Initiation aux probabilités : une situation ouverte

par Claude ESTEZET, professeur au Lycée d'Etat de Montceau-les-Mines.

Je n'ai pas remarqué un grand enthousiasme chez les collègues quand il s'agit d'enseigner les probabilités et les statistiques ! Ca angoisse plutôt, ou ça ennuie ; en tout cas ça dérange. Au mieux, on laisse ça pour mai, juin, et on l'assène à grands coups d'axiomatique... Or probabilités et statistiques sont des outils très importants de maîtrise du réel : voilà enfin une partie du programme où le professeur se sent à l'aise pour répondre à la brûlante question : "à quoi ça sert tout ça ?" ; voilà une notion qui permet par exemple de démystifier les jeux (tiercé, roulette...) et les sondages qui inondent le citoyen, de plus d'émettre des doutes sur le mythe de la Mathématique-Science-Pure sans contradiction. En outre, c'est une matière particulièrement intéressante sur le plan didactique : elle permet une foule d'expérimentation et donc se prête particulièrement bien à des méthodes actives.

La complète inutilité de mon certificat de licence sur la question (magnifique théorie de la mesure) ne me mettait guère à l'aise pour enseigner cette partie du programme ; alors, m'inspirant fortement du livre de Maurice Glaymann et Tamas Varga et de celui d'Arthur Engel, je me suis fait réellement plaisir avec mes élèves : j'ose penser que ceux-ci se sont autant amusés que moi (enfin nous n'avons pas baîllé d'ennui !...).

Aux Journées Inter-IREM sur la pédagogie par objectifs (Orléans, 4 et 5 Février 1977), un petit groupe s'est penché sur une situation aléatoire, dans le but d'écrire des objectifs pédagogiques que l'on pourrait atteindre au travers de celle-ci. J'ai eu envie d'approfondir cette question.

Voici l'énoncé :

On considère deux piles de blocs : la pile 0 formée de a blocs, la pile 1 formée de b blocs ; on lance une roulette et on obtient 0 ou 1 avec la même probabilité : si on obtient 0, on enlève un bloc de la pile 0 ; dans le cas contraire, on enlève un bloc de la pile 1 ; on s'arrête dès qu'une pile est épuisée. *

Voici quelques questions que cette situation suggère :

I *Stop !*

Pourquoi ne pas laisser deviner aux élèves la suite ?

Voilà un problème ouvert : à eux d'imaginer les questions qu'on peut se poser...

En voici quelques-unes :

— Quel est le *nombre moyen* de blocs à retirer ?

— Quelle est la *probabilité* pour que ce soit la pile 0 qui soit épuisée ?

— Quel *nombre moyen* de blocs reste-t-il sur une pile lorsque l'autre est épuisée ?

---

* Proposée par L. Rade dans son livre "Tentez votre chance avec votre calculateur" traduit de l'anglais par Maurice Glaymann, CEDIC 1977.

II *Deuxième phase primordiale*, qu'il ne faut surtout pas élider et/ou éluder : la *phase de tâtonnement*.

— Relire l'énoncé jusqu'à sa parfaite compréhension.

— Imaginer une situation réelle (cet énoncé est une formulation particulière du problème de Banach : "un fumeur a, dans ses poches, deux boîtes d'allumettes. Il tire au hasard une boîte pour y prendre une allumette...").

— Au besoin (pourquoi pas ?) faire des essais avec deux tas de stylos.

— S'appuyer sur des dessins : schématiser les deux piles.

— Devant le problème trop complexe, s'attacher au cas particulier a = b ; et comme tout reste encore bien abstrait, regarder ce qui se passe quand a = b = 3, puis a = b = 4.

Voilà donc un exemple de problème apparemment simple, et dont la solution est loin d'être évidente. C'est l'occasion aussi pour le professeur de donner un problème dont il ne connaît pas à priori une solution (dans le cas général $a \neq b$) (*). Parfait pour démythifier l'image du professeur—Moïse—sur—son—estrade, qui maîtrise parfaitement *toute* la mathématique.

III Etude du problème dans les cas particuliers a = b = 3, puis 4, puis 5.

Quel est le nombre moyen ℓ_3 de blocs à retirer pour détruire une des deux piles ?

0 1

① Peut-on encadrer ℓ_3 ? Par le tâtonnement, puis par le raisonnement, on établit que $3 \leqslant \ell_3 \leqslant 5$?

② Il se trouvera bien un élève pour affirmer $\ell_3 = 4$, arguant de la "symétrie" du problème. C'est l'occasion de développer chez les élèves une attitude critique devant une hypothèse ; autrement dit, de leur apprendre à maîtriser leur intuition... et dans le cas des probabilités, d'en profiter pour les mettre

(*) Voir à ce sujet l'article de P.L. Hennequin, page 61 et suivantes.

en garde contre l'intuition justement (les probabilités représentent un terrain où celle-ci trompe très souvent). Il n'en reste pas moins que l'attitude qui consiste à essayer de deviner les résultats, n'est pas à bannir, mais plutôt à encourager.

(3) Il s'agit maintenant de valoriser les représentations (arbres, quadrillages, etc...) qui ne manquent pas d'être esquissées plus ou moins timidement.

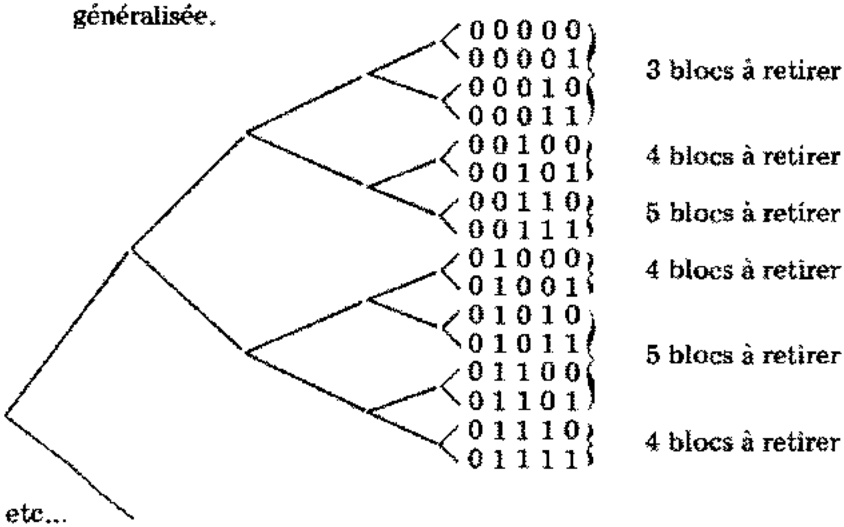
a) La première représentation qui vient peut-être à l'esprit est l'arbre "oui — non" sous sa forme traditionnelle.

— Certains élèves auront sans doute besoin de tracer l'arbre complet pour se convaincre de sa symétrie (on obtient les *mêmes* suites de 5 chiffres lorsqu'on *échange* 0 et 1). N'imposons pas ce résultat.

— L'attitude la plus simple consiste alors à compte le nombre de suites (donc de "chemins") nous amenant à détruire une pile en 3 coups, en 4 coups, en 5 coups ; puis à écrire la moyenne

$$\ell_3 = \frac{8 \times 3 + 12 \times 4 + 12 \times 5}{32} = 4{,}125$$

(la notion de *moyenne*, j'ai pu le constater, n'est pas tellement évidente, même chez des élèves de première : c'est l'occasion d'en parler). Cependant, cette façon de procéder n'est valable que dans les cas particuliers et ne peut être généralisée.



— On sent à ce niveau qu'il faut avoir recours à la combinatoire pour *raisonner*.

• *Nombre de "chemins" amenant à détruire une pile en trois coups :*

□□□□□

— Il faut placer 3 zéros (ou 3 uns) dans les 3 premières cases.

— Il reste donc deux cases à remplir soit par 0, soit par 1.
Il y a $2^3 = 8$ chemins.

• *Nombre de "chemins" amenant à détruire une pile en quatre coups :*

— La situation 3 zéros (ou 3 uns) en tête ne peut se produire : il faut placer 1 (respectivement 0) dans l'une des trois premières cases, soit C_3^1 façons.

— Dans la quatrième case, se trouve 0 (respectivement 1)

1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0

— Pour chacune de ces C_3^1 façons, il y a deux manières de remplir la cinquième case (0 ou 1).
Il y a donc $2 \times C_3^1 \times 2 = 12$ chemins.

• *Nombre de chemins amenant à détruire une pile en cinq coups :*

— Il y a nécessairement 2 uns (et donc 2 zéros) parmi les quatre premières cases, soit C_4^2 façons.

— Et pour chacune de ces façons, il y a deux manières de remplir la dernière case, il y a donc $C_4^2 \times 2 = 12$ chemins.
D'où la moyenne :

$$\ell_3 = \frac{8 \times 3 + 12 \times 4 + 12 \times 5}{32} = \frac{33}{8} = 4{,}125.$$

Etude du cas $a = b = 4$: même raisonnement.
On a l'encadrement : $4 \leqslant \ell_4 \leqslant 7$.
Le nombre total de chemins est : $2^7 = 128$.
On considère les suites de 7 chiffres formés de 0 et 1.

En 4 coups

2^3 façons de remplir les 3 dernières cases
d'où $\quad 2^4 = 16$ chemins.

En 5 coups

C_4^1 façons de placer 1 dans l'une des 4 premières cases (respectivement 0).

5ème case remplie nécessairement par 0 (respectivement 1).
2^2 façons de remplir les 2 dernières cases
d'où $\quad 2 \times C_4^1 \times 2^2 = 32$ chemins.

En 6 coups

C_5^2 façons de placer 2 uns dans les 5 premières cases (respectivement 0).
6ème case remplie nécessairement par 0 (respectivement 1).
2 façons de remplir la dernière case
d'où $\quad 2 \times C_5^2 \times 2 = 40$ chemins.

En 7 coups

C_6^3 façons de placer 3 zéros dans les 6 premières cases.
7ème case remplie nécessairement par 0 (respectivement 1).
d'où $\quad 2 \times C_6^3 = 40$ chemins.

$$\ell_4 = \frac{2^4\ C_3^0 \times 4 + 2^3\ C_4^1 \times 5 + 2^2\ C_5^2 \times 6 + 2\ C_6^3 \times 7}{2^7} = \frac{93}{16} = 5{,}8125\ .$$

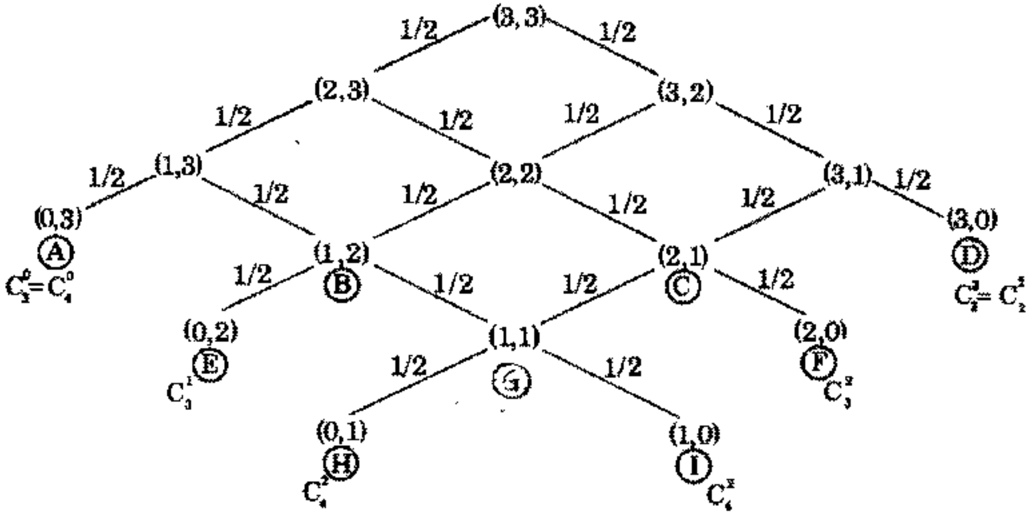
Cette approche est assez longue, mais elle a le mérite de faire faire des manipulations pas tout à fait évidentes sur la combinatoire.
La généralisation de ce raisonnement semble vraiment délicate pour les élèves. De toutes manières, il faudrait en détailler toutes les étapes sans imposer directement le résultat final, si on la fait ... (personnellement, je n'en vois guère l'intérêt).

Encadrement : $\qquad n \leqslant \ell_n \leqslant 2n - 1$

$$\ell_n = \frac{2^n\, C_{n-1}^0 \times n + 2^{n-1}\, C_n^1 \times (n+1) + \dots + 2^2\, C_{2n-3}^{n-2}\,(2n-2) + 2^1\, C_{2n-2}^{n-1}\,(2n-1)}{2^{2n-1}}$$

b) On peut suggérer la représentation suivante (il est fort probable que certains élèves y penseront, s'ils ont déjà utilisé de tels schémas) :

Cas a = b = 3.



— A une étape donné, dans le couple (a, b) a représente le nombre de blocs de la pile 0, b représente le nombre de blocs de la pile 1.

— On sait que les nombres de chemins aboutissant aux points A, B, C, D sont ceux de la troisième ligne du triangle de Pascal C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3 .

— En E (respectivement en F) arrivent autant de chemins qu'en B (respectivement en C), soit $C_3^1 = C_3^2$.

— En G (par suite en H et I) arrivent C_4^2 chemins : $C_3^1 + C_3^2$.

— La probabilité de suivre un des chemins menant à E, par exemple, est $\frac{1}{2^4}$.

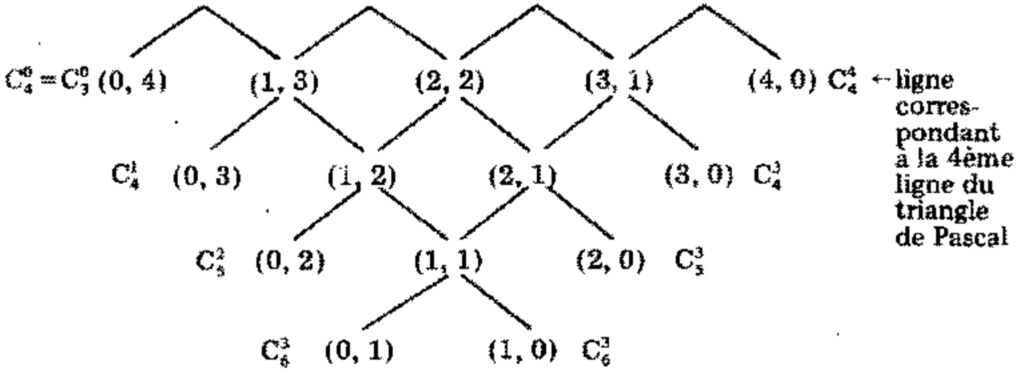
Etant donné qu'il y a C_3^1 chemins arrivant en E, la probabilité d'arriver en E est donc $C_3^1 \times \frac{1}{2^4}$.

Or en allant en E, on détruit une pile en 4 coups.

Enfin, vu la *symétrie* du schéma, on peut écrire :

$$\ell_3 = 2\left(\frac{1}{2^3} C_2^0 \times 3 + \frac{1}{2^4} C_3^1 \times 4 + \frac{1}{2^5} C_4^2 \times 5\right) = 4{,}125.$$

Cas $a = b = 4$



d'où :

$$\ell_4 = 2\left(\frac{1}{2^4} C_3^0 \times 4 + \frac{1}{2^5} C_4^1 \times 5 + \frac{1}{2^6} C_5^2 \times 6 + \frac{1}{2^7} C_6^3 \times 7\right) = 5{,}813\ldots$$

Cas $a = b = 5$ $\qquad 5 \leqslant \ell_5 \leqslant 9$

$$\ell_5 = 2\left(\frac{1}{2^5} C_4^0 \times 5 + \frac{1}{2^6} C_5^1 \times 6 + \frac{1}{2^7} C_6^2 \times 7 + \frac{1}{2^8} C_7^3 \times 8 + \frac{1}{2^9} C_8^4 \times 9\right)$$

IV *La généralisation* se fait alors facilement

C_{n-1}^0 (0, n)

C_n^1 (0, n − 1)

C_{n+1}^2 (0, n − 2)

C_{n+2}^3 (0, n − 3)

$\vdots$

C_{2n-3}^{n-2} (0, 2)

C_{2n-2}^{n-1} (0, 1)

Encadrement $\qquad n \leqslant \ell_n \leqslant 2n - 1$

$$\ell_n = 2\left[\frac{1}{2^n} C_{n-1}^0 \times n + \frac{1}{2^{n+1}} C_n^1 (n+1) + \frac{1}{2^{n+2}} C_{n+1}^2 (n+2) + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} (2n-1)\right]$$

$$\ell_n = \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{2^{i-1}} C_{i-1}^{i-n}\, i$$

Ecriture que je me garde bien d'employer avec des élèves !

Cette deuxième méthode permet une démonstration plus accessible et plus performante que la première.

Remarques

1) Une autre représentation très voisine de la précédente est celle-ci :

	1											
pile 1	1	7	28	84	210	462	924					
	1	6	21	56	126	252	462					
	1	5	15	35	70	126	210					
	1	4	10	20	35	56	84	120				
	1	3	6	10	15	21	28	36	45			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	pile 0

D ——→ a = 3 a = 4 a = 5

Les coefficients bonomiaux à utiliser pour $a = 5$ par exemple se lisent sur la 5ème colonne, puis sur la 5ème ligne, dans l'ordre 1, 5, 15, 35, 70, 70, 35, 15, 5 et 1.

Retirer un bloc de la pile 0 est représenté par un déplacement vers la droite.
Retirer un bloc de la pile 1 est représenté par un déplacement vers le haut.

2) On peut faire remarquer aux élèves que l'étude des cas particuliers ($a = 3$, $a = 4$, $a = 5$) a été très précieuse pour la généralisation.

3) Cette étude peut servir à motiver l'introduction des notions d'*aléa numérique* et *d'espérance mathématique d'un aléa numérique*.

Cas $a = b = 3$

Ω : ensemble des suites formées de 0 et 1 conduisant à la destruction d'une pile. Exemple 111 ; 1000 ; 10010 sont des éléments de Ω).

La "*longueur*" d'une suite est définie comme étant le nombre de chiffres la composant.

$$X \left| \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega_i) \end{array} \right. \qquad X(\omega_i) \text{ est la longueur de } \omega_i.$$

$$P(X = 3) = 2\,\frac{C_2^0}{2^3} \quad ; \quad P(X = 4) = \frac{C_3^1}{2^4} \times 2 \quad ; \quad P(X = 5) = \frac{C_4^2 \times 2}{2^5}$$

$$E(X) = 3\,P(X = 3) + 4\,P(X = 4) + 5\,P(X = 5).$$

V *Simulation*

A ce niveau, on peut très bien essayer de *simuler* cette situation, c'est-à-dire se contenter d'un modèle approché : on remplace l'étude du phénomène aléatoire en utilisant une table de nombres aléatoires qui imite le phénomène. J'ai pu remarquer combien faire une simulation est motivant et enthousiasmant pour les élèves. Il y a d'abord la phase de construction d'une table de nombres aléatoires et toutes les questions qui s'y rapportent : — comment construire une telle table ? (découverte des générateurs de nombres aléatoires) ; — cette table imite-t-elle bien le hasard ? (mise à jour des moyens permettant de la tester) ...

Pour simuler ce problème, on utilise une table en *base deux* (ne comportant que des zéros et des uns). Décomposons cette table en tranches : chaque tranche ou chaque suite (de longueur variable) conduisant à la destruction d'une pile. Il suffit ensuite de calculer la longueur de chaque suite et d'établir les statistiques.

Exemple : $a = b = 3$

suites	longueur
0 0 1 1 1	5
1 0 0 0	4
1 0 1 1	4
0 0 0	3
....	....

Voici les résultats que j'ai trouvés dans le cas $a = b = 3$

longueur des suites	3	4	5	total
effectifs	34	50	59	143

La moyenne est $\dfrac{3 \times 34 + 4 \times 50 + 5 \times 59}{143} = 4{,}174$

alors que le résultat théorique est $\ell_3 = 4{,}125$.

L'erreur commise est inférieure à 0,05.

Cas $a = b = 4$

longueur des suites	4	5	6	7	total
effectifs	10	26	33	33	102

La moyenne est $\dfrac{4 \times 10 + 5 \times 26 + 6 \times 33 + 7 \times 33}{102} = 5{,}872$.

(Le résultat théorique est 5,813 ...).

Cas $a = b = 2$

longueur des suites	2	3	total
effectifs	117	115	232

La moyenne est $\dfrac{117 \times 2 + 115 \times 3}{232} = 2{,}496$

(Résultat théorique : 2,5)

(Remarque : Avec une autre table de nombres aléatoires en base 2, j'ai trouvé 4,142 dans la cas $a = b = 3$, l'effectif total étant 175).

Il est assez remarquable d'obtenir des résultats si *proches* des résultats théoriques. On aurait pu encore améliorer ces résultats expérimentaux en prenant un nombre plus grand de suites, mais il en faudrait 100 fois plus pour chaque nouvelle décimale.

VI *Quel nombre moyen de blocs reste-t-il sur une pile lorsque l'autre est épuisée ?*

Quand une pile est épuisée, il reste sur l'autre $r = 2n - \ell$ blocs, ℓ étant le nombre de blocs qu'il a fallu retirer pour épuiser le première pile. Un raisonnement sur le "passage" à la moyenne sera peut-être nécessaire, pour en déduire que $r_n = 2n - \ell_n$ (r_n étant le nombre moyen de blocs restants). Méthode bien sûr très commode quand on a déjà calculé ℓ_n. Mais pour être vraiment convaincus, certains élèves préfèreront peut-être un raisonnement identique à celui qui leur a permis de déterminer ℓ_n. Ce qui donne d'ailleurs une formule où ℓ_n n'intervient pas.

Cas $a = b = 3$

Reprenons le schéma

$$
\begin{array}{cccccccc}
(0,3) & & & & & & & (3,0) \\
C_2^0 & (0,2) & & & & & (2,0) & \\
 & C_3^1 & (0,1) & & (1,0) & & & \\
 & & C_4^2 & & & & &
\end{array}
$$

Dans le couple (0,3) par exemple, 0 indique que la pile 0 est détruite, et 3 indique qu'il reste 3 blocs sur la pile 1. On en déduit immédiatement la moyenne des blocs restants r_3

$$r_3 = 2\left(\frac{1}{2^3} C_2^0 \times 3 + \frac{1}{2^4} C_3^1 \times 2 + \frac{1}{2^5} C_4^2 \times 1\right) = 1{,}875$$

Cas $a = b = 4$

De même :

$$r_4 = 2\left(\frac{1}{2^4} C_3^0 \times 4 + \frac{1}{2^5} C_4^1 \times 3 + \frac{1}{2^6} C_5^2 \times 2 + \frac{1}{2^7} C_6^3 \times 1\right) = 2{,}1875.$$

Cas $a = b = n$

$$r_n = 2\left[\frac{1}{2^n} C_{n-1}^0 \times n + \frac{1}{2^{n+1}} C_n^1 (n-1) + \frac{1}{2^{n+2}} C_{n+1}^2 (n-2) + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} \times 1\right]$$

$$\boxed{r_n = \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{2^{i-1}} C_{i-1}^{i-n} (2n-i)}$$

Simulation

Inutile de recommencer tous les calculs : la simulation précédente va nous servir.

Exemple ($a = b = 3$)

$r = 6 - \ell$

Dans le cas général :

$r = 2n - \ell$

suites	longueur : ℓ	nombre de blocs restants : r
0 0 1 1 1	5	1
1 0 0 0	4	2
1 0 1 1	4	2
0 0 0	3	3
....		

d'où le tableau dans le cas $a = b = 3$

nombre de blocs restants	3	2	1	total
effectifs	34	50	59	143

La moyenne est : $\dfrac{3 \times 34 + 2 \times 50 + 1 \times 59}{143} = 1{,}825$

(résultat théorique : $r_3 = 1{,}875$).

VIII *Quelle est la probabilité pour que ce soit la pile 0 qui soit épuisée ?*

1) Vu les rôles symétriques que jouent les piles 0 et 1, on peut affirmer que la pile 0 a autant de chances que la pile 1 d'être épuisée.

Donc la probabilité cherchée est $\dfrac{1}{2}$.

2) Si on reprend les schémas précédents, on doit pouvoir vérifier que

$$\frac{1}{2^3} C_2^0 + \frac{1}{2^4} C_3^1 + \frac{1}{2^5} C_4^2 = \frac{1}{2}$$

$C_2^0 \quad (0, 3)$

$C_3^1 \quad (0, 2)$

$C_4^2 \quad (0, 1)$

ce qui est le cas... On peut en déduire que :

$$2^2\ C_2^0 + 2^1\ C_3^1 + 2^0\ C_4^2 = 2^4 .$$

De même :

$$\frac{1}{2^4} C_3^0 + \frac{1}{2^5} C_4^1 + \frac{1}{2^6} C_5^2 + \frac{1}{2^7} C_6^3 = \frac{1}{2}$$

C_3^0 (0, 4)
C_4^1 (0, 3)
C_5^2 (0, 2)
C_6^3 (0, 1).

Soit :

$$2^3\ C_3^0 + 2^2\ C_4^1 + 2^1\ C_5^2 + 2^0\ C_6^3 = 2^6$$

On en profite pour généraliser et (re)trouver une formule connue (?).

$$\boxed{2^n\ C_n^0 + 2^{n-1}\ C_{n+1}^1 + 2^{n-2}\ C_{n+2}^2 + \dots + 2^1\ C_{2n-1}^{n-1} + 2^0\ C_{2n}^n = 2^{2n}}$$

Pour terminer (l'article, mais pas *le problème qui reste ouvert*), on peut encore une fois simuler.

Tout le travail précédent de simulation va nous servir : Reprenons les suites.

Si une suite se termine par 0, c'est la pile 0 qui est détruite. Sinon c'est la pile 1.

Il suffit donc de compter le nombre de suites se terminant par 0 et le nombre de suites se terminant par 1.

Voici les résultats trouvés avec une première table :

suites se terminant par	0	1	Total
effectifs a = b = 2	104	128	232
a = b = 3	66	77	143
a = b = 4	44	58	102

d'où :

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{104}{232} = 0{,}448 \\ p_1 &= \frac{128}{232} = 0{,}552 \end{aligned}\right\} \quad (a = b = 2)$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{66}{143} = 0{,}462 \\ p_1 &= \frac{77}{143} = 0{,}538 \end{aligned}\right\} \quad (a = b = 3)$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{44}{102} = 0{,}431 \\ p_1 &= \frac{58}{102} = 0{,}569 \end{aligned}\right\} \quad (a = b = 4)$$

et ceux trouvés avec une autre table (construite par mes élèves)

Comment a été construite la première table ? (elle figure page 153 dans le livre de Maurice Glaymann et Tamas Varga : Les probabilités à l'école ; collection CEDIC) (*).

Pour conclure, le lecteur constatera que l'on s'est éloigné des espérances mathématiques et autres aléas numériques ... *mais il est bon de suivre des chemins détournés* !

(*) *Note de Maurice Glaymann*

J'ai pris la table de nombres aléatoires de la page 165 en base *dix* et j'ai remplacé les naturels *pairs* par 0 et les naturels impairs par 1 ...