Le plan des Vingt-cinq Points

par Jacques DUMA, Paris.

Le plan des vingt-cinq points est un exercice qui s'adresse aux élèves de première et terminale C et E.

Après une présentation assez détaillée des congruences modulo 5 puis de la structure de corps de Z/5Z, il permet de faire appréhender aux élèves de façon relativement concrète la différence entre les *structures d'espaces vectoriel et affine.*

La structure *circulaire* du plan surprend et intéresse les élèves ; de plus, le faible nombre d'éléments permet des représentations en extension des vecteurs, des translations, des sous-espaces et des variétés affines, ainsi que des exercices de dénombrement.

1. RELATION DE CONGRUENCE

La relation de congruence modulo 5 est définie dans Z :

$$(x \equiv y\ [5]) \iff (\quad k \in Z, x - y = 5k)$$

$Z/5Z = \quad 0,1,2,3,4 \quad$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence.

2. ETUDE D'UN CORPS

$K = Z/5Z$ muni des lois $+$ et $\cdot$ a une structure de corps commutatif.

L'*opposé* de x est $4x$.

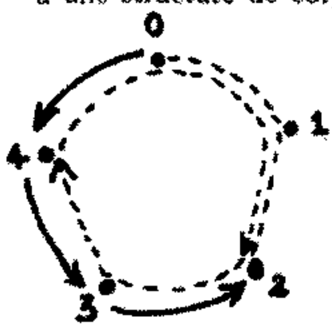
L'*inverse* de x est x^3 .

K a une structure *circulaire*.

Exemple :

$4 + 3 = 2$

$3 \cdot 4 = 2$



3. ETUDE D'UN ESPACE VECTORIEL

3.1. Le plan vectoriel

3.1.1. $V = K \times K$

$K \times K$ a une structure d'espace vectoriel de dimension *deux* sur K. Cet ensemble a 25 éléments.

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in K$ et $y \in K$.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une *base* de cet espace vectoriel.

3.1.2. *Les sous-espaces de* V

V est un ensemble fini, on peut dénombrer *tous* ses sous-espaces vectoriels :

$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un sous-espace de dimension *zéro.*

Les sous-espaces de dimension *un* sont, soit confondus, soit d'intersection réduite au vecteur nul ; il y a donc dans V *six droites vectorielles distinctes* (quatre vecteurs non nuls dans chacune, et V a 24 éléments non nuls : donc on a $24/4 = 6$ sous-espaces de dimension un) :

$$U_a = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U_b = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U_c = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U_d = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U_e = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

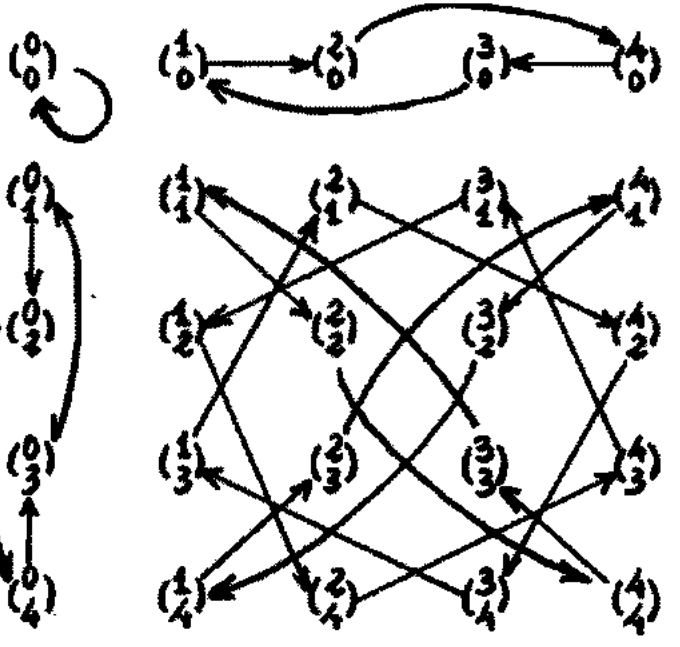
$$U_f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

3.1.3. *Les endomorphismes de* V

A chaque endomorphisme de V est associée une matrice 2×2. Il y a donc $5^4 = 625$ endomorphismes distincts dans V.

Il y a quatre homothéties. Par exemple, l'homothétie de rapport 2 dont la matrice dans la base du paragraphe 3.1.1. est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici le diagramme sagital de cette homothétie.



On remarquera que les droites vectorielles sont globalement invariantes.

3.2. Compléments

Généralisons à $E = K \times K \times K$ par la même méthode qu'en dimension deux (3.1.2.). Un espace de dimension *trois* contient 31 sous-espaces de dimension *un*.

Le dénombrement des plans vectoriels est plus difficile. En dimension trois, deux plans vectoriels sont, soit confondus, soit leur intersection est une droite.

Six plans admettent la même droite pour "charnière" et le plan contient 6 droites distinctes. Il y a donc 31 plans vectoriels distincts dans E. (5 plans par chacune des 6 droites d'un plan choisi plus ce dernier. $5 \times 6 + 1$).

4. ETUDE D'UN ESPACE AFFINE

4.1. Le plan des 25 points

On peut définir une structure de *plan affine* associé au *plan vectoriel* V, sur tout ensemble de 25 points. Il suffit pour cela de définir les *translations.*

P est un ensemble de 25 points.

Tout bipoint sera représenté par une flèche $A \longrightarrow B$.

Il est à noter que P étant un ensemble fini discret, seuls A et B appartiennent au plan P, la flèche symbolise simplement que A est l'origine et B l'extrémité du bipoint (A,B).

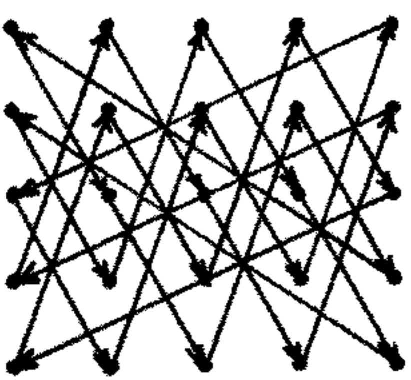
4.2. Les translations ponctuelles

4.2.1. *Les vecteurs du plan*

Une translation ponctuelle est une *bijection* de P sur P .

$$t_{\vec{u}} \left| \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ A \longmapsto t_{\vec{u}}(A) = A' \end{array} \right.$$

A' est l'image de A par la translation $t_{\vec{u}}$. On le représente en dessinant le bipoint (A,A'). On obtient ainsi le diagramme sagittal de la translation $t_{\vec{u}}$.



Exemple :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AA'}$$

comme :

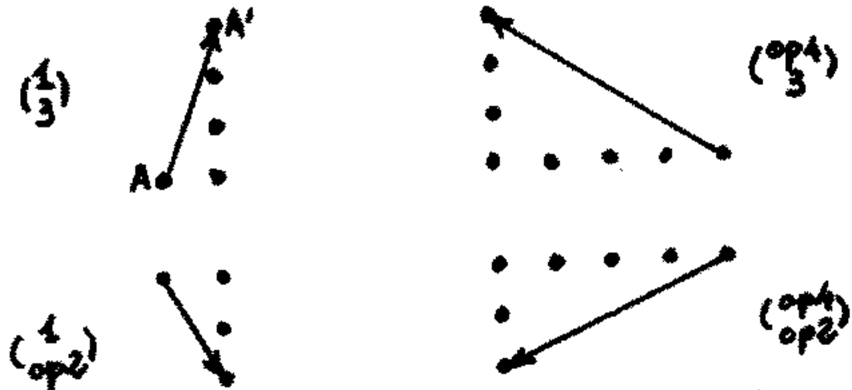
1 est l'opposé de 4
3 est l'opposé de 2

il y a quatre types de bipoints équipollents distincts :

Un vecteur du plan est une classe d'équivalence de bipoints équipollents, cette figure représente "en extension" un vecteur du plan.

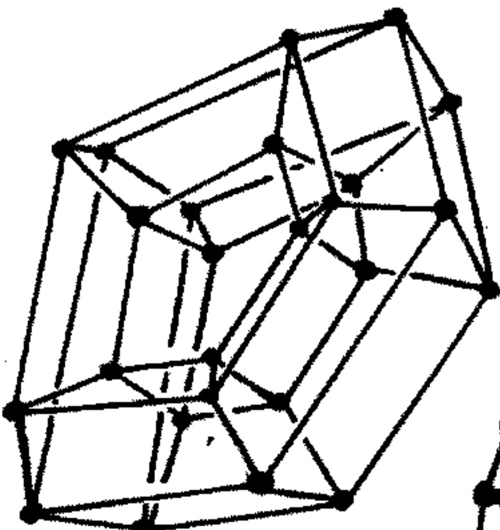
4.2.2. *Structure de P*

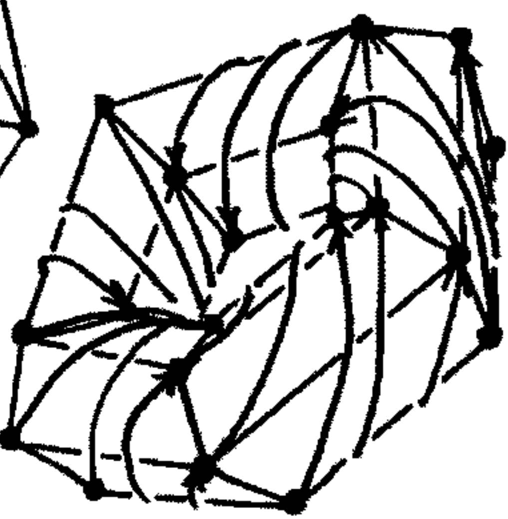
Dans l'exemple du paragraphe 4.2.1., on a remarqué quatre types distincts de bipoints équipollents :



Si l'on pense à la structure "circulaire" de K en reliant le côté gauche du plan P à son côté droit, puis en refermant le haut sur le bas, P a une "*structure de tore*". La translation correspond à un "*glissement*" du tore sur lui-même.

Le tore des 25 points





La translation de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.3. Propriétés affines

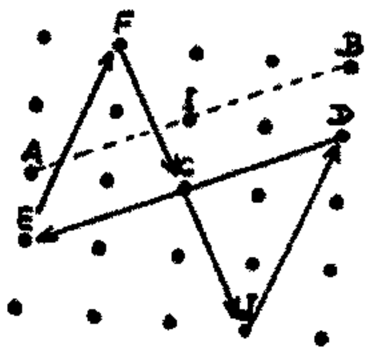
4.3.1. *Milieu d'un bipoint*

Le milieu du bipoint (A,B) est le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; de même, J est le milieu de (C,D), on vérifie que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JD}$.

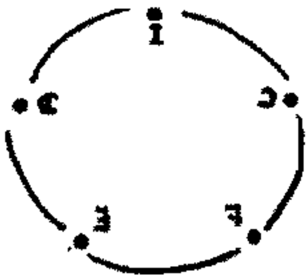
Ce milieu n'est pas situé "*entre*" C et D , mais il est bien sur la droite CD = C,J,D,E,F .

En effet,

$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FC}$.



Si l'on se ramène à la structure circulaire, la position du milieu se rapproche davantage de la notion *intuitive usuelle*.



On remarque ainsi que :

I est le milieu de (C,D)
F celui de (C,E)
D celui de (C,F)
E celui de (C,J).

Cette différence avec les structures usuelles vient, entre autre, du fait que la structure d'ordre de **R** *ne se transpose pas sur* **K** .

4.3.2. *Parallélogramme*

(A , B , C , D) est un *parallélogramme* si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Une fois encore la structure de tore de P nous donne dans la représentation plane des figures inattendues.

Cependant, dans les deux cas, les diagonales se coupent en leur milieu.

I milieu de (B,D) et (A,C)
I' milieu de (B',D') et (A',C').

4.3.3. *Repérage du plan*

Le choix arbitraire de trois points non alignés (O,I,J) permet un repérage de P .

Exemple :

M milieu de (A,B)

A de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

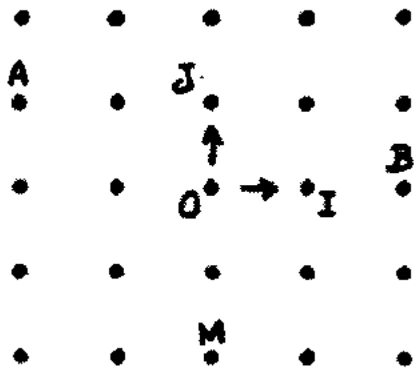
B $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

On a :

$$\overrightarrow{OM} = 3\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

(3 inverse de 2)

donc M $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.



4.4. Variétés affines

4.4.1. *La droite affine*

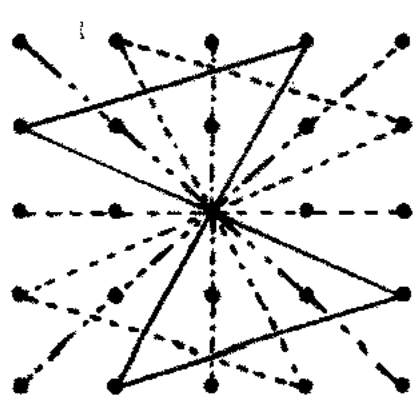
$D_{A,U} = \{ M \in P \,/\, \overrightarrow{AM} \in U \}$ est la droite passant par le point A de P et de direction U, sous-espace de V.

$AB = \{ M \in P \,/\, (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ liés $\}$ est la droite passant par les points A et B.

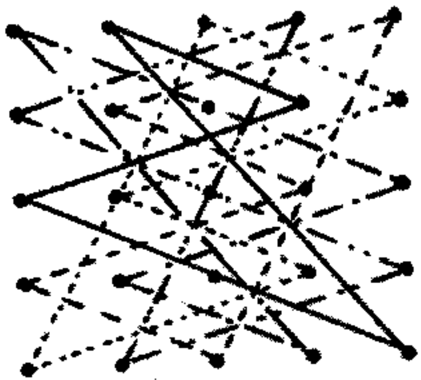
Une droite affine est donc un ensemble de cinq points.

On a vu au paragraphe 3.1.2. qu'il y a 6 sous-espaces de dimension un dans V ; on peut donc construire six droites affines distinctes par un point fixe donné.

Si deux droites ont la même direction, elles sont parallèles, c'est-à-dire, *disjointes* ou *confondues*.



Pour une direction donnée, il y a donc cinq droites affines distinctes dans le plan P.



Les translations de vecteur appartenant à la direction, laissent les droites globalement invariantes. (Voir les ressemblances avec la figure du paragraphe 4.2.1.).

Ci-dessus les cinq droites de direction U_e (voir 3.1.2.).

4.4.2. *Problêmes de dénombrement*

Pour terminer, on peut compter les *variétés affines*. Il y a 30 droites affines dans P. (6 directions et 5 droites distinctes pour chacune).

Si l'on se place dans un espace affine de dimension trois (ensemble de 125 points) à l'aide du paragraphe 3.2.2., on dénombrera 775 droites distinctes, (25 droites distinctes pour chacune des 31 directions) et 155 plans (5 plans de 25 points pour chacune des 31 directions).

... mais il est possible d'imaginer une suite ...

BIBLIOGRAPHIE

Maurice GLAYMANN : *Initiation aux espaces vectoriels*, Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 273, mars-avril 1970.