

Approche des probabilités et des statistiques en première A^(*)

"Etude du temps qu'il a fait à Beaumont-les-Valence en 1973"

Philippe CLAROU — Claude GACHET

OBJECTIFS

Nos objectifs étaient de deux ordres : pédagogique et mathématique.

(*) Cette recherche a été poursuivie en liaison avec la recherche I.N.R.P. n° 73.02.901.

OBJECTIFS D'ORDRE PEDAGOGIQUE

— essayer de faire travailler l'ensemble d'une classe de Première A et non 3 ou 4 élèves comme c'est très souvent le cas.

— développer chez les élèves une attitude active et critique devant un tableau de données :

- mise en évidence de certains caractères ;
- recherche de modes de représentation permettant d'étudier ces caractères.

OBJECTIFS D'ORDRE MATHEMATIQUE

— préciser et ordonner les idées intuitives qu'ont les élèves sur divers problèmes statistiques et probabilistes ; en particulier préciser les notions suivantes :

- avoir plus de chance, moins de chance ;
- avoir tant de chance sur tant pour que... ;
- fréquence - pourcentage.

— préciser la notion de probabilité en particulier par une approche de la loi des grands nombres.

THEME DE L'ETUDE PROPOSEE AUX ELEVES

Nous avons à notre disposition un relevé météorologique pour l'année 1973 fait à Beaumont-les-Valence. A partir de ce document, nous avons pu attribuer à chacun des jours de l'année l'un des trois qualificatifs suivants : beau, gris, mauvais. Cette attribution a été souvent quelque peu arbitraire. (Voir annexe I).

Nous pensons demander aux élèves :

- dans un premier temps, d'analyser le tableau de données ;
- dans un deuxième temps, de réaliser une simulation tenant compte de certains caractères mis en évidence et d'analyser les résultats obtenus.

CONDITIONS DE L'EXPERIMENTATION

Cette expérimentation a été menée, en liaison avec le groupe PROBA de l'IREM de Grenoble, dans trois classes de Première A, par trois professeurs du lycée Camille Vernet de Valence. Parmi

ces professeurs, deux sont animateurs à l'IREM. Les classes concernées ont été :

- la Première A₃ A₅ (40 élèves),
- la Première A_{4II} A₇ (40 élèves)
- la Première A₂ A_{4I} (39 élèves).

Nous avons eu beaucoup de difficultés pour organiser l'observation dans ces classes. Les contraintes d'emploi du temps n'ont pas permis une observation complète en Première A₃ A₅ et en Première A₂ A₄. Il n'a pas été possible en Première A_{4II} A₇ d'avoir plus d'un observateur en classe.

L'expérimentation s'est déroulée en trois séquences :

1. Analyse du tableau (3 heures environ)
2. Simulation — Loi des grands nombres — (1 h 30 environ).
3. Comparaison des simulations avec la réalité puis amélioration de ces simulations (4 h environ).

Pour rendre plus clair cet exposé nous allons décrire ici essentiellement la manière dont se sont déroulées les différentes séquences en Première A_{4II} A₇. En réalité la plupart des idées et des directions de travail choisies par les élèves se sont retrouvées dans les trois classes.

Nous signalerons donc simplement le cas échéant les situations différentes rencontrées dans les deux autres classes.

Les élèves ont été surpris de travailler en groupe. Pourtant ils ont très facilement accepté ce type de travail. Les différents groupes ont abondamment échangé leurs idées, ce qui a rendu la classe souvent trop bruyante ; aucun travail sérieux n'était plus alors possible. Proposer un travail de groupe dans des classes où l'effectif est si important, cela paraît une gageure. Mais avons-nous le choix ? Doit-on attendre des classes de Première A n'ayant pas plus de 25 élèves pour proposer une activité et des méthodes de travail qui sortent de l'apathie l'ensemble d'une classe ?

PREMIERE SEQUENCE

Mise en commun des idées

Chaque élève a reçu un exemplaire du tableau que l'on peut voir en annexe I.

Nous avons donné toutes les explications nécessaires à sa bonne compréhension. En particulier, il manque 4 jours en Août car il n'y a pas eu de relevé durant cette période.

Ensuite nous avons donné la consigne suivante :

“Aujourd’hui, dans un premier temps, vous allez dire ce que vous avez envie d’étudier au vu de ce tableau. Ensuite, vous choisirez un travail que vous essayerez de mener à bien”.

Voici les réponses obtenues en Première A₄₁₁ A₇ : (elles ne diffèrent guère pour les autres classes).

— On peut chercher combien de jours il a fait beau, gris, mauvais.

— Faire les moyennes, les pourcentages.

Ces idées ont été mal exprimées.

Il a été question dans la discussion qui a suivi de proportions de jours beaux dans l’année, de moyennes par mois...

— Chercher le mois pour lequel il y a le plus de jours beaux, celui pour lequel il y a le plus de jours mauvais.

— Etudier le premier jour de chacun des douze mois de l’année, puis étudier le deuxième jour de chacun des 12 mois, puis étudier le troisième jour, etc..

— Comparer les longueurs des différentes séquences de jours beaux.

— Etudier les changements de temps :

“entre un jour beau et un jour mauvais y-a-t-il toujours un jour gris ?”

Prendre mois par mois et faire un graphique. Cela ferait des dents et on comparerait.

— Faire une courbe ; ainsi, dans le graphique obtenu, on verra mieux les changements de temps.

— Etudier les périodes où le temps reste le même.

— Etudier le temps par saisons.

— Essayer de prévoir le temps qu’il a fait durant les 4 jours pour lesquels nous n’avons pas relevé.

— Essayer de prévoir le temps de l’année suivante.

Les trois derniers points ont été discutés avec beaucoup d'énergie. Pour prévoir le temps durant les 4 jours manquant et le temps de l'année suivante il fallait tenir compte des saisons.

Beaucoup pensaient que si on tenait compte des saisons, cela serait très compliqué. Mais certains ne voulaient pas abandonner un phénomène dont ils avaient bien conscience et qui, pour eux, était fondamental. L'idée d'étudier le changement de temps était très forte. Pourtant les élèves ne sont pas parvenu à mettre sur pied une étude complète. Ceux qui envisageaient ce travail voulaient étudier seulement certains changements comme, par exemple, $B \rightarrow G$ ou $B \rightarrow M$. Il n'était pas question pour eux d'étudier systématiquement l'ensemble des couples constitués par 2 jours consécutifs.

Au bout d'une demi-heure, toutes les idées étaient inscrites au tableau. Personne n'avait plus de remarques à faire. Nous avons demandé à chaque groupe de commencer à travailler. Chacun a choisi lui-même son thème de travail.

ANALYSE DU TABLEAU

Le premier travail accompli par tous les groupes a été le dénombrement des B, G et M. La plupart des élèves (18 groupes sur 20) ont choisi de faire ce dénombrement par mois afin de mieux contrôler leurs résultats. Très vite est apparue la nécessité de bien organiser l'ensemble des résultats.

Certains les ont présentés sous forme de tableaux. D'autres (une dizaine de groupes) ont réalisé des diagrammes. Certains modes de représentation ont dû être discutés. Par exemple, quelle est la signification des segments de droite figurant dans certains diagrammes ?

Presque tous les groupes ont calculé les pourcentages de B, G et M. Une dizaine d'élèves ne savaient pas très bien trouver un pourcentage ; le professeur a dû leur donner les indications nécessaires. De toute façon cette notion reste mal comprise. Nous avons pu nous en rendre compte au cours d'une discussion sur le rôle des 4 jours "manquants" : fallait-il calculer le pourcentage de B par rapport à 365 jours ou bien par rapport à 361 jours ?

Nous avons fait remarquer que le calcul par rapport à 365 jours impliquait que pendant ces quatre jours il n'avait pas fait beau. Certains élèves sont restés perplexes devant ce problème.

Au cours de cette première séquence nous avons pu observer que certains groupes n'étaient pas satisfaits par la présentation des données.

Pour l'étude du changement de temps le professeur a dû insister pour que l'on dénombre systématiquement chacune des neuf situations possibles : BB, BG, BM, GB, GM, MB, MG, MM. Les calculs des pourcentages ont alors à nouveau posé des problèmes.

Un groupe a même calculé le pourcentage de BB par rapport au nombre mois (?).

Notons aussi qu'aucun des groupes travaillant sur ce sujet n'a pu répondre à la question :

"Pouvez-vous prévoir la somme des nombres de BB, de BG et de BM, pour un mois donné ? Pour l'année ?"

SIGNALONS qu'en première A₃ A₅, beaucoup ont proposé de calculer le nombre moyen de B par mois. Un élève a alors fait cette remarque :

"Pour calculer le nombre moyen de jours beaux par mois il suffit de regarder les 6 premiers mois car théoriquement l'année doit être symétrique".

Cette affirmation n'est pas absurde du tout, mais la raison invoquée est manifestement fautive.

AU COURS de cette séquence nous avons noté que, si tout le monde a parlé de pourcentages, personne n'a pensé à la fréquence. Or, en Première A₃ A₄ et en Première A₄ II A₇, cette notion avait été rencontrée au début de l'année lors de l'analyse d'un relevé statistique du nombre de mulots et de campagnols suivant différents types de milieux. Il ne nous a pas paru indispensable d'insister car pour les élèves, les % étaient bien considérés comme des fréquences relatives à un effectif de 100, et dans les cas rencontrés les effectifs étaient suffisamment importants pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

AU FUR ET A MESURE de l'analyse du tableau de données, les élèves ont pris conscience de la nécessité de mieux organiser leur travail et de contrôler leurs résultats. Des mises au point intéressantes ont pu être faites au sujet des représentations graphiques.

DEUXIEME SEQUENCE

Pour cette séquence nous avons donné la consigne suivante :

“Vous avez analysé le tableau de l'année 73. Vous avez mis en évidence certains caractères. Nous vous proposons maintenant de reproduire un tableau ayant les mêmes caractéristiques à partir de tirage “au hasard”. En fait nous vous proposons de réaliser une “simulation de ce relevé météorologique”.

Un élève a proposé tout de suite de mettre une fois sur deux un jour de B. (En effet, il y a 50,96 % de B).

Très vite tous ont été d'accord pour respecter les pourcentages de B, G, M.

“Respecter les proportions de B, G et M peut être un premier critère. Nous verrons par la suite si nous ne pouvons pas perfectionner notre simulation”.

Au cours des discussions qui ont accompagné le début de ce travail nous avons pu noter les réflexions suivantes :

- ça va être au hasard donc cela ne sert à rien.
- pas tout-à-fait
- en respectant les proportions cela ne sera plus du hasard.

Il a fallu enfin préciser quels types de tirage nous pouvions réaliser. Un élève a parlé de pièce de monnaie.

Un autre groupe a proposé d'utiliser un dé tout d'abord en attribuant chaque type B, G et M à 2 faces du dé. Cela a suscité des réactions de la part de certains qui ont préféré les attributions suivantes : 1 face pour M, 2 pour G et 3 pour B, ce qui correspond aux pourcentages suivants :

B : 50 %		50,96 %
G : 33,33 %	au lieu de	37,39 %
M : 16,66 %		11,63 %

Cet exemple a permis à l'ensemble de mieux comprendre ce qu'allait être la simulation que nous demandions.

Les groupes ont ensuite choisi différents moyens puis ils ont réalisé effectivement une simulation.

Voici les différentes simulations proposées par les élèves :

- * Utilisation du lancement du dé : 3 faces pour B, 2 pour G et 1 pour M.
- * Tirage sans remise de 184 papiers marqués B, 135 marqués G et 42 marqués M.
- * Tirage avec remise.
(Pour éviter de fabriquer 361 papiers, deux groupes ont utilisé les % et ont tiré leurs papiers parmi cent seulement).
- * Utilisation d'un disque sur lequel ont été dessinés 3 secteurs de mesure angulaire respective 183° , 135° , 42° (il y avait 361 jours. Quelle chance !).

Les tirages ont été faits à l'aide d'un tourne-disque qui d'ailleurs n'a pas résisté à la deuxième simulation.

Nous avons aussi mis à la disposition de certains groupes des tables de nombres au hasard et trois calculatrices programmables HP 25, programmées pour donner des nombres de deux chiffres uniformément répartis entre 0 et 99. Les élèves ont utilisé les tables et les calculatrices suivant le même principe : "Ils tiraient" un nombre. Si ce nombre appartenait à l'intervalle $[0, 51[$ ils écrivaient B ; à l'intervalle $[51, 88[$ ils écrivaient G ; à l'intervalle $[88, 100[$ ils écrivaient M. Il a fallu intervenir pour bien préciser les bornes de l'intervalle.

Nous avons été heureusement surpris par le sérieux mis par tous les élèves à réaliser leurs simulations.

Il y avait 20 groupes utilisant 5 méthodes différentes ; aussi l'observation a-t-elle été très difficile ; les élèves se gênaient entre eux.

Certains ont été obligés de recommencer leur simulation entièrement.

On pourra trouver les résultats d'une simulation en annexe II.

L'utilisation des calculateurs programmables n'a pas posé de problème. Celle de la table de chiffres au hasard a nécessité plus d'explications préalables. Les élèves ne voyaient pas comment on pouvait l'utiliser pour obtenir des tirages de nombres inférieurs à 100.

Une difficulté rencontrée au cours de cette séquence a été de bien faire sentir aux élèves qu'il n'était pas raisonnable de considérer les simulations réalisées comme des prévisions. Or, cette idée de prévision vient naturellement à l'esprit dès qu'on parle de météorologie.

TROISIEME SEQUENCE

Lors de cette séquence nous avons proposé de comparer les différentes simulations avec la réalité.

Les élèves ont tout d'abord regardé combien ils avaient obtenu de B, G et M. Ils ont noté leurs résultats au tableau.

B	184	195	197	181	175	164	204	172	166	194	163
G	135	129	128	148	148	137	96	144	131	130	152
M	42	37	36	32	38	60	61	45	64	37	48

Il y a eu de nombreuses erreurs pour ce travail de dénombrement. La nécessité d'une vérification s'est imposée. Beaucoup de décomptes ont dû être repris avant que le total du nombre des B, G et M devienne 361.

La plupart des élèves ont été frappés par la "ressemblance" des nombres de B, G et M avec la réalité. En particulier le groupe qui avait chois de faire des *tirages sans remise* a été surpris de voir que des *tirages avec remise* respectaient à peu près les proportions.

Donc, en ce sens là, pour eux toutes les simulations étaient "réussies". Ils ont voulu ensuite voir si les résultats concordaient au niveau des mois.

Les résultats mensuels de quelques simulations ont été comparés.

		J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	
Beau	Réalité	12	9	21	14	15	18	17	15	19	15	20	9	
	Simulations	1	16	15	12	14	17	16	13	9	21	18	24	13
		2	19	18	16	18	16	17	21	19	16	15	11	18
		3	17	14	18	15	18	19	14	18	11	18	13	14
		4	15	12	15	12	15	16	21	14	9	12	10	17
Gris	Réalité	12	16	8	12	14	9	10	11	6	12	8	17	
	Simulations	1	13	13	15	9	11	11	13	15	6	9	6	9
		2	4	8	10	7	10	7	7	6	10	12	11	4
		3	8	10	12	10	11	5	14	11	12	9	13	14
		4	12	13	12	13	13	11	4	12	14	15	16	13
Mauvais	Réalité	7	3	2	4	2	3	4	1	5	4	2	5	
	Simulations	1	2	0	4	7	3	3	5	3	3	4	0	3
		2	9	2	5	5	6	6	3	2	4	4	8	9
		3	6	4	1	5	2	6	3	2	7	4	4	3
		4	4	3	4	5	3	3	8	1	7	4	4	1

Les différences sont apparues importantes à l'ensemble de la classe. Ils ont attribué aux phénomènes saisonniers la cause de ces grands écarts. Nous leur avons fait remarquer que les résultats des quatre simulations considérées n'étaient pas eux aussi très réguliers chaque mois.

Un groupe a alors calculé la moyenne des B, G et M obtenus avec l'ensemble de toutes les simulations :

B : 181,1

G : 134,3

M : 42,4

Ils ont été d'accord pour dire que "plus on peut faire de tirages, mieux c'est". Ainsi un des buts recherchés était atteint, à savoir : faire prendre conscience aux élèves de la loi des grands nombres.

Afin de compléter l'analyse des données par les simulations, nous avons proposé de reprendre le décompte des diverses situations pour deux jours consécutifs.

Ces dénombrements ont pris beaucoup de temps. Il était difficile d'éviter les erreurs. Les élèves ont pourtant essayé de mieux s'organiser

Voici les résultats obtenus :

	REALITE	DIFFERENTES SIMULATIONS							
BB	127	91	81	72	93	94	88	126	109
BG	44	69	65	56	63	62	77	50	64
BM	11	18	21	28	27	24	21	13	27
GB	50	66	64	60	65	58	76	47	64
GG	64	59	67	43	42	65	46	54	51
GM	21	18	16	22	21	11	14	27	13
MB	6	22	21	29	25	22	21	18	17
MG	26	12	15	20	18	12	14	17	11
MM	10	4	9	9	5	6	2	7	3

Certains ont calculé puis comparé les pourcentages obtenus. Ces résultats ont permis de mettre en évidence qu'il n'y avait pas une bonne concordance entre la réalité et la simulation.

Le professeur a proposé de faire une autre simulation qui tiendrait compte des différentes proportions des BB, BG, ... Il s'agissait tout d'abord de déterminer le temps du premier jour. Puis, en fonction de cela, tirer le temps du lendemain et ainsi de suite ...

Cette nouvelle simulation n'a été entreprise que par quelques groupes. (8 groupes environ, soit à peu près le tiers de la classe). Les autres groupes ont mis de l'ordre dans leurs résultats ainsi que dans les remarques qu'ils avaient notées.

Remarque : Lorsque nous avons préparé cette expérimentation, nous avons pensé à trois types de simulation :

Premier type : en tenant compte des fréquences de B, G et M.

Deuxième type : en tenant compte du temps de la veille.

Troisième type : en tenant compte des longueurs des différentes séquences de B, G ou M. (Un premier tirage aurait donné la nature de la séquence, un deuxième tirage aurait donné la longueur).

Etant donné la lassitude manifestée par les élèves lors des dernières séances, nous avons renoncé à aborder ce troisième type de simulation.

BILAN

Distinguons deux aspects :

En ce qui concerne l'animation de la classe, nous avons noté trois différences essentielles avec ce qui s'est passé le reste de l'année :

— les élèves qui ont été les plus acharnés sont ceux qui d'habitude refusent de participer ;

— par contre certains élèves qui suivaient bien avant cette expérience l'ont prise de haut et ont considéré qu'ils perdaient leur temps (ce qui n'est pas notre avis bien sûr !).

— mais pratiquement toute la classe a travaillé, ce qui était loin d'être le cas avant.

En ce qui concerne les acquisitions faites par les élèves :

— nous avons fait des mises au point sur des notions qui étaient vagues (et il est fort possible qu'elles le soient à nouveau maintenant) : moyenne, pourcentage, dénombrement...;

— les élèves ont touché du doigt les notions de phénomènes aléatoires, de fréquences, de probabilité et ont eu un aperçu de la loi des grands nombres ;

— de plus, ils se sont posé des problèmes sur les représentations graphiques ;

— en tous cas cette expérience a permis aux élèves de prendre de nombreuses initiatives (bonnes ou mauvaises peu importe).

Quand nous referons un travail de ce genre (et nous en referons), nous essaierons de choisir un sujet plus facile à "décortiquer" que celui de la météorologie. D'autre part, il faudra absolument que le sujet choisi se prête à un déroulement plus court dans l'année, pour éviter la lassitude des élèves.

Notons encore que les simulations faites "à la main" prennent énormément de temps mais qu'elles nous paraissent tout-à-fait essentielles, au moins pour une première approche.

*

* *

Annexe I

1973	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
1	G	G	B	B	G	R	B	B	B	M	B	G
2	B	G	G	B	B	B	B	G	B	M	B	B
3	G	G	B	G	R	B	B	G	B	G	G	B
4	G	B	B	B	B	B	B	G	B	B	G	G
5	G	B	B	B	G	G	B	B	B	B	G	G
6	B	B	B	B	B	M	B	B	B	G	M	G
7	M	B	G	G	M	G	B	G	B	G	G	G
8	M	B	B	G	G	G	G	B	B	G	G	M
9	M	G	B	M	G	B	B	B	B	B	B	G
10	G	G	B	M	G	B	B		B	B	B	B
11	B	G	B	B	G	B	B		B	B	B	B
12	B	G	B	G	B	B	B		B	B	B	G
13	B	M	G	G	B	G	B		B	M	B	B
14	G	B	G	B	B	G	G	B	B	G	G	M
15	B	G	B	B	B	B	M	M	G	G	G	G
16	G	G	B	B	B	B	G	B	M	M	B	B
17	M	G	B	B	G	B	M	B	M	G	B	G
18	M	G	B	B	G	B	G	B	G	G	B	B
19	G	G	B	M	G	B	G	B	B	B	B	G
20	G	G	B	G	G	G	B	B	G	B	G	G
21	M	B	B	B	G	G	G	B	M	G	B	M
22	G	G	B	G	G	M	G	B	B	G	B	G
23	B	G	B	B	B	M	G	G	M	G	B	M
24	B	M	B	G	B	G	M	G	G	B	B	G
25	B	M	M	G	B	B	M	G	G	B	B	M
26	B	G	M	B	B	B	G	B	B	B	B	G
27	M	B	G	G	G	G	G	B	B	B	B	G
28	B	B	B	M	M	B	B	G	B	B	B	G
29	B		G	G	G	B	B	G	M	B	M	G
30	G		G	G	B	B	B	G	G	G	B	B
31	G		G		B		B	G		B		B

Annexe 2**Tableau de comparaison réalité - simulation**

	BEAU	GRIS	MAUVAIS
Janvier	16 12	13 12	2 7
Février	15 9	13 16	0 3
Mars	12 21	15 8	4 2
Avril	14 14	9 12	7 4
Mai	17 15	11 14	3 2
Juin	16 18	11 9	3 3
Juil	13 17	13 10	5 4
Août	11 15	12 11	4 1
Septembre	21 19	6 6	3 5
Octobre	19 15	9 12	3 4
Novembre	22 20	7 8	1 2
Décembre	20 9	9 17	2 5