Sur l'équivalence de certains axiomes d'un corps ordonné K (et du corps R)

par I. RIHAOUI, Université Claude Bernard, Lyon.

0. Introduction

Sur un ensemble muni d'une structure donnée, il est intéressant, à divers points de vue, de pouvoir exprimer sous différentes formes équivalentes un axiome supplémentaire de cette structure. Dans le cas où l'ensemble considéré est muni de plusieurs structures interdépendantes, il est aussi intéressant d'examiner si un axiome de l'une de ces structures peut se traduire par un axiome équivalent défini en fonction d'une autre structure. On peut aussi chercher à exprimer la conjonction de deux axiomes concernant deux structures différentes à l'aide d'un troisième ne faisant intervenir qu'une structure unique.

Par exemple, sur un corps ordonné K, on considère la structure algébrique, la structure d'ordre et la structure topologique. L'objet de cet article est d'examiner les implications et équivalences susceptibles d'exister entre des axiomes relatifs à des structures et à des notions différentes. Ces axiomes [Voir (3-1)] sont d'une grande importance dans les application pratiques (Cas du corps R des réels (*)). Les principaux résultats font l'objet des théorèmes (3-2), (3-3) et des propositions (4-4) et (4-6).

Dans ce qui suit, nous faisons souvent référence à [4] où l'on trouve une étude assez détaillée des premières propriétés des corps ordonnés. A ce sujet, on peut aussi consulter [6] ou [3].

1. Préliminaires et notations

(1.1) *Corps ordonné.* Dans la suite, K désignera un corps (totalement) ordonné dont la notion est supposée connue. Un tel corps est de caractéristique nulle [6, p. 126]. Par conséquent, nous identifierons son corps premier avec le corps **Q** des rationnels. De plus, l'ordre induit par K sur **Q** coïncide avec l'unique structure de corps ordonné de **Q** [6, p. 129]. Les éléments de K notés 0, 1, n, $\frac{1}{n}$ désignent donc resp. le zéro de K, l'unité de K, l'élément n.1 et l'élément $(n.1)^{-1}$.

(1.2) *Ensemble des éléments positifs.* Un élément $x \in K$ tel que $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$) est dit positif (resp. strictement positif). L'ensemble de ces éléments est noté K_+ (resp. K_+^*). La notation $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$), désignant la relation $x \in K_+$ (resp $x \in K_+^*$), ne doit donc pas préjuger de l'appartenance de x au corps des réels. Dans K, on a toujours $1 > 0$.

(1.3) *Intervalles de K.* Un ensemble I de K est dit intervalle s'il vérifie la propriété suivante : Pour tout couple $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$ et tout $z \in K$ tel que $x \leqslant z \leqslant y$, on a $z \in I$. Il en est ainsi de K lui-même et des ensembles de la forme $]a,b[= \{x \in K : a < x < b\}$ et $[a,b] = \{x \in K : a \leqslant x \leqslant b\}$,

(*) En pratique, il existe plusieurs procédés de construction fournissant des corps vérifiant l'un ou l'autre des axiomes (3-1). Ces procédés sont équivalents et conduisent en fait au corps R des réels (Voir (2-10), (3-3) et la remarque qui suit).

appelés resp. intervalle ouvert et intervalle fermé (ou segment) d'extrémités a et b. Un intervalle $]a,b[$ où $a < b$ est toujours non vide, il contient par exemple $c = \frac{a+b}{2}$. Un intervalle ouvert (resp. fermé) de centre a est un intervalle de la forme $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ (resp. $[a-\epsilon, a+\epsilon]$) où $\epsilon \in K_+^*$ (resp $\epsilon \in K_+$).

(1.4) *Valeur absolue*. On appelle valeur absolue dans K l'application de K dans K_+, notée $x \longmapsto |x|$ et définie par $|x| = x$, si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$, si $x < 0$.
Cette application possède les propriétés usuelles de "la valeur absolue" (dans R !).
Notons que la relation $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$ (resp. $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$) équivaut à $|x-a| < \epsilon$ (resp. $|x-a| \leqslant \epsilon$).

(1.5) Les notions de partie minorée, majorée, bornée, de borne supérieure et de borne inférieure se définissent comme dans tout ensemble ordonné.
En utilisant la valeur absolue, on voit qu'une partie A de K est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, on ait $|x| \leqslant M$.

(1.6) *Corps archimédien*. Un corps ordonné K (ainsi que son ordre) est dit archimédien s'il vérifie l'axiome suivant :

$$[OA] \quad \forall\, b \in K, \quad \forall\, a > 0, \quad \exists\, n \in N : n\,a > b.$$

Il est dit non archimédien dans le cas contraire. Le corps ordonné Q fournit un premier exemple de corps archimédiens. D'autres exemples sont donnés au § 4.

(1.7) *Topologie d'un corps ordonné*. La topologie considérée sur un corps ordonné K est celle de l'ordre. Par définition, un ensemble U de K est un ouvert pour cette topologie s'il est vide ou si tout point de U est le centre d'un intervalle ouvert contenu dans U. Un fermé est, par définition, le complémentaire d'un ouvert. Un voisinage d'un point $a \in K$ est un ensemble V contenant un intervalle ouvert de centre a. La famille des intervalles ouverts de centre a (resp. des intervalles fermés de centre a et non réduits à $\{a\}$) est une base de voisinages de a. Le corps K muni de cette topologie est alors un corps topologique ([2], § 6 n° 7).

(1.8) Les notions de compacité, de compacité locale, de connexité et de connexité locale se définissent comme pour tout espace topologique. (Voir par exemple [1] ou [8]).

2. Suites convergentes et suites de Cauchy dans un corps ordonné K.

Nous donnons ici des définitions en accord avec la théorie générale mais adaptées au cas d'un corps ordonné.

(2.1) *Suite stationnaire. Suite monotone.*

(a) Une suite est dite stationnaire si, à partir d'un certain rang, tous ses termes sont égaux.

(b) Une suite (u_n) est dite croissante (resp. décroissante) si, pour tout $n \in N$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$). Dans un cas comme dans l'autre, elle est dite monotone. Dans ces définitions, on ajoute le mot "strictement" lorsque les inégalités sont strictes.

(2.2) *Suite convergente.* Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de K. Il existe au plus un élément $\ell \in$ K vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in N \ : \ \forall n \geqslant p \ , \ |u_n - \ell| \leqslant \epsilon \ .$$

Lorsque cet élément (unique) existe, on l'appelle la limite de la suite (u_n) et note $\ell = \lim u$ ou $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$. On dit aussi que la suite est convergente (ou converge) vers ℓ .

(2.3) *Suites adjacentes.* Deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de K sont dites adjacentes si (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$.

(2.4) *Point d'accumulation.* Un point $a \in$ K est dit point d'accumulation d'une partie $E \subset K$ si tout intervalle ouvert de centre a, privé de a, admet une intersection non vide avec E.

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

(2.5) *Proposition* : Si E est sans point d'accumulation, toute suite d'éléments de E convergente est stationnaire.

Preuve : Supposons qu'il existe une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E convergente et non stationnaire. Soit ℓ sa limite

et $\epsilon > 0$. Par définition, il existe $p \in N$ tel que $n \geqslant p$ entraîne $u_n \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$. Comme u n'est pas stationnaire, il existe $m \in N$ tel que $m \geqslant p$ et $u_m \neq \ell$.
Par suite $(]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon] \setminus \ell \quad) \cap E \supset \{u_m\}$. Cela montre que ℓ est un point d'accumulation de E. D'où le résultat, par contraposition.

(2.6) *Suite de Cauchy.* Une suite $u = (u_n)$ d'éléments de K est dite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in N \; : \; \forall p,q \geqslant m \, , \, |u_p - u_q| \leqslant \epsilon \, .$$

La proposition suivante établit deux propriétés intéressantes des suites de Cauchy. Pour une démonstration, voir [4] pp. 352 et 364.

(2.7) *Proposition* : (a) Toute suite de Cauchy est bornée
(b) Une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente (vers la même limite).

Toute suite convergente est de Cauchy. Lorsque la réciproque (qui n'est pas vraie en général) est toujours satisfaite, on a la définition :

(2.8) *Corps complet.* Un corps ordonné K est dit complet (*) s'il vérifie l'axiome suivant :

[C] Toute suite de Cauchy d'élément de K est convergente.

La notion de complétude est d'une grande importante pratique car elle fournit un critère de convergence ne faisant pas explicitement intervenir la valeur de la limite, souvent difficile à déterminer.

Le corps Q n'est pas complet (Voir [4]p. 365), d'où l'intérêt de la proposition suivante qui permet de plonger tout corps ordonné dans un corps complet. (Pour une démonstration, voir [4] p. 370 ou [7] p. 43).

(*) Compte tenu des définitions générales, on devrait dire "semi-complet" ; mais l'on donne ici au mot "complet" le sens de la définition (2,8). Cela n'est pas gênant pour la suite car le cadre de l'étude (Voir (2,11) et la remarque à la fin du paragraphe 2) assure la cohérence de cette définition avec le cas général.

(2.9) *Proposition.* Soit K un corps ordonné. Il existe un corps ordonné $\hat{K}$ contenant K et vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Les lois et l'ordre de $\hat{K}$ induisent les lois et l'ordre de K.
(b) $\hat{K}$ est complet.
(c) Tout élément de $\hat{K}$ est limite dans $\hat{K}$ d'une suite de Cauchy dans K.

Si L est un corps ordonné contenant K et vérifiant les conditions (a), (b) et (c) il existe un isomorphisme de corps ordonnés de $\hat{K}$ sur L. Le corps ordonné $\hat{K}$ s'appelle le complété de K. Enfin, si K est archimédien, il en est de même de $\hat{K}$.

(2.10) *Définition* : On appelle corps des réels, et on note R, le corps ordonné $\hat{Q}$, complété du corps ordonné des rationnels.

D'après sa définition, R est donc complet et archimédien. Nous verrons plus loin (3.3) que ces deux propriétés en sont une caractérisation.

(2.11) *Corps ordonné de type dénombrable.* Si toute suite convergente du corps ordonné K est stationnaire, il en est de même de toute suite de Cauchy. En effet, si (u_n) est une telle suite, la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ converge vers zéro et tous ses termes sont donc nuls à partir d'un certain rang. Il est alors évident que l'étude des suites de Cauchy (et donc des suites convergentes) d'un tel corps est triviale et ne présente qu'un intérêt limité. Un corps ordonné où il existe au moins une suite convergente non stationnaire est dit du type dénombrable et on va s'intéresser par la suite aux corps de ce type. On a d'abord les équivalences suivantes :

(2.12) *Proposition* : Dans un corps ordonné K, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) K est de type dénombrable
(ii) Il existe une suite strictement décroissante d'éléments strictement positifs de K et convergente vers 0.
(iii) Il existe une base dénombrable de voisinages de 0.
(iv) Tout point $a \in K$ admet une base dénombrable de voisinages.

Preuve :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Voir [4] p. 352

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit (ϵ_n) une suite vérifiant (ii) et, pour tout $n \in N$, $V_n =]-\epsilon_n, +\epsilon_n[$. On vérifie aisément que $(V_n)_n$ est une base (dénombrable) de voisinages de 0.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Soit $a \in K$ et $(U_n)_n$ une base dénombrable de voisinages de 0. La suite $(a + U_n)_n$ convient.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Soit (W_n) une base dénombrable de voisinages de 0 par exemple. Pour tout $n \in N$, W_n contient un intervalle ouvert de centre 0. Il n'est donc pas réduit à $\{0\}$. On choisit $u_n \in W_n \setminus \{0\}$. La suite $(u_n)_n$ convient.

Tout corps archimédien est de type dénombrable. En effet (Voir par exemple [4] p. 356) :

(2.13) *Proposition* : Un corps ordonné K est archimédien si et seulement si la suite $(\frac{1}{n})_n$ de K converge vers 0. Dans ce cas, la suite $(\frac{1}{2^n})_n$ d'éléments de K converge aussi vers 0.

Il existe des corps non archimédiens de type dénombrable (4.4).

Dans la suite, et *sauf mention expresse du contraire, K désignera un corps ordonné de type dénombrable.*

Pour un exemple de corps ordonné non de type dénombrable, voir [4] p. 450.

3. Equivalence des axiomes définis sur un corps ordonné.

(3.1) Les axiomes suivants, cités dans le cadre d'un corps ordonné, traduisent en fait des propriétés habituelles et d'utilisation courante dans les problèmes pratiques d'analyse réelle. Leur diversité a son intérêt. En effet, selon les cas, l'un ou l'autre de ces axiomes constitue la forme la plus adaptée au problème envisagé. On se propose ici de préciser les liens entre eux (Théorème (3.2)) et d'examiner les cas où ils sont (ou ne sont pas) satisfaits ou équivalents. Il existe en effet des corps (ou plutôt un corps) où tous ces axiomes sont satisfaits et équivalents (Théorème (3.3)), d'autres où aucun d'entre eux n'est satisfait et enfin des corps où sont uniquement satisfaits les axiomes de (II) (Prop. (4.4)).

(I)

[BS] Toute partie A de K, non vide et majorée, admet une borne supérieure.

[BI] Toute partie A de K, non vide et minorée, admet une borne inférieure.

[SD] Toute suite $u = (u_n)$ d'éléments de K, décroissante et minorée, est convergente.

[SC] Toute suite $u = (u_n)$ d'éléments de K, croissante et majorée, est convergente.

[BW] Toute partie A de K, bornée et infinie, admet au moins un point d'accumulation.

[SB] De toute suite bornée $u = (u_n)$ d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente.

[CN] Il n'existe aucune partition de K en deux fermés.

[CL] Aucun intervalle fermé de K n'admet de partition en deux fermés.

(II)

[C] Toute suite de Cauchy $u = (u_n)$ d'éléments de K est convergente.

[SE] Pour toute suite décroissante (I_n) de segments de K tels que $I_n = [a_n, b_n]$ et $\lim\limits_{x \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, l'intersection $\bigcap\limits_{n \in N} I_n$ est un singleton.

[SA] Deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) d'éléments de K sont convergentes et ont la même limite.

On obtient alors le théorème suivant :

(3.2) *Théorème.* Dans un corps ordonné K :

(a) Les axiomes de (I) sont tous équivalents.

(b) Les axiomes de (II) sont tous équivalents.

(c) Un axiome quelconque de (I) implique tout axiome de (II).

(d) Tout axiome de (I) implique [OA]. (Voir 1.6)

(e) La conjonction de [OA] avec un axiome quelconque de (II) implique tout axiome de (I).

Preuve :

(a) L'équivalence est démontrée selon le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & {[SC]} \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
 & {[BS]} \arrow[dr, Rightarrow] & & {[SD]} \arrow[ul, Rightarrow] & \\
{[CN]} \arrow[ur, Rightarrow] & & {[BI]} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & {[SB]} \arrow[ul, Rightarrow] \\
 & {[CL]} \arrow[ul, Rightarrow] & & {[BW]} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

[BS] $\Longrightarrow$ [BI]

Considérons une partie A non vide, minorée et désignons par B l'ensemble des minorants de A. La partie B est non vide (car A est minorée) et elle est majorée (par tout élément de A). Elle admet donc une borne supérieure s qui est aussi la borne inférieure de A. En effet, tout élément de A est un majorant de B, donc plus grand que la borne supérieure s et tout minorant de A et un élément de B, donc plus petit que la borne supérieure s.

[BI] $\Longrightarrow$ [SD]

Soit (u_n) une suite décroissante, minorée et ℓ la borne inférieure de l'ensemble $\{u_n\}_{n\in N}$. La suite (u_n) converge vers ℓ. En effet, soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de la borne inférieure ℓ, il existe $p \in N$ tel que $u_p \in [\ell, \ell+\epsilon]$. Alors, pour tout $n \geqslant p$, on a $\ell \leqslant u_n \leqslant u_p \leqslant \ell+\epsilon$, donc $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$.

[SD] $\Longrightarrow$ [SC]

Soit u une suite croissante et majorée. La suite $v = -u$ est décroissante et minorée ; elle admet donc une limite ℓ. Alors, $u = -v$ converge vers $-\ell$.

[SC] $\Longrightarrow$ [BS]

Montrons d'abord que [SC] implique [OA]. Soit $(a,b) \in K^2$, $a > 0$. Si, pour tout $n \in N$, $na \leqslant b$, la suite croissante $(na)_{n\in N}$ serait majorée et donc convergente. Or elle n'est pas de Cauchy car la suite définie par $u_n = (n+1)a - na = a$ ne converge pas vers 0. Ce qui est une contradiction. Le corps K est donc archimédien. Par conséquent, la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_n$ de K converge vers 0 (2.13).

Considérons maintenant une partie A de $\mathbf{R}$, non vide et majorée. Nous allons définir un élément $\alpha > 0$ et construire par récurrence une suite croissante $u = (u_n)$ d'éléments de A tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n + \frac{\alpha}{2^n}$ soit un majorant de A.

Soit u_0 un élément de A et m_0 un majorant de A, distinct de u_0. Posons $\alpha = m_0 - u_0$. Alors, $\alpha > 0$ et $u_0 + \frac{\alpha}{2^0} = m_0$ est un majorant de A.

Supposons défini, pour l'entier n, l'élément $u_n \in A$ tel que $u_n + \frac{\alpha}{2^n}$ soit un majorant de A.

Posons $c_n = \frac{1}{2}(u_n + u_n + \frac{\alpha}{2^n}) = u_n + \frac{\alpha}{2^{n+1}}$.

Si $[c_n, u_n + \frac{\alpha}{2^n}] \cap A \neq \phi$, on choisit $u_{n+1} \in [c_n, u_n + \frac{\alpha}{2^n}] \cap A$.

Alors $u_{n+1} \in A$, $u_n \leqslant c_n \leqslant u_{n+1}$

et $u_{n+1} + \frac{\alpha}{2^{n+1}} \geqslant c_n + \frac{\alpha}{2^{n+1}} = u_n + \frac{\alpha}{2^n}$, donc $u_{n+1} + \frac{\alpha}{2^{n+1}}$ est un majorant de A. Si $[c_n, u_n + \frac{\alpha}{2^n}] \cap A = \phi$, alors c_n est un majorant de A. On pose $u_{n+1} = u_n$, c'est un élément de A et $u_{n+1} + \frac{\alpha}{2^{n+1}} = c_n$ est un majorant de A. Dans les deux cas, $u_{n+1} \in A$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $u_{n+1} + \frac{\alpha}{2^{n+1}}$ est un majorant de A.

La suite croissante (u_n) ainsi construite est majorée par m_0, elle admet donc une limite s. Montrons que s est la borne supérieure de A. Tout d'abord, s majore A. En effet, supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $x > s$. Comme la suite $(\frac{\alpha}{2^n})$ converge vers 0, on peut choisir un entier m tel que

$$\frac{\alpha}{2^m} < \frac{x-s}{3} \text{ et } |u_m - s| < \frac{x-s}{3},$$

ce qui entraîne

$$|u_m + \frac{\alpha}{2^m} - s| \leqslant |u_m - s| + \frac{\alpha}{2^m} \leqslant \frac{x-s}{3} + \frac{x-s}{3} < x - s,$$

d'où $u_m + \frac{\alpha}{2^m} < x$.

Ce qui est en contradiction avec le fait que $u_m + \frac{\alpha}{2^m}$ majore A. D'autre part, si z est un majorant de A, alors $z \geqslant s$. En effet, dans le contraire, on aurait un entier m tel que $|s - u_m| < s - z$ et par conséquent $u_m > z$, contredisant le fait que z majore A. L'implication est ainsi démontrée.

[BI] $\Longrightarrow$ [BW]

Supposons que [BI] soit vérifié et qu'il existe une partie A de K, bornée, infinie et sans point d'accumulation. Il en résulte en particulier que tout sous-ensemble de A est sans point d'accumulation. Nous allons construire par récurrence une suite (a_n) de A, une suite (ϵ_n) d'éléments strictement positifs et une suite (A_n) de parties infinies de A telles que $a_n \in A_n$ et que $A_{n+1} = A_n \setminus \{a_n\}$ soit minorée par $a_n + \epsilon_n$.

La partie $A = A_0$, minorée et non vide, admet une borne inférieure a_0 qui, par hypothèse, n'est pas un point d'accumulation de A_0. Il existe donc $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$A \cap (\,]a_0 - \epsilon_0, a_0 + \epsilon_0[\setminus \{a_0\}\,) = \phi\ .$$

Cela montre que $a_0 \in A_0$ (sinon, $]a_0 - \epsilon_0, a_0 + \epsilon_0[\cap A$ serait vide, en contradiction avec la définition de la borne inférieure) et que $A_1 = A_0 \setminus \{a_0\}$, infinie puisque A l'est, est minorée par $a_0 + \epsilon_0$.

Supposons définis le terme $a_n \in A$, l'élément $\epsilon_n > 0$ et la partie infinie de A_n de A telle que $a_n \in A_n$ et que $A_{n+1} = A_n - \{a_n\}$, infinie, soit minorée par $a_n + \epsilon_n$. La borne inférieure a_{n+1} de A_{n+1} vérifie alors $a_{n+1} \geqslant a_n + \epsilon_n$. De plus, on démontre comme ci-dessus que $a_{n+1} \in A_{n+1}$ et qu'il existe $\epsilon_{n+1} > 0$ tel que la partie infinie $A_{n+2} = A_{n+1} \setminus \{a_{n+1}\}$ soit minorée par $a_{n+1} + \epsilon_{n+1}$.

La suite (a_n) d'éléments de A ainsi construite est majorée (puisque A l'est) et strictement croissante donc non stationnaire et par suite non convergente [Prop. (2.5)]. Ainsi [SC], et donc [BI], n'est pas satisfait ; ce qui est absurde.

[BW] $\Longrightarrow$ [SB]

Soit $u = (u_n)$ une suite bornée. Deux cas peuvent se présenter :

1er cas : L'ensemble u(N) est fini.

Nous posons $u(N) = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$

et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $N_i = \{n \in N : u_n = a_i\}$.

L'un au moins des ensembles N_i, soit N_{i_0}, est infini. Il existe alors une unique bijection croissante φ de N sur N_{i_0}. La sous-suite $v = u \circ \varphi$ est ainsi constante et par suite convergente.

2e Cas : u(N) est infini.

Comme u(N) est déjà borné, il admet au moins un point d'accumulation. Soit s un tel point. Considérons d'autre part une suite (ϵ_n) strictement décroissante d'éléments strictement positifs et convergente vers 0. Une telle suite existe en vertu de (2.12).

Nous allons construire par récurrence une injection croissante φ de N dans lui-même telle que la suite $v = u \circ \varphi$ vérifie, pour tout entier n, $0 < |v_n - s| < \epsilon_n$ (1). Il est clair qu'une telle suite est alors une suite extraite de u et convergente (vers s).

Comme s est un point d'accumulation de u(N), il existe un entier m tel que $u_m \in (]s - \epsilon_0, s + \epsilon_0[\setminus \{s\})$. Nous posons $\varphi(0) = m$. Le terme $v_0 = u(\varphi(0))$ vérifie bien la relation (1).

Supposons maintenant défini l'entier $\varphi(n)$ tel que $0 < |u(\varphi(n)) - s| < \epsilon_n$. Posons $F_n = \{p \in N : p \leqslant \varphi(n) \text{ et } u_p \neq s\}$ et $\alpha_n = \min_{p \in F_n} \{|u_p - s|\}$. Comme F_n est fini non vide, α_n est strictement positif et il en est de même de $\delta_n = \min\{\alpha_n, \epsilon_n\}$.

Le point d'accumulation s assure l'existence d'un entier m tel que $u_m \in (]s - \delta_n, s + \delta_n[\setminus \{s\})$. Remarquons d'abord que $u_m \neq s$. Ceci entraîne nécessairement $m > \varphi(n)$ car, dans le cas contraire, on aurait $m \in F_n$ et donc $|u_m - s| \geqslant \alpha_n$, contredisant ainsi la relation $|u_m - s| < \delta_n \leqslant \alpha_n$. Nous posons donc $\varphi(n + 1) = m$. Ainsi, $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$ et $0 < |u(\varphi(n + 1)) - s| < \epsilon_n$, ce qui achève la démonstration.

[SB] $\Longrightarrow$ [SD]

Soit $u = (u_n)$ une suite décroissante et minorée. Du fait de sa décroissance, u est aussi majorée (par u_0). Il en résulte qu'elle est bornée. Il existe donc une injection croissante φ de N dans lui-même telle que la suite $v = u \circ \varphi$ soit convergente. Désignons par s sa limite et montrons que c'est aussi la limite de la suite u.

Considérons en effet un élément strictement positif ϵ. Il existe $m_0 = \varphi(n_0)$ tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $|u(\varphi(n)) - s| \leqslant \epsilon$. Soit

$m \geqslant m_0$. Il existe un entier $n \geqslant n_0$ tel que $\varphi(n) \leqslant m < \varphi(n+1)$. Comme u est décroissante, on a $u(\varphi(n)) \geqslant u_m \geqslant u(\varphi(n+1))$. Or, les deux éléments $u(\varphi(n))$ et $u(\varphi(n+1))$ appartiennent à l'intervalle $[s-\epsilon, s+\epsilon]$, la double inégalité montre qu'il en est de même de u_m. En résumé, la relation $m \geqslant m_0$ entraîne $|u_m - s| \leqslant \epsilon$, ce qui suffit.

[BI] $\Longrightarrow$ [CL]

Considérons un intervalle fermé $[a, b]$ non réduit à un point et deux fermés non vides A et B tels que $[a, b] = A \cup B$. On peut supposer que $a \in A$. La partie B, étant non vide et minorée par a, admet une borne inférieure $c \in [a, b]$. Montrons que $c \in A \cap B$.

En effet, $c \in B$ car, dans le cas contraire, l'ouvert $\complement_K B$ contiendrait un intervalle ouvert de centre c, soit $]c-\epsilon, c+\epsilon[$. On aurait alors $]c-\epsilon, c+\epsilon[\cap B = \phi$, en contradiction avec la définition de la borne inférieure.

D'autre part, il est évident que $c \in A$ si $c = a$. Supposons donc $a < c$. Si l'ouvert $\complement_K A$ contenait c, il contiendrait un intervalle ouvert de centre c et par conséquent un élément x tel que $a < x < c$. On aurait ainsi un élément $x \in [a, b]$ mais n'appartenant ni à A, ni à B (à cause de l'inégalité $x < c$ et de la définition de c). On a donc montré que $[a, b]$ n'admet aucune partition en deux fermés.

[CL] $\Longrightarrow$ [CN]

S'il existe une partition de K en deux ensembles fermés E et F, nous pouvons choisir un élément dans chacun de ces deux ensembles. En appelant a le plus petit de ces deux éléments et b l'autre, on peut supposer par exemple que $a \in E$ et $b \in F$. Les deux fermés $A = E \cap [a, b]$ et $B = F \cap [a, b]$ constituent alors une partition de l'intervalle fermé $[a, b]$. Cela montre que si [CN] n'est pas satisfait, [CL] ne l'est pas non plus.

[CN] $\Longrightarrow$ [BS]

Soit E une partie non vide et majorée de K, A l'ensemble de ses majorants et B l'ensemble des minorants de A. Comme E est majorée, A est non vide et il en est de même de B puisque $E \subset B$. Si $a \notin A$, il existe $b \in E$ tel que $b > a$. Tout élément de A majore E et en particulier b, donc aussi a. Cela montre que $a \in B$. On a donc

$K = A \cup B$. De plus, en posant $\epsilon = \dfrac{b-a}{2}$, on voit que $]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap A = \phi$, prouvant ainsi que A est fermé. On démontre de la même manière que B est fermé.

L'axiome [CN] implique alors $A \cap B \neq \phi$. Si $s \in A \cap B$, s est alors, par définition, le plus petit majorant de E, c'est-à-dire sa borne supérieure.

(b)

[C] $\Rightarrow$ [SE]

Faisons d'abord la remarque suivante : si les deux éléments x et y appartiennent au même segment $[a, b]$, alors $|x-y| \leqslant b-a$.

Montrons maintenant que la suite (a_n) de l'énoncé est de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$. L'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ entraîne l'existence d'un entier m tel que $0 \leqslant b_m - a_m \leqslant \epsilon$. Alors, si p et q sont deux entiers supérieurs à m, les relations $a_p \in I_m$ et $a_q \in I_m$ impliquent $|a_p - a_q| \leqslant b_m - a_m \leqslant \epsilon$.

La suite (a_n), étant de Cauchy, est donc convergente. Soit s sa limite. C'est aussi la limite de la suite (b_n). En effet, pour tout $n \in N$, $b_n - s = (b_n - a_n) + (a_n - s)$. La suite $(b_n - s)_n$, somme de deux suites convergentes vers 0, converge elle-même vers 0.

Montrons que $s \in \bigcap\limits_n I_n$. Sinon, il existerait $m \in N$ tel que $s \notin I_m$, donc $s < a_m$ ou $s > b_m$. Supposons par exemple $s < a_m$. Comme pour tout $n \geqslant m$, $a_n \geqslant a_m$, on aurait $a_n - s \geqslant a_m - s > 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $s = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. De la même manière, on obtiendrait une contradiction en supposant $s > b_m$.

Soit enfin un élément x différent de s. Montrons que $x \notin \bigcap\limits_n I_n$. En effet, l'élément $\alpha = |s-x|$ est strictement positif. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, il existe un entier m tel que $0 \leqslant b_m - a_m \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$. Alors $x \notin I_m$, car la relation $x \in I_m$ entraînerait, compte tenu du fait que $s \in I_m$,

$\alpha = |s - x| \leqslant b_m - a_m \leqslant \frac{\alpha}{2} < \alpha$, ce qui est impossible. On vient donc d'établir que $\bigcap_n I_n = \{s\}$.

[SE] $\Longrightarrow$ [SA]

Soit $n \in N$. On a par hypothèse, $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$ et $a_n - a_{n+1} \leqslant 0$. Or,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = (b_{n+1} - b_n) + (b_n - a_n) + (a_n - a_{n+1}) .$$

On en déduit que $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant b_n - a_n$.

La suite $(b_n - a_n)_n$ est donc décroissante. Sa convergence vers 0 montre alors que $b_n - a_n \geqslant 0$, pour tout $n \in N$. On a ainsi une suite décroissante $I_n = [a_n, b_n]$ de segments tels que $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. Il en résulte (comme dans la démonstration précédente) que l'unique élément de l'intersection $\bigcap_n I_n$ est la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

[SA] $\Longrightarrow$ [C]

Soit $u = (u_n)$ une suite de Cauchy d'élément de K. Pour montrer qu'elle est convergente, il suffit d'en extraire une sous-suite convergente (prop. (2.8)).

Cela est évident si l'ensemble u(N) est fini. (Voir, par exemple, le début de la démonstration de [BW] $\Longrightarrow$ [SB]). On peut donc supposer que u(N) est infini. Dans ce qui suit, (ϵ_n) désignera une suite strictement décroissante d'éléments positifs et convergente vers 0. (prop. (2.12)'(ii)).

Pour tout $n \in N$, nous posons

$$E_n^+ = \{ u_p : p \geqslant n \text{ et } u_p \geqslant u_n \} \ , E_n^- = \{ u_p : p \geqslant n \text{ et } u_p \leqslant u_n \},$$

$$S_n = E_n^+ \text{ si } E_n^+ \text{ est infini et } S_n = E_n^-, \text{ sinon.}$$

Comme u(N) est infini, l'ensemble S_n est toujours infini et, a fortiori, il en est de même de l'ensemble T_n des indices des éléments de S_n.

Nous allons construire par récurrence une suite strictement croissante (m_n) d'entiers et une suite décroissante $[a_n, b_n]$ de segments telles que, pour tout $n \in N$,

$$u_{m_n} \in S_{m_n} \subset [a_n, b_n] \text{ et } 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \epsilon_n \ . \quad (1).$$

La suite u étant de Cauchy, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geqslant m_0$ entraîne $|u_p - u_q| \leqslant \epsilon_0$. Si $E^+_{m_0}$ est infini, on pose $a_0 = u_{m_0}$, $b_0 = u_{m_0} + \epsilon_0$. Sinon, on pose $b_0 = u_{m_0}$ et $a_0 = u_{m_0} - \epsilon_0$. Dans tous les cas, on voit que (1) est vérifiée pour $n = 0$.

Supposons définis pour l'entier n, m_n et $[a_n, b_n]$ tels que (1) soit vérifiée. Comme T_{m_n} est infini et que u est de Cauchy, il existe $m_{n+1} > m_n$ tel que $u_{m_{n+1}} \in S_{m_n}$ et que $p, q \geqslant m_{n+1}$ implique $|u_p - u_q| \leqslant \epsilon_{n+1}$. On pose alors $a_{n+1} = u_{m_{n+1}}$, $b_{n+1} = a_{n+1} + \min\{\epsilon_{n+1}, b_n - a_{n+1}\}$ si $E^+_{m_{n+1}}$ est infini, et $b_{n+1} = u_{m_{n+1}}$, $a_{n+1} = b_{n+1} - \min\{\epsilon_{n+1}, b_{n+1} - a_n\}$, sinon. On obtient alors

$$u_{m_{n+1}} \in S_{m_{n+1}} \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \text{ et } 0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \epsilon_{n+1}.$$

Par construction, les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Si ℓ est leur limite commune, la relation $a_n \leqslant u_{m_n} \leqslant b_n$, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, montre que la suite (u_{m_n}) converge elle aussi vers ℓ.

(c)

Montrons par exemple que [SB] implique [C].

Soit u une suite de Cauchy d'élément de K. Comme u est bornée (prop. (2.8)), on peut, grâce à [SB], en extraire une sous-suite convergente et cela implique la convergence de la suite u elle-même, toujours d'après la prop. (2.8).

(d)

On a déjà démontré l'implication [SC] $\Longrightarrow$ [OA] dans la première partie de la démonstration de [SC] $\longrightarrow$ [BS].

(e)

Montrons par exemple que [OA] $\wedge$ [SE] $\Longrightarrow$ [BW].

Considérons une partie A bornée et infinie. On va construire par récurrence une suite décroissante $(I_n)_n$ de segments tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap I_n$ soit infinie et $I_n = [a_n, b_n]$ avec $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

Désignons par a_0 (resp. b_0) un minorant (resp. un majorant) de A et posons $I_0 = [a_0, b_0]$. Il est clair que $b_0 - a_0 = \frac{1}{2^0}(b_0 - a_0)$ et que $I_0 \cap A = A$ est infinie.

Supposons maintenant construit pour l'entier n le segment $I_n = [a_n, b_n]$ tel que $I_n \cap A$ soit infinie et que

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Considérons le point $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ milieu de I_n. On obtient ainsi deux segments $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$ dont l'un au moins admet une intersection infinie avec A (sinon $I_n \cap A$ serait finie). Notons $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ un tel segment. Il en résulte que $A \cap I_{n+1}$ est infinie,

$$I_{n+1} \subset I_n \text{ et } b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0).$$

Nous disposons ainsi d'une suite décroissante (I_n) de segments vérifiant les conditions annoncées. Grâce à [OA], la suite $(\frac{1}{2^n})$ d'éléments de K converge vers 0 (prop. (2.13). D'où,

$\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. Il existe donc, d'après [SE], un point $s \in \bigcap\limits_n I_n$. Montrons que c'est un point d'accumulation de A. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, il existe un entier m tel que

$$0 \leqslant b_m - a_m < \epsilon.$$

La relation $a_m \leqslant s \leqslant b_m$ entraîne alors

$$|s - a_m| \leqslant b_m - a_m < \epsilon \text{ et } |s - b_m| \leqslant b_m - a_m < \epsilon.$$

Cela montre que a_m et b_m appartiennent tous les deux à $]s - \epsilon, s + \epsilon[$ et, par conséquent, que

$$I_m = [a_m, b_m] \subset]s - \epsilon, s + \epsilon[.$$

Or, I_m contient une infinité de points de A et par suite un point $x \in A$ et distinct de s. D'où $x \in (]s - \epsilon, s + \epsilon[\setminus \{s\}) \cap A$. Ce qui achève la démonstration.

Le théorème (3.2) nous permet d'obtenir les importantes caractérisations suivantes du corps des réels :

(3.3) *Théorème* : Dans un corps ordonné K, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) K vérifie l'axiome de la borne supérieure.

(ii) K est complet et archimédien.

(iii) Les parties compactes de K sont exactement les parties fermées et bornées.
(iv) Tout intervalle fermé de K est compact.
(v) K est localement compact.
(vi) K est connexe.
(vii) K est connexe, localement connexe et les parties connexes de K sont exactement les intervalles.
(viii) K et R sont isomorphes pour leurs structures de corps ordonnés et par conséquent pour leurs structures de corps topologiques.

Il en résulte que, dans R, les axiomes de (3.1) sont tous satisfaits et équivalents.

Preuve

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

C'est l'équivalence [BS] $\Leftrightarrow$ [OA] $\wedge$ [C], que l'on tire des assertions (c), (d) et (e).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii)

Remarquons que les parties compactes de K sont toujours fermées et bornées alors que l'axiome [BW] est équivalent à la compacité de ces dernières. (Voir [8] Th. III.10.6 et remplacer la distance d par la valeur absolue. Voir aussi [4]).

L'équivalence annoncée se ramène alors à l'équivalence de [BW] et [BS] de l'assertion (a).

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

L'implication directe provient du fait que tout intervalle fermé est une partie bornée fermée et l'implication réciproque du fait que toute partie fermée bornée est contenue (et fermée) dans un intervalle fermé.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v)

Remarquons d'abord que tout point de K admet une base de voisinages constitués d'intervalles fermés. L'implication directe est alors évidente. Réciproquement, si [a, b] est un intervalle fermé de milieu c, il existe $\epsilon > 0$ tel que $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ soit compact. L'application continue $f : K \xrightarrow{f} K$, $x \longmapsto \frac{b-a}{2\epsilon}(x - c) + c$ transforme

$[c - \epsilon, c + \epsilon]$ en $[a, b]$ qui est donc compact (Voir par exemple [8] Th. III.10.2).

(i) $\Longleftrightarrow$ (vi)

C'est l'équivalence [BS] $\Longleftrightarrow$ [CN] de l'assertion (a).

(vi) $\Longleftrightarrow$ (vii)

(vi) n'est autre que l'axiome [CN] qui est équivalent à [CL] et il suffit de voir que ce dernier équivaut à (vii).

Remarquons d'abord que si une partie E n'est pas un intervalle, elle n'est pas connexe car il existe $(a,b) \in E^2$ et $c \notin E$ tels que $a < c < b$. Alors les parties

$$A = \{x \in K : x \leqslant c\} \cap E \quad \text{et} \quad B = \{x \in K : x \geqslant c\} \cap E$$

constituent une partition de E en deux fermés de E.

D'autre part, si I est un intervalle (en particulier I peut être égal à K) et si on suppose I non connexe, on trouve comme dans l'implication [CL] $\Longrightarrow$ [CN], un intervalle fermé et une partition de cet intervalle en deux fermés.

Enfin, tout point de K admet une base de voisinages constitués d'intervalles fermés.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (viii)

D'après sa définition (2.10), R vérifie (ii) [donc (i)].

L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (viii) est démontrée dans [6] p. 154, alors que (ii) $\Longleftrightarrow$ (viii) est démontrée dans [8] Th.I.8.5.

La démonstration du théorème est ainsi achevée.

Il résulte de ce théorème que tout procédé permettant de construire un corps ordonné K vérifiant l'une des assertions (i) à (vii) est en fait une construction du corps R (Voir, par exemple [9] p. 204, ou [4] p. 677 Ex. 9).

4. Exemples et classification des corps ordonnés.

(4.1) On sait déjà que Q et R sont deux corps ordonnés archimédiens. Le corps C ne peut être muni d'une structure de corps ordonné. En effet, dans tout corps ordonné K, tout élément non nul de la forme x^2 est strictement positif et -1 est strictement négatif (Voir, par exemple, [6] p. 126). Or, dans **C**, $i^2 = -1$. Enfin, tout corps ordonné étant de caractéristique nulle ([6] p. 126), aucun corps fini ne possède de structure de corps ordonné.

(4.2) [Pour plus de détails concernant ce numéro, voir [5] Chap. I].

Soit $\mathbf{Q}[X]$ (resp. $\mathbf{Q}(X)$) l'algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients rationnels (resp. le corps des fractions rationnelles à une indéterminée et à coefficients rationnels). Soit $f = \sum_{k=m}^{n} a_k X^k$. Le plus petit entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $a_m \neq 0$ (cet entier existe si $f \neq 0$) s'appelle valuation de f et se note $v(f)$. Tout élément non nul $h \in \mathbf{Q}(X)$ s'écrit $h = \frac{f}{g}$ où f et g sont des polynômes non nuls. On pose $v(h) = v(f) - v(g)$ et on démontre que la valuation ainsi obtenue ne dépend pas du représentant $\frac{f}{g}$ de h.

Soit enfin $\mathbf{Q}((X))$ le corps des séries formelles généralisées à une indéterminée et à coefficients rationnels. Tout élément non nul $f \in \mathbf{Q}((X))$ s'écrit $f = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k X^k$. Le plus petit entier $m \in \mathbf{Z}$ tel que $a_m \neq 0$ s'appelle valuation de f et se note $v(f)$. On démontre que $\mathbf{Q}(X)$ est un sous-corps de $\mathbf{Q}((X))$ dont la valuation est induite par celle de $\mathbf{Q}((X))$.

(4.3) *Les corps ordonnés* $\mathbf{Q}(X)$ et $\mathbf{Q}((X))$. Rappelons d'abord, [Voir [6] p. 125], que la structure d'un corps ordonné K est complètement déterminée par la donnée d'une partie P^* stable pour les deux lois et telle que

$$P^* \cap (-P^*) = \phi, \; P^* \cup (-P^*) \cup \{0\} = K.$$

L'ordre est alors défini par $f \geqslant g \Longleftrightarrow f = g$ ou $f - g \in P^*$. P^* sera précisément l'ensemble des éléments strictement positifs.

(a) Sur $\mathbf{Q}(X)$, on définit P^* de la manière suivante : soit $h = \frac{f}{g}$, un élément non nul, $m = v(f)$, $n = v(g)$, $f = \sum_{k=m}^{m'} a_k X^k$ et $g = \sum_{k=n}^{n'} b_k X^k$. Alors $h \in P^* \Longleftrightarrow \frac{a_m}{b_n} > 0$ (dans **Q**).

(b) Sur $\mathbb{Q}((X))$ on définit P^* comme suit :

soit f un élément non nul, $m = v(f)$ et $f = \sum_{k=m}^{\infty} a_k X^k$.

Alors $f \in P^* \iff a_m > 0$ (dans $\mathbb{Q}$).

On vérifie que l'on obtient ainsi deux corps ordonnés et que l'ordre de $\mathbb{Q}(X)$ est induit par celui de $\mathbb{Q}((X))$. Les principales propriétés de ces deux corps sont les suivantes :

(4.4) *Proposition :*

(1) Le corps ordonné $\mathbb{Q}(X)$ (resp. $\mathbb{Q}((X))$) est non archimédien de type dénombrable.
(2) $\mathbb{Q}(X)$ n'est pas complet et $\mathbb{Q}((X))$ est son complété. Par conséquent, $\mathbb{Q}(X)$ ne vérifie aucun des axiomes de (3.1) alors que $\mathbb{Q}((X))$ vérifie uniquement les axiomes (I) de (3.1).

Preuve :

(1) Par définition de l'ordre de $\mathbb{Q}(X)$ (et de $\mathbb{Q}((X))$), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > X > 0$. Cela prouve que $(\frac{1}{n})_n$ ne converge pas vers zéro et que l'ordre n'est pas archimédien (prop. (2.13)).
D'autre part, $(X^n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de $\mathbb{Q}(X)$ (et de $\mathbb{Q}((X))$) strictement décroissante d'éléments strictement positifs et convergente vers 0 dans $\mathbb{Q}(X)$ (et dans $\mathbb{Q}((X))$). En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < X^{n+1} < X^n$ et, pour tout $\epsilon > 0$, on a, en notant $m = \sup |v(\epsilon), 0|$, $0 < X^n < \epsilon$ pour tout $n > m$. D'où le résultat (prop. (2.12)).

(2) Remarquons d'abord que l'existence d'une suite (X^n) de $\mathbb{Q}(X)$ convergente vers 0 à la fois dans $\mathbb{Q}(X)$ et dans $\mathbb{Q}((X))$ montre qu'une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{Q}(X)$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}(X)$ si et seulement si elle est de Cauchy dans $\mathbb{Q}((X))$. On parlera donc dans ce cas de suites de Cauchy sans précision supplémentaire.
$\mathbb{Q}(X)$ *n'est pas complet.* On vérifie, par exemple, que la suite $s_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ d'éléments de $\mathbb{Q}(X)$ est de Cauchy mais qu'elle n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}(X)$.
$\mathbb{Q}((X))$ *est complet.* Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Q}((X))$.

Pour tout $n \in N$, $f_n = \sum_{i=m_n}^{\infty} \alpha_{n,i} X^i$. Si (f_n) est de Cauchy, on a, en particulier

$$\forall k \in Z \quad \exists n_k \in N \ : \ p, q \geqslant n_k \Rightarrow |f_p - f_q| < X^{k+1} .$$

Cela montre que, pour $p, q \geqslant n_k$, $v(|f_p - f_q|) \geqslant k + 1$ et par conséquent que les f_p, pour $p \geqslant n_k$, ont tous les mêmes coefficients jusqu'à l'indice k.

On désigne donc par $\{a_m, ..., a_0\}$ l'ensemble des coefficients d'indices négatifs ou nuls communs à tous les f_p, pour $p \geqslant n_0$ et, pour tout $k \in N^*$, a_k le coefficient d'indice k, commun à tous les f_p, pour $p \geqslant n_k$. On définit

$$f = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \ X^k$$

et on vérifie que $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$.

$Q((X))$ *est le complété de* $Q(X)$. Soit $f = \sum_{k=m}^{\infty} a_k X^k \in Q((X))$.

Pour tout $n \in N$, $n \geqslant m$, on pose $f_n = \sum_{k=m}^{n} a_k X^k$. On voit facilement que la suite (f_n) d'éléments de $Q(X)$ converge vers f et par suite qu'elle est de Cauchy (dans $Q(X)$). Ainsi $Q((X))$ vérifie les propriétés de la prop. (2.9).

Le reste de la propriété résulte du théorème (3.2). Remarquons par exemple qu'une suite (t_n) de rationnels est de Cauchy dans $Q(X)$ si et seulement si elle est stationnaire et que les parties N, Z et Q sont infinies, bornées et sans point d'accumulation.

(4.5) Le même corps $Q(X)$ peut être muni d'une structure de corps ordonné archimédien. En effet, soit t *un réel* transcendant sur Q (i.e. n'est racine d'aucun polynôme non nul de $Q[X]$, par exemple $t = e$ ou $t = \pi$). On définit P^* de la manière suivante : soit $f \in Q(X)$. On pose $f \in P^* \iff f(t) > 0$ (ici $f(t) \in R$, $0 \in R$). On vérifie que l'on obtient ainsi un corps ordonné archimédien.

Pour terminer, la proposition suivante montre que les exemples précédents permettent de donner une classification des corps ordonnés. En effet :

(4.6) *Proposition* : Soit K un corps ordonné.

(a) Si K est archimédien, alors il est isomorphe, pour sa structure de corps ordonné, à un sous-corps du corps ordonné **R**.

(b) Si K est non archimédien, alors il contient un sous-corps isomorphe au corps ordonné **Q**(X) de (4.3).

Preuve :

(a) Voir [8] I.8.4 ou [4] p. 677 Ex. 8.

(b) Comme tout corps ordonné, K contient déjà **Q** (1.1). De plus, il contient, d'après son caractère non archimédien, un élément, X, tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < X < \frac{1}{n}$.

Montrons que X, ou ce qui revient au même, que $Y = \frac{1}{X}$ est transcendant sur **Q**. Supposons le contraire. Il existe alors une suite finie $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ de rationnels non tous nuls tels que $f(Y) = Y^n + a_{n-1} Y^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$. Comme **Q** est archimédien pour l'ordre induit par K, (1.1), il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $p \geqslant 1 - a_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Or, $Y \geqslant p$, d'où $a_k \geqslant 1 - Y$ pour tout

$k \in [\![0, n-1]\!]$ et $f(Y) \geqslant Y^n + (1 - Y)(Y^{n-1} + \ldots +) = 1 > 0$.

Ce qui est impossible. Ainsi, K contient le corps **Q**(X) des fractions rationnelles à l'indéterminé X et à coefficients rationnels.

D'après la définition de X, on a $1 + n X > 0$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Le caractère archimédien de **Q** entraîne alors $1 + \gamma X > 0$, pour tout $\gamma \in \mathbf{Q}$. Comme pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $X^k \leqslant X$, on a même $1 + \gamma X^k > 0$, pour tout $(\gamma, k) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{N}^*$.

Soit $f = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k X^k \in \mathbf{Q}[X]^*$ avec $m = v(f)$. Si $m = n$, il est évident que $f > 0$ équivaut à $a_m > 0$. Si $m < n$, on a

$$(n - m)f = a_m X^m \sum_{k=1}^{n-m} (1 + \gamma_k X^k) ,$$

où $\gamma_k = \frac{(n-m)a_{m+k}}{a_m}$. L'expression entre crochets étant strictement positive, on voit que $f > 0$ équivaut à $a_m > 0$. Enfin, si $h = \frac{f}{g}$, $m = v(f)$, $n = v(g)$ et a_m, b_n les coefficients correspondants de f et g, on sait que $h > 0$ équivaut à $f < 0$ et $g < 0$ ou $f > 0$ et $g > 0$ et donc, dans tous les cas, à $\frac{a_m}{b_n} > 0$.

On voit donc que K induit sur Q(X) la structure d'ordre définie dans (4.3), et la démonstration est ainsi achevée.

(4.7) *Remarque.* En modifiant légèrement la démonstration de la transcendance de Y, on peut démontrer que toute extension algébrique ordonnée d'un corps archimédien est archimédienne.

REFERENCES

[1] N. BOURBAKI. Topologie générale. Chap. I. HERMANN

[2] N. BOURBAKI. Topologie générale. Chap. III. HERMANN

[3] N. BOURBAKI. Algèbre. Chap. IV. HERMANN

[4] L. CHAMBADAL, J.L. OVAERT. Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse. GAUTHIER-VILLARS.

[5] L. CHAMBADAL, J.L. OVAERT. Algèbre II. GAUTHIER-VILLARS.

[6] A. DONEDDU. Nouveau cours de math. Structures fondamentales. VUIBERT.

[7] E. HEWITT, K. STROMBERG. Real and Abstract Analysis. SPRINGER-VERLAG.

[8] J. LELONG-FERRAND, J.M. ARNAUDIES. Cours de math. Analyse. DUNOD.

[9] M. QUEYSANNE. Algèbre. Collection U. ARMAND COLIN.