Bulletin de l'APMEP n°314 - Juin 1978

Construction des réels et numérations

par Claude MOSER, Grenoble.

L'idée initiale de cet article m'est venue d'une discussion entre animateurs de l'I.R.E.M. de Grenoble à propos du problème suivant : Comment utiliser la méthode des coupures de Dedekind pour construire le corps des nombres réels à partir de l'anneau des nombres décimaux ? (Précisons tout de suite qu'il s'agissait d'une préoccupation d'ordre purement spéculatif dont les fruits n'étaient en aucun cas destinés à consommation au cours d'un stage !).

Le problème peut paraître banal quand on connaît la construction des réels à partir des rationnels. La seule difficulté est en fait de prouver que tout réel non nul est inversible. La démonstration classique utilise fortement le fait que tout rationnel non nul est inversible. Elle n'est donc pas transposable telle quelle au problème ici posé. Les animateurs sus-mentionnés s'en sont tirés en utilisant la propriété :

> (P) L'ensemble D^* des décimaux inversibles est dense dans l'ensemble D des nombres décimaux.

(Rappelons qu'un décimal est inversible si et seulement si il est de la forme $2^a . 5^b$ où a et b sont des entiers rationnels. La propriété P signifie simplement qu'il existe un décimal inversible entre deux décimaux distincts.)

Mon premier but était de démontrer cette propriété P. Un peu de réflexion à ce sujet amène sans beaucoup d'effort à prouver un joli résultat d'arithmétique :

Théorème.—

Soit u et v deux entiers supérieurs ou égaux à 2, qui ne sont pas puissances d'un même entier.

Soit n un entier naturel non nul et $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un n-uplet de chiffres de la numération en base u. Alors :
L'ensemble des puissances de v dont le développement en base u commence par $\alpha_1 ... \alpha_n$ est infini.

Je me propose de démontrer ici une forme généralisée de la propriété P et le théorème. Je renvoie à un autre article les problèmes de coupure, article où je montrerai qu'en fait on peut ne pas utiliser la propriété P, moyennant quelques surprises et aménagements de définitions.

La propriété P et le théorème.—

Quelle que soit la façon dont on fait la connaissance des nombres décimaux, on réalise tôt ou tard que cet anneau s'obtient par adjonction à l'anneau $\mathbb{Z}$ d'un élément γ tel que $10\gamma = 1$. De façon plus générale, pour tout entier $m \geqslant 2$ on peut construire, par une méthode rigoureusement identique à celle utilisée pour D, l'anneau A_m obtenu à partir de $\mathbb{Z}$ par adjonction d'un élément ${}_m$ tel que $m \cdot {}_m = 1$.

L'entier m étant fixé, l'ensemble A_m^* des éléments de A_m inversibles pour la multiplication est le groupe multiplicatif engendré par les diviseurs premiers de m : si $p_1, \ldots, p_k$ sont les diviseurs premiers de m, un élément de A_m est inversible si et seulement si il est de la forme $p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ où $a_1, \ldots, a_k$ sont des entiers rationnels.

Cela étant l'idée de base de la démonstration est la suivante : Soit u et v deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et soit m leur plus petit multiple commun. Il s'agit de construire une suite $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A_m^*$ qui converge vers 1 en décroissant strictement. Comme on le verra ceci n'est pas possible pour n'importe quel couple (u, v). Commençons par un lemme élémentaire.

Lemme.—

Soit u et v deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Les entiers u et v sont puissances d'un même entier naturel.

ii) L'équation $u^x = v^y$ a une solution en entiers non nuls x et y .

Si $u = w^a$ et $v = w^b$, alors a et b sont non nuls et $u^b = v^a$.

Réciproquement, soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $u^b = v^a$. Si d est le plus grand commun diviseur de a et de b et si $a'd = a$, $b'd = b$, il est clair que $u^{b'} = v^{a'}$.

Une première conséquence est que u et v ont même ensemble de diviseurs premiers. (Ceci résulte du théorème de Gauss). Soit donc $\{p_1, ..., p_n\}$ l'ensemble de ces diviseurs premiers. Si $u = p_1^{a_1} ... p_n^{a_n}$ et $v = p_1^{b_1} ... p_n^{b_n}$, alors pour tout $i \in [1, n]$ $b'a_i = a'b_i$. Puisque a' et b' sont premiers entre eux, pour tout $i \in [1, n]$, b' divise b_i et a' divise a_i de telle sorte qu'on a $a_i = \alpha_i a'$ et $b_i = \alpha_i b'$.

Par suite, si on pose $w = p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha_n}$ on a évidemment $u = w^{a'}$ et $v = w^{b'}$.

Remarque.—

Soit p un nombre premier et m un nombre p-primaire ($m = p^\alpha, \alpha \geqslant 1$). Les anneaux A_m et A_p coïncident. Or dans A_p, pour tout entier naturel ℓ, $A_p^* \cap]p^\ell, p^{\ell+1}[= \phi$. La propriété (P) relative à A_m est donc fausse si m est un nombre primaire. Je reviendrai sur ce cas un peu plus loin.

Pour l'instant je considère deux entiers naturels u et v qui ne sont pas puissances d'un même entier. Leur plus petit multiple commun m n'est pas un nombre primaire.

Je construis une suite $\varphi : N \dashrightarrow A_m^*$ de manière récursive. Souhaitant obtenir une suite strictement décroissante, je pose :

- Si $v > u$: $\varphi(0) = v$ et $\varphi(1) = u$.
- Si $v < u$, soit k le plus petit entier tel que $v^k \geqslant u$.

Alors $v^k > u$ puisque v et u ne sont pas puissances d'un même entier.
Je pose dans ce cas $\varphi(0) = v^k$ et $\varphi(1) = u$.
Dans les deux cas : $1 < \varphi(1) < \varphi(0)$.
Pour obtenir $\varphi(2)$, je considère j_1, le plus grand entier j tel que $\varphi^j(1) < \varphi(0)$, et je pose $\varphi(2) = \varphi(0) / \varphi^{j_1}(1)$ dans A_m^*.
Alors $\varphi(2) / \varphi(1) = \varphi(0) / \varphi^{j_1+1}(1) \leqslant 1$.
En fait $\varphi(2)$ est strictement inférieur à $\varphi(1)$. A titre d'exemple voici ce qu'on obtient pour $v = 5$ et $u = 2$.

N	EXPOS. DE 5	EXPOS. DE 2	J(N)	PHI(N) APPROCHE
0	+ 1	0	0	5,00000000
1	+ 0	1	2	2,000000000
2	+ 1	− 2	3	1,250000000
3	− 3	7	9	1,024000000
4	+ 28	− 65	2	1,009741958
5	− 59	137	2	1,004336277
6	+ 146	− 339	4	1,001041547
7	− 643	1,493	6	1,000162894
8	+ 4 004	− 9,297	2	1,000063720

Je n'ai encore rien démontré, et surtout pas que la suite, supposée construite, converge vers 1. Je condense tous les résultats intéressants dans la :

Proposition.—

Soit u et v deux entiers naturels qui ne sont pas puissances d'un même entier, m leur plus petit multiple commun et t le plus grand entier naturel tel que $v^t < u$. Alors les relations

$$\varphi(0) = v^{1+t} \ ; \ \varphi(1) = u \ ; \ j_0 = t$$

$$n \geqslant 1 \text{ et } \begin{cases} j_n = \text{Max} \ \ \ell \mid \ell \in N \text{ et } \varphi(n-1)/\varphi^{\ell}(n) < 1 \\ \varphi(n+1) = \varphi(n-1) \,/\, \varphi^{j_n}(n)\,. \end{cases}$$

définissent une suite $\varphi : N \longrightarrow A_m^*$ qui possède les propriétés ci-après :

i) Elle est strictement décroissante.

ii) Elle converge vers 1.

iii) Pour tout $n \in N$, $\varphi(n)$ est de la forme $v^a u^b$ où a et b sont des entiers rationnels. De plus si n est pair (resp. impair) a est positif (resp. négatif) et b est négatif (resp. positif).

La propriété iii) est vérifiée par $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ respectivement.

De plus $\varphi(0) > \varphi(1) > 1$.

A partir de là, on fait un raisonnement par récurrence sur n, avec l'hypothèse $H(n)$ suivante :

$H(n)$: $\varphi(2n)$ et $\varphi(2n+1)$ satisfont aux propriétés

- $\varphi(2n) > \varphi(2n+1) > 1$
- $\varphi(2n) \quad = v^a u^b$ avec $a, b \in Z$ $a > 0, b \leqslant 0$
- $\varphi(2n+1) = v^c u^d$ avec $c, d \in Z$ $c \leqslant 0, d > 0$

Preuve de l'implication $H(n) \Rightarrow H(n+1)$.

La suite $(m \longmapsto (\varphi(2n+1))^m)$ est une suite géométrique de raison plus grande que 1. Par conséquent l'ensemble des entiers non nuls j tels que $\varphi^j(2n+1) < \varphi(2n)$ est borné ; il est non vide car il contient 1. Soit donc j_{2n+1} le plus grand élément de cet ensemble. Alors

$$(\varphi(2n+1))^{1+j_{2n+1}} \geqslant \varphi(2n) > (\varphi(2n+1))^{j_{2n+1}}$$

On ne peut avoir égalité à gauche dans l'expression ci-dessus, car

$\varphi(2n) = v^a u^b$ et $(\varphi(2n+1))^{1+j_{2n+1}} = v^{c(1+j_{2n+1})} \cdot u^{d(1+j_{2n+1})}$

S'il y avait égalité on aurait

$$v^{a-c(1+j_{2n+1})} = u^{d(1+j_{2n+1})-b}$$

Il résulterait de $\mathcal{H}(n)$ que $a - c(1+j_{2n+1})$, $d(1+j_{2n+1}) - b$ sont strictement positifs.
D'après le lemme u et v seraient puissances d'un même entier, ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse initiale du théorème.

Par suite

$$(\varphi(2n+1))^{1+j_{2n+1}} > \varphi(2n) > (\varphi(2n+1))^{j_{2n+1}} > \varphi(2n+1)$$

On définit alors

$$\varphi(2n+2) = \varphi(2n) / (\varphi(2n+1)^{j_{2n+1}}$$

qui satisfait à

$$\varphi(2n+1) > \varphi(2n+2) > 1$$
$$\varphi(2n+2) = v^{a-c\,j_{2n+1}}\, u^{b-d\,j_{2n+1}}$$
$$a - c\,j_{2n+1} > 0 \;;\; b - d\,j_{2n+1} < 0$$

Les termes $\varphi(2n+1)$ et $\varphi(2n+2)$ étant définis, on définit comme ci-dessus

$$j_{2n+2} = \max \{ j \mid j \in \mathbb{N} , (\varphi(2n+2))^j < \varphi(2n+1) \}$$

et

$$\varphi(2n+3) = \varphi(2n+1) / (\varphi(2n+2)^{j_{2n+2}} ,$$

avec les propriétés

$$\varphi(2n+2) > \varphi(2n+3) > 1$$
$$\varphi(2n+3) = v^A\, u^B$$
$$A = c - j_{2n+2}\,(a - c\,j_{2n+1}) < 0$$
$$B = d - j_{2n+2}\,(a - d\,j_{2n+1}) \geqslant 0$$

L'implication $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ est donc vraie. L'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A_m^*$ est parfaitement définie. De plus elle est strictement décroissante.

Reste à prouver que cette suite converge vers 1, dans A_m^* , pour la distance induite par l'ordre de A_m .

Soit n un entier naturel. On commence par démontrer que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\varphi(n) > (\varphi(n+k))^k .$$

On raisonne (évidemment) par récurrence sur l'entier k . La propriété considérée est vraie pour $k = 1$. Soit maintenant $k \geqslant 2$ et supposons que la propriété soit vraie pour tout $j \leqslant k$. Alors

$$\varphi(n+k-1) = \varphi(n+k+1)\,(\varphi(n+k))^{j_{n+k}}$$

et

$$\varphi(n) > (\varphi(n+k-1))^{k-1} = \varphi(n+k+1)^{k-1} \,.\, \varphi(n+k)^{j_{n+k}(k-1)} .$$

Du fait que $j_{n+k} \geqslant 1$ et $\varphi(n+k) > \varphi(n+k+1)$,

$$\varphi(n) > (\varphi(n+k+1))^{2(k-1)} \geqslant (\varphi(n+k+1))^{k+1}$$

La propriété est donc vraie pour tout n et tout $k \geqslant 1$. En particulier pour $k = m$ et pour tout n :

$$(\varphi(n+m))^m < \varphi(n)$$

et

$$(\varphi(n+m))^m - 1 < \varphi(n) - 1 .$$

De l'identité $a^m - 1 = (a-1)(a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a + 1)$ on déduit :

$$(\varphi(n+m))^m - 1 = (\varphi(n+m) - 1) \sum_{j=0}^{m-1} (\varphi(n+m))^j$$

et $(\varphi(n+m))^m - 1 > m.(\varphi(n+m) - 1)$, car $\varphi(n+m) > 1$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n+m) - 1 < \frac{1}{m}(\varphi(n) - 1) .$$

A l'aide d'un nouveau raisonnement par récurrence sur l'entier ℓ on prouve la double inégalité

$$0 < \varphi(m\ell) - 1 < \frac{1}{m^\ell} (\varphi(0) - 1) .$$

Maintenant pour tout entier n , soit ℓ le plus grand entier tel que $m\ell < n$. Alors

$$\varphi(n) - 1 \leqslant \varphi(m\ell) - 1 < m^{-\ell} (\varphi(0) - 1) .$$

Ceci prouve l'égalité $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(n) = 1$.

Démonstration de la propriété P.—

Une forme générale de la propriété **P** est (**P** *):

Soit m un entier non primaire. Alors A_m^* est dense dans A_m.

Soit donc m un entier non primaire. Soit u et v deux diviseurs de m qui ne sont pas puissances d'un même entier. Soit $\varphi : N \longrightarrow A_m^*$ l'application définie conformément à la proposition.

Soit a et b deux éléments de A_m qui vérifient $0 < a < b$. Soit ℓ le plus grand entier rationnel tel que $m^\ell < a$, $a' = a/m^\ell$, $b' = b/m^\ell$. Alors $1 < a' < b'$. Soit $c' \in A_m$ tel que $a' < c' < b'$. (On peut considérer par exemple $c' = (a' + (m-1)\,b')/m)$.

Soit r le plus petit entier n tel que

$$\varphi(n) < c' \quad \text{et} \quad c'.\varphi(n) < b'.$$

La suite $(j \longmapsto (\varphi(r))^j)$ est une suite géométrique strictement croissante. Soit i le plus grand des entiers j tels que $(\varphi(r))^j < c'$. Alors

$$a' < c' \leqslant (\varphi(r))^{i+1} = \varphi(r)^i\,\varphi(r) < c\,\varphi(r) < b'.$$

De ce fait

$$a < m^\ell . (\varphi(r))^i < b.$$

Si a et b sont deux éléments négatifs ou deux éléments de signe contraire, on se ramène sans peine au cas étudié ci-dessus. On obtient ainsi une preuve constructive de la propriété **P** *. Dans le cas des décimaux, il suffit évidemment de poser $u = 2$ et $v = 5$.

Démonstration du théorème.—

On peut dire que le théorème découle de la propriété iii) énoncée dans la proposition. L'idée du théorème vient de là en tous cas :

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les chiffres choisis. Soit m le plus petit multiple commun de u et de v. On considère dans A_m les éléments

$$a = \alpha_1\,u^{n+1} + \alpha_2\,u^m + \ldots + \alpha_n\,u^2 + u \quad \text{et} \quad b = a + 1$$

$$a' = a / u^{n+1},\ b' = b / u^{n+1}$$

Supposant $\alpha_1 \neq 0$, on a $1 < a' < b'$.

Au lieu d'utiliser la suite $\varphi : N \longrightarrow A_m^*$, on utilise la suite extraite $(n \longrightarrow \varphi(2\,n))$. Procédant come dans la démonstration de la propriété $\mathbf{P}$, on montre l'existence d'un entier p et d'un entier i tels que :

- $a' < (\varphi(2\,p))^i < b'$.

- L'exposant de u dans $(\varphi(2\,p))^i$ est un entier rationnel strictement inférieur à $-(n+1)$.

Alors, si on choisit un tel p et un tel i, et si on écrit $(\varphi(2\,p))^i = v^c/u^d$, on obtient

$$a'\,u^d < v^c < b'\,u^d$$

c'est-à-dire $$a\,u^{d-n-1} < v^c < b\,u^{d-n-1}$$

Les développements en base u de $a\,u^{d-n-1}$ et $b\,u^{d-n-1}$ commencent tous les deux par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Il en est donc de même du développement en base u de v^c . Ceci achève la démonstration du théroème.

Avant de passer à l'illustration numérique du théorème, je propose de revenir à ce qui se passe lorsque u et v sont puissances d'un même entier c .

D'après la remarque qui précède la proposition, une suite $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow A_c^*$ converge vers 1 si et seulement si elle est stationnaire sur 1. Ici il est intéressant de noter que le procédé décrit dans la proposition ne définit pas une suite si u et v sont puissances du même entier c .

On pose $u = c^q$, $v^{t+1} = c^p = \varphi(0)$, $\varphi(1) = u$. Pour tout $a \in \mathbf{N}$ et tout $b \in \mathbf{N}$, non nul, on note $[a,b]$ le quotient dans la division euclidienne de a par b . Avec ces notations, on pose $\varphi(2) = c^{p-q[p,q]}$. Par itération, si $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$ sont définis sous la forme $c^{\alpha(n)}, c^{\alpha(n+1)}$ avec $0 < \alpha(n+1) < \alpha(n)$, on définit $\varphi(n+2)$ comme $c^{\alpha(n+2)}$ avec

$$\alpha(n+2) = \alpha(n+1) - \alpha(n)\,[\,\alpha(n+1), \alpha(n)\,]\,.$$

Tant que $\alpha(n)$ n'est pas nul on a $0 \leqslant \alpha(n+1) < \alpha(n)$. Il existe donc n_0 tel que $\alpha(n_0) = 0$. Alors $\varphi(n_0 - 1) = \varphi(n_0 - 2)$ et $\varphi(n_0 + 1)$ n'est pas défini.

Illustration numérique.—

Tout le travail numérique décrit ici a été fait sur une machine WANG 2200 de 4K qui utilise le langage BASIC. Le programme a une double tâche :

1) Les entiers u et v étant fixés, déterminer au plus 26 termes de $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow A_m^*$.

2) Les chiffres $\alpha_1, ..., \alpha_5$ étant choisis en base u, déterminer au plus trois puissances de v dont le développement en base u commence par $\alpha_1 ... \alpha_5$. Pour faciliter l'écriture, chacun de ces chiffres est écrit comme un entier en base dix et placé selon son rang dans une matrice ligne (cf. 250 → 320).

Il est patent que ce programme triche avec l'esprit de l'article puisqu'y sont utilisés d'une part les quotients d'entiers non nuls quelconques, d'autre part surtout la fonction logarithme telle qu'elle est donnée par la machine. Ces inconvénients peuvent être évités moyennant un très grand nombre de boucles et de tests supplémentaires. J'ai conservé le programme tel quel uniquement pour une raison de rapidité d'exécution, d'autant que les exposants trouvés sont très grands.

A ce propos la machine utilisée travaille sur des entiers inférieurs à 10^{13} (en simple précision, bien sûr). Pour cette raison j'ai disposé de nombreux "garde-fous" tout au long du programme. Il serait intéressant, compte tenu des nombreuses boucles, d'étudier rigoureusement la précision des calculs. Encore un joli problème d'analyse qui se raccroche !

Au vu des résultats il paraît exclu de faire les calculs à la main. Par eilleurs il serait intéressant, étant donnés u, v, $\alpha_1, ..., \alpha_5$ de déterminer autrement que par "balayage" quelle est la plus petite puissance de v dont le développement en base u commence par $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$. J'avoue ne pas avoir d'idée sur la question.

Si les entiers u et v sont puissances d'un même entier, la machine peut s'en apercevoir et nous renvoie à nos chères études.

3.1. Le programme.—

```
10 REM CE PROGRAMME SE NOMME NUMERO ; 30/09/76 ;
CL. MOSER
20 DIM A(2), B(2), C(2), F(13), H(13), G(5), D(13)
20 REM POUR ALLER A FIN, FAIRE U=1 DANS 50
40 INPUT "BASE", U:IF U=1 THEN 560 : INPUT "ARGUMENT", V:M=0
50 PRINT TAB(21) ; "BASE" ; U, "ARGUMENT" ; V:PRINT
60 P=INT (LOG(U)/LOG(V))
70  A=V! (1+P) :  B,C=U :  A(1)=1+P :  B(2),C(2)=1 :  A(2),B(1)
        C(1) =0
80  E$="N" :  R$="EXPOS.DE" :  Z$="J(N)" :  T$="PHI(N) APPRO-
       CHE"
```

```
90 PRINTUSING 100, E$, R$, V, R$, U, Z$, T$
100 % ## ######## ### ######## ### #### ##############
110 PRINTUSING 120,0,A(1),A(2),P,A
120 %   ##   +###,###,###,###   -###,###,###,###   ####
####.##########
130 FOR N=1 TO 26
140 IF B[]1 THEN 170
150 PRINT "Les entiers U et V sont puissances d'un même entier."
160 GOTO 520
170 IF N=2*INT(N/2) THEN 190
180 F((N+1)/2)=A(1) : H((N+1)/2)=-A(2) : D((N+1)/2)=A
190 P=INT(LOG(A)/LOG(B))
200 FOR I=1 TO 2 : B(I)=A(I)-P*B(I) : A(I)=C(I) ; C(I)=B(I) : NEXT I
210 B=A/B! P: A=C: C=B: M=M+1: IF A-1 [5E-9 THEN 240
220 PRINTUSING 120, N, A(1), A(2), P, A
230 NEXT N
240 PRINT : PRINT "PRECISION INSUFFISANTE POUR ACHEVER LE
TABLEAU"
240 PRINTUSING 260,U,V
260 % BASE ### ARGUMENT ###
270 H,R,X,Y=0
280 FOR I=1 TO 5
290 INPUT G(I): IF G(I)[U THEN 310
300 PRINT "INTRODUISEZ UN ENTIER INFERIEUR A" ; U: GOTO 290
310 H=H+G(I)*(U! (6-I)): NEXT I
320 PRINTUSING 330,G(1),G(2),G(3),G(4),G(5)
330 % CHIFFRES CHOISIS ### ### ### ### ###
340 PRINTUSING 350,H/U
350 % DEVELOPPEMENT DECIMAL DU NOMBRE ASSOCIE #########
360 F=H: PRINT :PRINT
370 X=INT(LOG(F)/LOG(V)): F=F/(V! X)
380 Y=INT(LOG(F)/LOG(U)): F=F/(U! Y)
390 FOR N=1 TO INT(M/2): IF R]2 THEN 520
400 IF D(N) ]F THEN 540: IF D(N) ]1+(1/H) THEN 540
410 L=1+INT(LOG(F)/LOG(D(N)))
420 IF L*F(N)]9E13 THEN 550: IF L*H(N)]9E13 THEN 550
430 R=R+1
440 PRINTUSING 460,V,X+L*F(N)
450 PRINTUSING 460, U, -Y+L*H(N)
460 % EXPOSANT DE ### = ##,###,###,###,###
470 PRINTUSING 480,(D(N)! L)*(U! (Y-1))*(V! X)
480% CONTROLE ###,###,###,##########
490 PRINT
500 NEXT N: PRINT
510 FOR I=1 TO 5: G(I)=0: NEXT I
520 PRINT TAB(7); "CONSERVEZ-VOUS U ET V ? "
530 INPUT S: IF S]0 THEN 250: GOTO 40
540 IF N=INT(M/2) THEN 550: GOTO 500
550 PRINT "CAPACITE DEPASSE!  REFAITES VOS JEUX": GOTO 520
560 END
```

3.2. Résultats d'activation

BASE 10 ARGUMENT 2

N	EXPOS. DE 2	EXPOS. DE 10	J(N)	PHI(N) APPROCHE
0	+4	0	3	16,0000000000
1	+0	1	1	10,0000000000
2	+4	−1	4	1,6000000000
3	−16	5	1	1,5258789062
4	+20	−6	8	1,0485760000
5	−176	53	1	1,0440487146
6	+196	−59	9	1,0043362779
7	−1 940	584	1	1,0041727008
8	+2 136	−643	25	1,0001628973
9	−55 340	16 659	1	1,0000919215
10	+57 476	−17 302	1	1,0000709692
11	−112 816	33 961	3	1,0000209508
12	+395 924	−119 185	2	1,0000081147
13	−904 664	272 331	1	1,0000047213
14	+1 300 588	−391 516	1	1,0000033933
15	−2 205 252	663 847	2	1,0000013279
16	+5 711 092	−1 719 210	1	1,0000007375
17	−7 916 344	2 383 057	1	1,0000005903
18	+13 627 436	−4 102 267	4	1,0000001472

PRECISION INSUFFISANTE POUR ACHEVER LE TABLEAU
BASE 10 ARGUMENT 2
CHIFFRES CHOISIS 0 0 0 0 7
DEVELOPPEMENT DECIMAL DU NOMBRE ASSOCIE 7

EXPOSANT DE 2 = 4 122
EXPOSANT DE 10 = 1 239
CONTROLE 7,0087751846

EXPOSANT DE 2 = 1 176 942
EXPOSANT DE 10 = 354 293
CONTROLE 7,0009588345

EXPOSANT DE 2 = 72 592 194
EXPOSANT DE 10 = 21 852 426
CONTROLE 7,0001314822

BASE 125 ARGUMENT 13

N	EXPOS. DE 13	EXPOS. DE 125	J(N)	PHI(N) APPROCHE
0	+2	0	1	169,0000000000
1	+0	1	1	125,0000000000
2	+2	—1	16	1,3520000000
3	—32	17	102	1,0029584630
4	+3 266	—1 735	11	1,0002762859
6	—35 958	19 102	18	1,0000143431
6	+650 510	—345 571	1	1,0000090748
7	—686 468	364 673	1	1,0000052682
8	+1 336 978	—710 244	1	1,0000038066
9	—2 023 446	1 074 917	2	1,0000014615
10	+5 383 870	—2 860 078	1	1,0000008835
11	—7 407 316	3 934 995	1	1,0000005779
12	+12 791 186	—6 795 073	1	1,0000003055
13	—20 198 502	10 730 068	1	1,0000002723
14	+32 989 688	—17 525 141	8	1,0000000332
15	—284 116 006	150 931 196	5	1,0000000063

PRECISION INSUFFISANTE POUR ACHEVER LE TABLEAU
BASE 125 ARGUMENT 13
CHIFFRES CHOISIS 0 0 0 0 1 21
DEVELOPPEMENT DECIMAL DU NOMBRE ASSOCIE 146

EXPOSANT DE 13 = 151 758 128,413
EXPOSANT DE 125 = 80 618 604,161
CONTROLE 146,0007632357

EXPOSANT DE 13 = 743 562 988,659
EXPOSANT DE 125 = 395 003 621,088
CONTROLE 146,0005155846

BASE 5 ARGUMENT 25

N	EXPOS. DE 25	EXPOS. DE 5	J(N)	PHI(N) APPROCHE
0	+1	0	0	25,0000000000
1	+0	1	2	5,0000000000

Les entiers U et V sont puissances d'un même entier.