

1. Sens topologiques.

Le substantif *continu* a désigné de façon générale les courbes, surfaces, ... continues, c'est-à-dire d'un seul tenant.

On emploie parfois aujourd'hui ce terme pour désigner tout espace topologique compact et connexe.

2. Emplois du mot en théorie des ensembles.

2.1. Les continus de $\mathbb{R}^n$ autres que les singletons sont tous équipotents à $\mathbb{R}$; ceci a conduit à appeler *puissance du continu* leur cardinal commun, cardinal de $\mathbb{R}$ et de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $2^{\aleph_0}$ [CARDINAL]. On dit qu'un ensemble a la *puissance du continu* pour exprimer qu'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{R}$.

2.2. *Hypothèse du continu*. La puissance du continu $2^{\aleph_0}$ est un cardinal infini strictement supérieur à $\aleph_0$; l'hypothèse du continu, formulée par Cantor en 1882, est l'hypothèse selon laquelle il n'existe aucun cardinal strictement compris entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$, ce qu'on peut exprimer en écrivant $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ou encore en disant que tout ensemble non dénombrable contient au moins une partie qui peut être mise en bijection avec $\mathbb{R}$.

L'hypothèse du continu généralisée est l'hypothèse selon laquelle, pour tout cardinal infini a , il n'existe aucun cardinal strictement compris entre a et 2^a .

Kurt Gödel et Paul J. Cohen ont démontré, respectivement en 1940 et 1962, la consistance relative de l'hypothèse du continu généralisée et celle de sa négation, dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fränkel, c'est-à-dire les propositions selon lesquelles, si cette théorie est non-contradictoire, on ne la rend pas contradictoire en lui adjoignant l'une ou l'autre (exclusivement !) de ces deux hypothèses.

Le sens fondamental est : *d'un seul tenant* ; le sens math. du substantif — espace topologique compact et connexe — s'y rattache visiblement.

Toutefois le sens math. qui est de loin le plus usuel est celui qu'a l'adjectif dans "fonction continue" ; malheureusement l'analogie entre cette notion et celle d'évolution continue dans la langue courante ne peut guère fournir qu'une justification historique ; elle comporte en effet beaucoup plus de risques que d'avantages pour l'analyse du concept actuel de continuité.

1. Fonctions continues.

1.1. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.1.1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un point de son ensemble de définition A . On dit que f est continue au point a si, pour tout réel strictement positif ϵ , il existe au moins un réel strictement positif η tel que, pour tout x de A vérifiant $|x - a| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.

On remarque que f est continue en a si et seulement si elle admet en a une limite (laquelle ne peut être que $f(a)$), du moins si l'on adopte la définition donnée en [LIMITE, 1.2.]. En revanche, si l'on adopte la définition signalée en [LIMITE, 1.3.2.], f est continue en a si et seulement si elle admet $f(a)$ pour limite en a .

On démontre que la notion de continuité en un point est une notion locale, c'est-à-dire que la fonction f peut être remplacée par sa restriction à $A \cap V$, où V est un intervalle ouvert quelconque contenant a .

1.1.2. On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) au point a , lorsque sa restriction à $A \cap [a ; +\infty[$ (resp. $A \cap]-\infty ; a]$) est continue en a .

On montre que f est continue à droite en a si et seulement si elle admet $f(a)$ pour limite à droite en a [LIMITE, 1.3.3.] et que f est continue en a si et seulement si elle est à la fois continue à droite et à gauche en a .

1.1.3. On dit qu'une fonction est *partout continue*, ou simplement qu'elle est *continue*, si elle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Exemple : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue.

1.1.4. Soit P une partie de l'ensemble de définition d'une fonction f . On dit que f est *continue sur P* si sa restriction à P est continue.

Remarque : Une fonction peut être continue sur une partie P sans être continue en tout point de P .

Exemples : — La fonction partie entière est continue sur $[0;1[$ sans pour autant être continue en 0 ; elle y est seulement continue à droite.

— La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{Q}}$, est continue sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, mais n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

1.1.5. La fonction f est dite *uniformément continue* sur une partie P de son ensemble de définition si, pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un réel strictement positif η tel que, pour tous x et x' de P vérifiant $|x' - x| \leq \eta$, on ait $|f(x') - f(x)| \leq \epsilon$.

Si φ est le module de continuité [MODULE, 4] de f sur P , on remarque que f est uniformément continue sur P si et seulement si $\lim_0 \varphi = 0$.

Pour que f soit uniformément continue sur P , il est nécessaire qu'elle soit continue sur P , mais cela n'est pas suffisant ; les deux notions diffèrent par l'interversion, dans la définition, d'une quantification universelle et d'une quantification existentielle.

Exemple : La fonction tangente est continue sur $] -\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2} [$ mais elle n'est pas uniformément continue sur cet intervalle.

1.1.6. On dit que la fonction f est *semi-continue inférieurement* (en abrégé *sci*), resp. *semi-continue supérieurement* (*scs*), au point a si, pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un réel strictement positif η tel que, pour tout x vérifiant $|x - a| \leq \eta$, $f(x)$ est supérieur à $f(a) - \epsilon$ (resp. inférieur à $f(a) + \epsilon$).

Exemple : La fonction $x \mapsto x + \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ est semi-continue inférieurement en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et semi-continue supérieurement en tout point de $\mathbb{Q}$.

On remarque que la fonction f est semi-continue inférieurement (resp. semi-continue supérieurement) au point a si et seulement si elle admet $f(a)$ pour limite inférieure (resp. supérieure) au point a [LIMITE, 1.6.2.].

On dit que f est sci (resp. scs) sur la partie P de son ensemble de définition si la restriction de f à P est sci (resp. scs) en tout point de P .

1.1.7. Les conditions d'emploi du mot "discontinu" paraissent moins nettes. Si une fonction est continue en tous les points d'un intervalle sauf un, tout le monde s'accorde à dire qu'elle est *discontinue en ce point* ; si de plus elle admet en ce point une limite à droite et une limite à gauche, l'excès de la première sur la seconde s'appelle le *saut*. Certains réservent le terme "discontinu" au cas ci-dessus ; d'autres lui donnent le sens plus large de non-continu.

1.2. Généralisations diverses.

Chacun des cas ci-dessous englobe ceux qui le précèdent.

1.2.1. Fonctions continues d'un espace métrique dans un autre.

Soit f une application d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d') . Soit a un point de E . On dit que f est *continue en a* si :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+) (\exists \eta \in \mathbb{R}_*^+) (\forall x \in E) (d(x, a) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) \leq \epsilon).$$

On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de E . Si P est une partie de E , on dit que f est *continue sur P* si sa restriction à P est continue en tout point de P , celui-ci étant muni de la distance induite par d .

On dit que f est *uniformément continue* sur E si :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+) (\exists \eta \in \mathbb{R}_*^+) (\forall x, x' \in E) (d(x, x') \leq \eta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) \leq \epsilon).$$

Les remarques générales faites dans [1.1.] à propos du lien entre continuité et limite en un point, et à propos du lien entre continuité en tout point et continuité uniforme, s'étendent ici sans difficulté.

1.2.2. Fonctions continues d'un espace topologique dans un autre.

Soient $(E, \mathcal{O})$ et $(E', \mathcal{O}')$ des espaces topologiques et f une application de E dans E' .

Soit a un élément de E . On dit que f est *continue au point a* si, pour tout voisinage V' de $f(a)$ dans $(E', \mathcal{O}')$, il existe un voisinage V de a dans $(E, \mathcal{O})$ tel que $\overrightarrow{f}(V) \subset V'$. On constate que f est continue au point a si et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(a)$ dans $(E', \mathcal{O}')$ est un voisinage de a dans $(E, \mathcal{O})$.

On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de E . On démontre que f est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de $(E', \mathcal{O}')$ est un ouvert de $(E, \mathcal{O})$.

Quand f est continue et bijective, f^{-1} n'est pas nécessairement continue ; quand f est bijective et continue, ainsi que f^{-1} , on dit que f est *bicontinue*, ou que c'est un *homéomorphisme* de $(E, \mathcal{O})$ dans $(E', \mathcal{O}')$.

Exemples : 1) L'application $x \mapsto x - E\left(\frac{x}{2}\right)$ de $[0;1[\cup [2;3]$ sur $[0;2]$ est une bijection continue mais son application réciproque n'est pas continue.

2) L'application $x \mapsto \operatorname{tg} x$ est un homéomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

2. Autres sens de l'adjectif "continu" et de ses dérivés

2.1. Fonctions absolument continues : On dit qu'une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est *absolument continue* s'il existe au moins une fonction f telle que, pour tout réel x , on ait :
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$
 Si F est absolument continue, toute fonction f remplissant la condition ci-dessus sera dite *densité* de F . Deux densités d'une même fonction absolument continue coïncident presque partout.

Une application absolument continue est nécessairement une application continue.

En calcul des probabilités, on dit d'une variable aléatoire X sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles qu'elle est absolument continue (relativement à une probabilité p) si sa fonction de répartition $x \mapsto p(\{\omega / X(\omega) \leq x\})$ est absolument continue.

2.2. *Fonctions continûment différentiables.* Une application f d'une partie ouverte A d'un espace normé E dans un espace normé F est dite *continûment différentiable à l'ordre n* , ou encore est dite *de classe C^n* , si elle possède une différentielle n -ième continue sur A [DIFFÉRENTIELLE]. On omet souvent de préciser l'ordre lorsqu'il s'agit de 1. On dit souvent qu'une application est *de classe C^0* pour dire qu'elle est continue, ou qu'elle est *de classe C^∞* pour dire qu'elle est indéfiniment différentiable.

2.3. *Ensemble de fonctions équicontinu.* Un ensemble H d'applications d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ dans un espace métrique (F, d') est dit *équicontinu au point x_0* si, pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un voisinage V de x_0 dans E tel que, pour toute fonction f élément de H et tout point x de V , on ait $d'(f(x_0), f(x)) \leq \epsilon$.

On dit que H est équicontinu s'il est équicontinu en chaque point de E .

Dans le cas où la topologie $\mathcal{O}$ de E est associée à une distance, on peut définir l'équicontinuité uniforme. Ainsi, un ensemble H d'applications d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, d') est dit *uniformément équicontinu* ou parfois *également continu* si, pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un réel strictement positif η tel que, pour toute fonction f élément de H et tous points x et x' de E vérifiant $d(x, x') \leq \eta$, on ait $d'(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.

2.4. *Espace topologique totalement discontinu.* Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit *totalement discontinu* si aucune partie de E ayant au moins deux points n'est connexe [CONTINU, n. m.]. C'est le cas par exemple de $\mathbb{Q}$ muni de sa topologie habituelle.

On peut préférer pour désigner cette notion l'anglicisme "totalement disconnecté", plus explicite.

2.5. On rencontre encore l'adjectif "continu" dans des sens divers, parfois désuets, voire abusifs, en général liés plus ou moins à l'un des sens du substantif : *ordre continu*, par exemple.

2.6. *Fraction continue*. [FRACTION, 4]