistants de deux points distincts A et B est une droite appelée médiatrice de (A,B). Construction : deux cercles de centres distincts et de rayons assez grands et égaux se coupent en deux points distincts.

Si une droite D est la médiatrice d'un couple de points distincts d'une droite D', alors D' est orthogonale à D. Les diagonales d'un losange sont orthogonales. Usage de l'équerre.

Perpendiculaire à une droite passant par un point, parallélisme et orthogonalité, énoncé d'Euclide.

Symétrique d'un point par rapport à une droite : construction. Un cercle de centre donné et de rayon assez grand coupe une droite donnée en deux points distincts. Symétrie par rapport à une droite : propriétés.

Symétrie par rapport à la médiatrice d'un côté d'un rectangle. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu. Le composé de deux symétries par rapport à des droites orthogonales est la symétrie par rapport à leur point d'intersection. Coordonnées du symétrique d'un point par rapport à l'origine d'un repère.

Projection orthogonale d'un point sur une droite. Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé. Coordonnées du milieu d'un segment, du symétrique d'un point par rapport à un axe de coordonnées ou par rapport à l'origine des coordonnées.

§ 3. *Projection d'une droite sur une autre*

Projection d'une droite sur une autre, parallèlement à une troisième. Projection du milieu d'un segment. Partage d'un segment en n parties égales.

Parallélogramme : les côtés opposés sont parallèles. Parallèle à un côté passant par le milieu d'un côté adjacent : propriétés ; les diagonales se coupent en leur milieu. Centre de symétrie.

Lien avec les propriétés métriques : pour savoir que les milieux sont conservés par projection, il suffit de le savoir pour une projection orthogonale. Les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur. La projection d'une droite sur une droite parallèle conserve les longueurs.

§ 4. *Relations métriques*

A l'occasion *d'activités* faisant intervenir l'observation et le raisonnement, on consolide un savoir qui, l'année suivante, sera mieux intégré à la doctrine mathématique en cours d'élaboration. On peut déjà faire observer que la symétrie par rapport à une droite ou un point conserve les longueurs, les aires et les angles.

Aire d'un rectangle, d'un triangle, d'un trapèze.

Enoncé de Pythagore, expression de la distance dans un repère orthonormé. Usage des tables de carrés et de racines carrées.

Usage du rapporteur : exprimé en degrés, l'angle de deux demi-droites de même origine O est un nombre compris entre 0 et 180 qui est proportionnel à la longueur de l'arc du cercle de centre O et de rayon R qu'elles définissent. L'angle de deux demi-droites orthogonales vaut 90 degrés, on dit qu'il est droit.

Classe de troisième

Les différentes parties du programme ne sont pas sans lien entre elles et s'éclairent mutuellement. Mais il n'y a aucune difficulté mathématique à traiter l'une avant l'autre en tablant sur l'acquis de la classe précédente. Ainsi, le théorème de Pythagore et la trigonométrie ne nécessitent qu'une version naïve du théorème de Thalès dans le cas particulier d'une projection orthogonale.

Sans que cela soit imposé, on peut donc les traiter avant le théorème de Thalès et les considérations purement affines qui accompagnent celui-ci.

Dans certaines questions, il est naturel (et parfois utile) d'employer un repère non orthonormé. S'il le juge bon, le professeur pourra introduire cette notion. Pour cela, il suffit de savoir que deux points distincts O et I d'une droite D définissent une application $f : D \to \mathbf{R}$, appelée abscisse, telle que $f(O) = 0$, $f(I) = 1$ et $|f(M) - f(N)| = |MN|/|OI|$, énoncé qui a le même caractère d'évidence que celui admis en quatrième et qui, si l'on y tient, s'en déduit par projection.

§ 1. *Angles*

Secteur angulaire convexe (intersection de deux demi-plans). Aire d'un secteur circulaire, longueur d'un arc de cercle, angle de deux demi-droites de même origine (exprimé en degrés, grades ou radians), usage du rapporteur. Si D, D′ et D″ sont trois demi-droites de même origine et si D′ est contenue dans le secteur angulaire défini par D et D″, on a
angle (D,D′) + angle (D′,D″) = angle (D,D″).
Somme des angles d'un triangle .

Bissectrice de deux demi-droites ; construction. Théorème de Pythagore. Usage des tables trigonométriques.

§ 2. *Théorème de Thalès*

On l'admettra sous l'une de ses formes. La plus simple et la plus utile est la suivante : par projection d'un axe sur un autre parallèlement à une droite donnée, l'abscisse se transforme par une application affine. L'équation d'une droite s'en déduit immédiatement.

Eléments métriques du triangle obtenu en menant une parallèle à un côté d'un triangle.

§ 3. *Translation*

Parallélogramme (révision). Image d'un point par la translation qui applique A sur B, construction, coordonnées de cette image (projection du milieu d'un segment). Image d'une droite. Composé de deux translations. Le composé de deux symétries par rapport à des droites parallèles est une translation.

§ 4. *Compléments sur les isométries*

Dans des cas particuliers, illustration de la *méthode* qui consiste à étudier une isométrie en la décomposant en produit de symétries droites, en étudiant ses éléments fixes ou en observant comment se répartissent les transformés successifs d'un point par les itérés de cette transformation.

Etude de figures isométriques.

Rotations : une isométrie qui a un seul point fixe est déterminée par l'image d'un point du cercle de centre O et de rayon R, elle s'obtient en composant les symétries par rapport à deux droites distinctes passant par O.

§ 5. *Observation* de solides remarquables, c'est-à-dire présentant des symétries : sphère (intersection avec un plan, axe d'un cercle, longitude, latitude, cube, pyramide droite, etc... Utilisation de la géométrie plane pour déterminer certains éléments métriques des dits solides (diagonale d'un cube ...).

IV

Mise en garde de l'A.P.M.E.P.

(Cf. Texte du Comité national du 6/11/77 — Bulletins 311 et 312)

En présence des divers projets reçus par le ministère, les responsables A.P.M.E.P. rappellent avec force les points de vue suivants :

1 *Il est inadmissible qu'il ne s'écoule pas au moins DEUX ANS FRANCS entre la parution d'un programme et sa mise en application généralisée.*

Ce délai est notamment indispensable pour une rédaction réfléchie de manuels et de documents ainsi que pour l'information des maîtres.

Afin qu'un tel délai soit tenu, l'A.P.M.E.P. demande que, un nouveau programme de quatrième paraissant avant juin 78, son application soit différée jusqu'à la rentrée 1980 (au lieu de 1979).

D'ici là, subsisteraient les programmes et les manuels actuels avec les allègements nécessités par les réductions d'horaires en Sixième et Cinquième.

Cette correction du calendrier ministériel ne retranche rien de notre critique fondamentale de l'incapacité du ministère à soumettre les changements de programme à une expérimentation préalable REELLE, carence dont les conséquences peuvent être très graves.

2 *Il serait dangereux de persévérer, fût-ce insidieusement, dans des erreurs majeures des programmes actuels* (constructions axiomatiques, coupure d'avec les acquis de sixième-cinquième, abus du vectoriel "intrinsèque", ...) et de se contenter de ne gommer que quelques aspérités.

3 *Il le serait tout autant d'acquiescer à un mouvement pendulaire allant à l'opposé* (géométrie uniquement d'observation, de description ou de manipulation, algèbre de "règles", rejet de tout aspect vectoriel, ...).

4 *Entre les deux extrêmes des équilibres devraient pouvoir être trouvés !*

5 *Les projets de programme insistent tous sur la géométrie. L'algèbre en est largement coupée (quoi qu'ils en disent) et traitée en parent pauvre. Il faudrait, au contraire, étendre et valoriser les activités numériques, aussi importantes que les activités géométriques (sinon plus !) pour la formation de l'esprit (et la formation mathématique). Ceci suppose que le poids de la géométrie soit diminué. Par ailleurs, activités numériques et activités géométriques sont à traiter en étroite liaison.*

6 *Un programme est d'autant meilleur qu'il fonde plus largement la liberté des maîtres et permet de personnaliser l'enseignement.*

L'A.P.M.E.P. juge qu'aucun des actuels projets ne va assez loin en ce sens.

7 *Rien ne serait possible sans quatre heures hebdomadaires de mathématiques pour chaque élève, avec dédoublements pour travaux par petits groupes.*

Pour le Bureau national,
le 23 mars 1978

Henri BAREIL
Vice-Président Premier Cycle