Bulletin de l'APMEP n°316 - Décembre 1978

6

LES PROBLÈMES DE L'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 57 (LEMAIRE, Douai)

Déterminer les triangle ABC du plan affine euclidien tel que la bissectrice intérieure en A, la hauteur issue de B et la médiane issue de C ont des longueurs égales.

Enoncé n° 58 (GAUTHIER, Perpignan)

Pour quelles valeurs du naturel non nul n le nombre $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ est-il décimal ?

Enoncé n° 59 (GIBERT, Le Puy)

Soit n un naturel non nul. On dispose de n^3 cubes de 1 cm d'arête. Comment doit-on peindre les faces de ces cubes pour pouvoir construire le maximum de cubes de n cm d'arête et de surface unicolore, de couleurs différentes ?

SOLUTIONS

Enoncé n° 54 (CUCULIERE, IREM Paris-Nord)

On donne, comme exemple d'algèbre de Boole, l'ensemble des parties d'un ensemble. Cet ensemble des parties est fini ou infini non-dénombrable. Existe-t-il donc une algèbre de Boole infinie dénombrable ?

Solution : FRIANT (Angers)

Soit $E = \{ X \in \mathcal{P}(N) \ ; |X| \in N \ \text{ou} \ |\overline{X}| \in N \}$

E est donc l'ensemble des parties de N soit finies, soit de complémentaire fini *.

E est une algèbre de Boole infinie dénombrable.

1°) *E est une algèbre de Boole*, plus précisément c'est un sous-anneau de Boole de $\mathcal{P}$ (N) car

- $\phi \in E$
- si $X \in E$ alors $\overline{X} \in E$

* Ici, $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X et $|X|$ le cardinal de X.

• et si $X, Y \in E$ alors $X \cup Y \in E$; en effet :

— si X et Y sont finis, il en est de même de $X \cup Y$;

— si $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont finis, $\overline{X} \cup \overline{Y}$ aussi ;

— enfin, si $\overline{X}$ et Y sont finis, alors $\overline{\overline{X} \cup Y} = X \cap \overline{Y}$ est fini car inclus dans $\overline{Y}$.

2°) *E est infinie dénombrable*

car $E = E_1 \cup E_2$ est l'union de deux parties dénombrables :

$$E_1 = \{ X \in \mathcal{P}(N) \; ; \; |X| \in N \}$$
$$E_2 = \{ X \in \mathcal{P}(N) \; ; \; |\overline{X}| \in N \}.$$

E_1 est en bijection avec N_+ par l'application φ définie par

$$\varphi(X) = \sum_{x \in X} 2^x, \text{ ce qui a un sens car } X \text{ est fini.}$$

φ est bijective car tout naturel non nul admet un développement binaire unique. E_2 est en bijection avec E_1 par le passage au complémentaire.

Autres solutions : CARREGA (Lyon), CUCULIERE (Paris), DUMEIGE (Amiens), GAGNAIRE (Lyon), LANFRANCHI (Fontaine), LAILLET (Châlon s/ Saône), et PONASSE (Yaoundé).

Remarque : Certains utilisent l'écriture dyadique. Certains généralisent le problème,: Tribus, Algèbre de Boole de cardinal infini quelconque ...

Enoncé n° 55 (WARUSFEL, Paris)

Existe-t-il un corps dont le groupe multiplicatif est monogène infini ?

Solution : PONASSE (Lyon)

Supposons qu'il existe un corps K dont le groupe multiplicatif K^* est monogène infini ; appelons a un générateur de K^* ; d'après la théorie élémentaire des groupes :

$$K^* = \{ a^n \, / n \in Z \}$$

et l'application qui à $n \in Z$ fait correspondre a^n est bijective (car K^* est infini).

L'élément $-a$ appartient à K^*, donc il existe n tel que $-a = a^n$, d'où

$$a^2 = a^{2n}, \text{ donc } n = 1, \text{ donc } -a = a .$$

Le corps K est de caractéristique 2, tout élément est son propre opposé. Appelons e l'élément unité de K $(e = a^0)$; si $n \neq 0$:

$$a^n + e \neq 0 ,$$

donc il existe $\alpha(n) \in Z^*$ tel que

$$a^n + e = a^{\alpha(n)}.$$

On définit ainsi une application de Z^* dans Z^*. On a les trois propriétés suivantes :

1) $a^{\alpha(n)} + e = a^n$, donc $\alpha(\alpha(n)) = n$

2) $e + a^{-n} = a^{\alpha(n)-n}$, donc $\alpha(-n) = \alpha(n) - n$

3) $(a^n + e)^2 = a^{2n} + e = a^{2\alpha(n)}$, donc $\alpha(2n) = 2\alpha(n)$.

Posons $u = \alpha(1)$, donc $\alpha(u) = 1$.

On a : $\alpha(-1) = \alpha(1) - 1 = u - 1$, donc $\alpha(u-1) = -1$.

- Si u est pair : $u = 2v$, $\alpha(u) = 1 = 2\,\alpha(v)$: contradiction.
- Si u est impair : $u = 2v + 1$, $\alpha(u-1) = -1 = 2\,\alpha(v)$: contradiction.

Donc il n'existe aucun corps répondant à la question.

Autres solutions : BAUVAL (Versailles), BOUVIER (Pierre-Bénite), CARREGA (Lyon), CUCULIERE (Paris), DUMEIGE (Amiens) et LAILLET (Châlon s/Saône).

Enoncé n° 56 (IREM de Clermont-Ferrand)

Peut-on construire un polyèdre dont toutes les faces sont des hexagones ?

Dans l'affirmative, quel est le nombre minimum de faces ?

Commentaires : Un problème des Olympiades demandait de démontrer que dans tout polyèdre convexe il existe deux faces ayant le même nombre de côtés.

En utilisant la formule d'Euler, on démontre de façon plus précise que $3t + 2q + p \geqslant 12$ où t, q et p désignent le nombre de triangles, de quadrilatères et de pentagones.

Ce résultat m'a suggéré de demander au groupe "Maquettes" de l'IREM de Clermont-Ferrand de construire un polyèdre ayant toutes ses faces hexagonales.

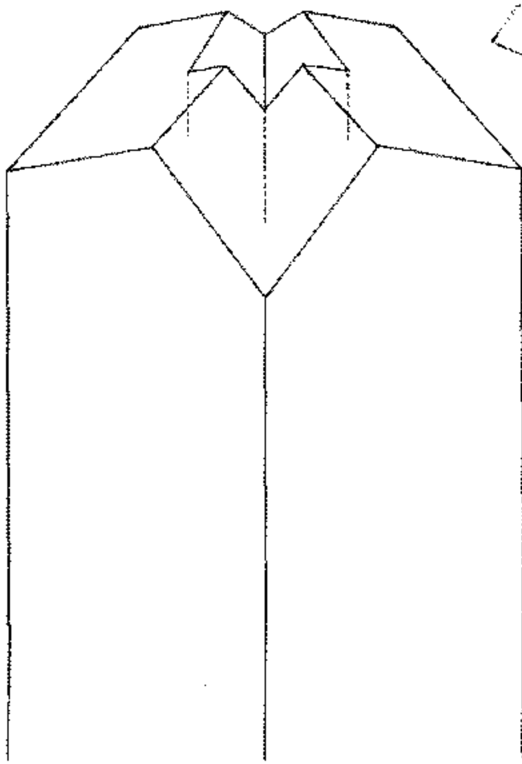
De nombreux polyèdres ont été construits. Parmi les plus intéressants :

1) Un polyèdre ayant pour faces des hexagones convexes : on relie des hexagones réguliers placés aux sommets d'un tétraèdre régulier par des prismes à trois faces.

2) Un polyèdre à 8 faces (plus petit nombre trouvé) : on entaille un tétraèdre régulier selon quatre plans, chaque plan étant parallèle à une des faces.

3) Le premier découvert : on taille un gros crayon "carré" dont la mine est "carrée" par les deux bouts (quatre coups de canif à chaque bout) et on enlève la mine !

La figure représente un bout du crayon.



Solution : G. BOUEZ (Paris).

Les polyèdres décrits ci-après sont des polyèdres "à trou" à $4p$ faces hexagonales ($p \geqslant 3$).

Chacun d'eux est formé :

— d'une "ceinture extérieure" d'hexagones

$$\left\{\begin{array}{cccccc} A_1 & M_1 & A_2 & A'_2 & M'_1 & A'_1 \\ A_2 & M_2 & A_3 & A'_3 & M'_2 & A'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_p & M_p & A_1 & A'_1 & M'_p & A'_p \end{array}\right.$$

et d'une "ceinture intérieure" d'hexagones

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_1 & m_1 & a_2 & a'_2 & m'_1 & a'_1 \\ a_2 & m_2 & a_3 & a'_3 & m'_2 & a'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_p & m_p & a_1 & a'_1 & m'_p & a'_p \end{array}\right.$$

(avec $A_1\ A'_1$, $A_2\ A'_2$, ..., $A_p\ A'_p$, a_1, a'_1, $a_2\ a'_2$, ..., $a_p\ a'_p$ parallèles) ;

— de deux "chaînes" d'hexagones "de liaison"

$$\left\{\begin{array}{cccccc} M_1 & A_2 & M_2 & m_2 & a_2 & m_1 \\ M_2 & A_3 & M_3 & m_3 & a_3 & m_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_p & A_1 & M_1 & m_1 & a_1 & m_p \end{array}\right.$$

$$\text{et} \left\{\begin{array}{cccccc} M'_1 & A'_2 & M'_2 & m'_2 & a'_2 & m'_1 \\ M'_2 & A'_3 & M'_3 & m'_3 & a'_3 & m'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M'_p & A'_1 & M'_1 & m'_1 & a'_1 & m'_p \end{array}\right.$$

joignant les deux "ceintures".

Les sommets A_1, A_2, ..., A_p sont les sommets d'un polygone P qu'on peut supposer régulier ; de même, les sommets A'_1, A'_2, ..., A'_p sont les sommets d'un polygone régulier P', de même axe que P.

Les sommets M_1, M_2, ..., M_p (resp. M'_1, M'_2, ..., M'_p) sont tels que les plans $M_1\ A_2\ M_2$, $M_2\ A_3\ M_3$, ..., $M_p\ A_1\ M_1$ (resp. $M'_1\ A'_2\ M'_2$, $M'_2\ A'_3\ M'_3$, ..., $M'_p\ A'_1\ M'_1$) concourent en un point K (resp. K') de l'axe des polygones P et P'.

Les sommets a_1, a_2, ..., a_p, m_1, m_2, ..., m_p peuvent être pris homothétiques des sommets A_1, A_2, ..., A_p, M_1, M_2, ... M_p dans une homothétie de centre K et de rapport k inférieur à 1.

Les sommets a'_1, a'_2, ..., a'_p, m'_1, m'_2, ..., m'_p sont alors homothétiques des sommets A'_1, A'_2, ..., A'_p, M'_1, M'_2, ..., M'_p dans l'homothétie de centre K' et de rapport k.

Le cas $n = 4$ correspond au 3) du commentaire et le cas $n = 3$ à l'envoi de CRITON (Noisy-le-Sec).

Les autres solutions reçues utilisent la formule d'Euler et concluent à l'impossibilité.