1

DANS NOS CLASSES

Développement de l'inverse d'un naturel étranger à la base de numération

par Jean SARGENT, I.R.E.M. de Lyon

Il s'agit ici du compte rendu d'une recherche expérimentale effectuée en activité de club par des élèves de Seconde utilisant un mini-ordinateur de bureau.

I — Développement décimal de l'inverse $\frac{1}{p}$ du naturel premier p (différent de 2 et 5)

Etape 1.

Détermination du développement par simple division en utilisant le nombre maximal de décimales possibles sur la calculatrice (sans programmation). Les élèves obtiennent immédiatement :

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ $\qquad \frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ $\qquad \frac{1}{11} = 0,\overline{09}$

$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$ $\qquad \frac{1}{37} = 0,\overline{027}$ $\qquad \frac{1}{41} = 0,\overline{02439}$

$\frac{1}{73} = 0{,}\overline{01369863}$ $\quad$ $\frac{1}{101} = 0{,}\overline{0099}$ $\quad$ $\frac{1}{137} = 0{,}\overline{00729927}$

$\frac{1}{239} = 0{,}\overline{0041841}$ $\quad$ $\frac{1}{271} = 0{,}\overline{00369}$ $\quad$ $\frac{1}{4649} = 0{,}\overline{0002151}$

A ce stade initial de la recherche, les élèves ont déjà observé que la plus petite longueur de période (nous dirons par la suite, par abréviation, la longueur de période) du développement décimal de l'inverse $\frac{1}{p}$ du naturel premier p est strictement inférieure à p, c'est alors une bonne occasion pour démontrer ce résultat. Certains élèves découvrent même, expérimentalement, que cette longueur est un *diviseur* de $(p-1)$.

Etape 2.

Le problème se pose alors de poursuivre l'expérimentation pour des développements de plus grande longueur de période.

Ce problème est résolu en analysant l'algorithme de la division avec décimales. Il s'agit d'enchaîner des divisions euclidiennes successives, le reste de chacune de ces divisions euclidiennes (zéro décimale) étant multiplié par dix pour devenir le dividende de la division euclidienne suivante.

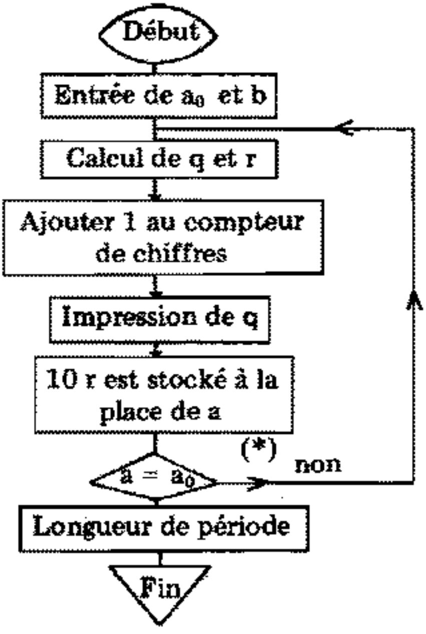
Les quotients entiers successifs donnent alors les chiffres du développement décimal recherché.

Organigramme pour le calcul du développement décimal du rationnel $\frac{a}{b}$ $\left(\frac{a}{b} < 1\right)$

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b$$

d'où $q = \text{int}\left(\frac{a}{b}\right)$ et $r = a - bq$

Dans le cas présent : $a_0 = 1$ et $b = p$



Remarque :

Si au lieu de multiplier le reste par 10 on le multiplie par 10^n, on obtient les chiffres par paquets de n ; mais alors, le test d'arrêt devient inopérant et il faut stopper le calculateur manuellement.

Cet organigramme facile à implanter sur tout calculateur programmable, permet de pousser plus avant l'étude des développements décimaux d'un rationnel. On peut même faire découvrir aux élèves qu'il permet d'obtenir le développement en base s (positive) d'un rationnel $\frac{a}{b}$ (strictement inférieur à 1) à condition de remplacer 10 par s.

Avec cette méthode, on peut rechercher dans diverses bases, les développements des inverses d'autres naturels.

On constate, par exemple, que les développements des inverses des naturels premiers :

17, 19, 23, 29, 31, 43, 53, 79 ont pour

longueur de période :

(*) Test d'arrêt lorsque tous les chiffres de la plus petite longueur de période sont obtenus.

16, 18, 22, 28, 15, 21, 13, 13 en base dix

8, 9, 11, 14, 15, 21, 26, 39 en base neuf

2, 9, 11, 7, 5, 7, 13, 39 en base seize.

II — Développement décimal de l'inverse $\frac{1}{p^n}$ du naturel primaire p^n

1°) *Développement décimal des inverses des puissances de 7*

$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ la longueur de période est 6

$\frac{1}{7^2} = 0,\overline{020408163265306122448979591836734693877551}$
la longueur est 42 (soit 6×7)

$\frac{1}{7^3} = 0,\overline{002915451895043731778425655976676384839659 14}$
$\overline{577259475218658892128279883381924198250728 86}$
$\overline{297376093294460641399416909620991253644314 86}$
$\overline{880466472303206997084548104956268221574344 02}$
$\overline{332361516034985422740524782341107871720116 61}$
$\overline{807580174927113702623906750539358600583090 37}$
$\overline{90087463556851311953352769679 3}$ la longueur est
$6 \times 7 \times 7$

2°) *Développement décimal des inverses des puissances de 11*

$\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$ la longueur est 2

$\frac{1}{11^2} = 0,\overline{0082644628099173553719}$ la longueur est 2×11

$\frac{1}{11^3} = 0,\overline{00075131480090157776108189331329827197595792}$
$\overline{63711495116453794139744552967693463561232156}$
$\overline{27347858752817430503380916604057099924868519}$
$\overline{90984222389181066867017280240420736288504883}$
$\overline{54620586025544703230653643876784372652141247}$
$\overline{1825694966190833959429}$ la longueur est $2 \times 11 \times 11$

3°) ***Développement décimal des inverses des puissances de 13***

$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$ la longueur est 6

$\frac{1}{13^2} = 0,\overline{005917159763313609467455621301775147928994 08}$
$\overline{284023668639053254437869822485207 1}$ la longueur est 6×13

4°) ***Développement décimal des inverses des puissances de 37***

$\frac{1}{37} = 0,\overline{027}$ la longueur est 3

$\frac{1}{37^2} = 0,\overline{00073046018991964937910883856829802775748721}$
$\overline{69466764061358655953250547845142439737034331}$
$\overline{6289262235208181154127 1}$ la longueur est 3×37

5°) ***Développement décimal des inverses des puissances de 3***

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$ la longueur est 1

$\frac{1}{27} = 0,\overline{037}$ la longueur est 3

$\frac{1}{81} = 0,\overline{012345679}$ la longueur est 9

$\frac{1}{243} = 0,\overline{004115226337448559670781893}$ la longueur est 27

$\frac{1}{729} = 0,\overline{00137174211248285322359396433470507544581618}$
$\overline{6556927297668038408779149519890260631}$ la longueur est 81.

Conjectures

- Développements décimaux des inverses des puissances d'un naturel premier p (p différent de 2, de 3, de 5)

  Si $\frac{1}{p}$ a pour longueur de période t, $\frac{1}{p^n}$ a pour longueur de période tp^{n-1}

- Développements décimaux des inverses des puissances de 3

  Pour $n \geqslant 2$, $\frac{1}{3^n}$ a pour longueur de période 3^{n-2} .

III — Développement de l'inverse d'un naturel étranger à la base

Exemples : $\dfrac{1}{7 \times 13} = 0,\overline{010989}$ la longueur est 6

$\dfrac{1}{7 \times 11 \times 13} = \overline{0,000999}$ la longueur est 6

$$\frac{1}{7 \times 7 \times 13} = 0,\overline{001569858712715855572998430141287284144}$$
$$\overline{427}$$
la longueur est 42

$$\frac{1}{7 \times 7 \times 11 \times 13} = 0,\overline{00014271442842871414299985728557157}$$
$$\overline{1285857}$$
la longueur est 42

$$\frac{1}{7 \times 11 \times 13 \times 13} = 0,\overline{0000768462306923845385383846922308}$$
$$\overline{46076999923153769307615461461615307}$$
$$\overline{769153923}$$
la longueur est 78

$\dfrac{1}{37 \times 43} = 0,\overline{000628535512256442489}$ la longueur est 21

$$\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7} = 0,\overline{000755857898715041572184429327286}$$
$$\overline{470143613}$$
la longueur est 42

$$\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7} = 0,\overline{000251952632905013857394809775}$$
$$\overline{762156714537666918619299571680}$$
$$\overline{524061476442428823381204333585}$$
$$\overline{285966238347190728143109095490}$$
$$\overline{047871}$$
la longueur est 126

Conjecture

Après l'étude des cas précédents et aussi d'autres exemples tels que les développements des inverses de :

3×13 , $3^2 \times 13$, 37×41 , 31×43 , 19×31 , 29×239 ,
31×241 , 163×211 , ... etc ,

choisis pour leur longueur de période relativement courte, il semble que l'on puisse conjecturer que la longueur de période de l'inverse d'un naturel soit le p.p.c.m. des longueurs de périodes des inverses des primaires de sa décomposition primaire.

IV — Conclusion

Il y a eu ici une étude expérimentale et très peu de justifications mathématiques.

En seconde, cette expérimentation a cependant l'intérêt d'amener les élèves à réfléchir sur la pratique de la division avec décimales et la présentation de son algorithme sous forme d'organigramme. Elle les amène aussi à se pencher sur la pratique du changement de base pour un nombre à virgule.

En terminale C, cette expérimentation peut permettre, de plus, de motiver les élèves pour amorcer une étude mathématique de certains résultats conjecturés (cas I et III). C'est donc un bon prétexte à des calculs arithmétiques, notamment à l'utilisation des congruences, du p.g.c.d., du p.p.c.m. et éventuellement du théorème de Fermat et de l'ordre d'un élément du groupe multiplicatif $((Z/pZ)^*, \times)$.

Remarque. Le lecteur pourra démontrer que la conjecture : "Si $\frac{1}{p}$ a pour longueur de période t, $\frac{1}{p^n}$ a pour longueur de période tp^{n-1}" concernant le développement *décimal* d'un naturel *premier* p *étranger à dix*, est vérifiée pour la plupart de ces naturels premiers.

P désignant l'ensemble des naturels premiers, le sous-ensemble E des exceptions à cette conjecture est :

$$\{p \; ; \; P \; ; \; 10^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2\} \; .$$

Chacun sait que 3 appartient à E et on peut calculer que les seuls éléments de E inférieurs à 10 000 sont 3 et 487 (pour $n \geqslant 2$, $\frac{1}{487^n}$ a pour longueur de période 486.487^{n-2}).