

commutatif, adj.
commutativité, n. f.

1977 - 1/1

commutatif

Ces deux mots et les mots apparentés (v. *commuter*), n'ont que des sens spécialisés, en droit, électrotechnique et mathématique ; ils se rattachent au sens fondamental de *changement*, et, plus précisément, d'*échange*.

1.1. On sait qu'une loi interne dans un ensemble E , notée par exemple $*$, associe à tout couple (a, b) d'éléments de E un élément de E , composé de a et b (dans cet ordre), noté $a * b$. Or $b * a$ existe également, mais est en général différent de $a * b$ comme on le constate élémentairement, par exemple avec la soustraction dans $\mathbb{Z}$, la division dans $\mathbb{Q}_*$, l'exponentiation définie dans $\mathbb{R}_*^+$ par $a * b = a^b$, la composition des rotations dans l'espace euclidien de dimension 3, etc.

Définition. Dire qu'une loi interne dans E , notée $*$, est *commutative* signifie que, pour tous éléments a, b de E ,

$$a * b = b * a.$$

Exemples : L'addition, la multiplication dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont commutatives ; de même la réunion, l'intersection, la différence symétrique dans l'ensemble des parties d'un ensemble, la composition des translations, etc.

Remarque 1. L'habitude est bien établie de n'employer la notation additive $+$ que pour des lois commutatives ; il existe cependant quelques exceptions (notamment pour les ordinaux).

Remarque 2. La commutativité est exigée pour la première loi des anneaux (et corps), ainsi que pour "l'addition vectorielle" dans les espaces vectoriels.

1.2. Il n'y a pas d'inconvénient à donner le même qualificatif

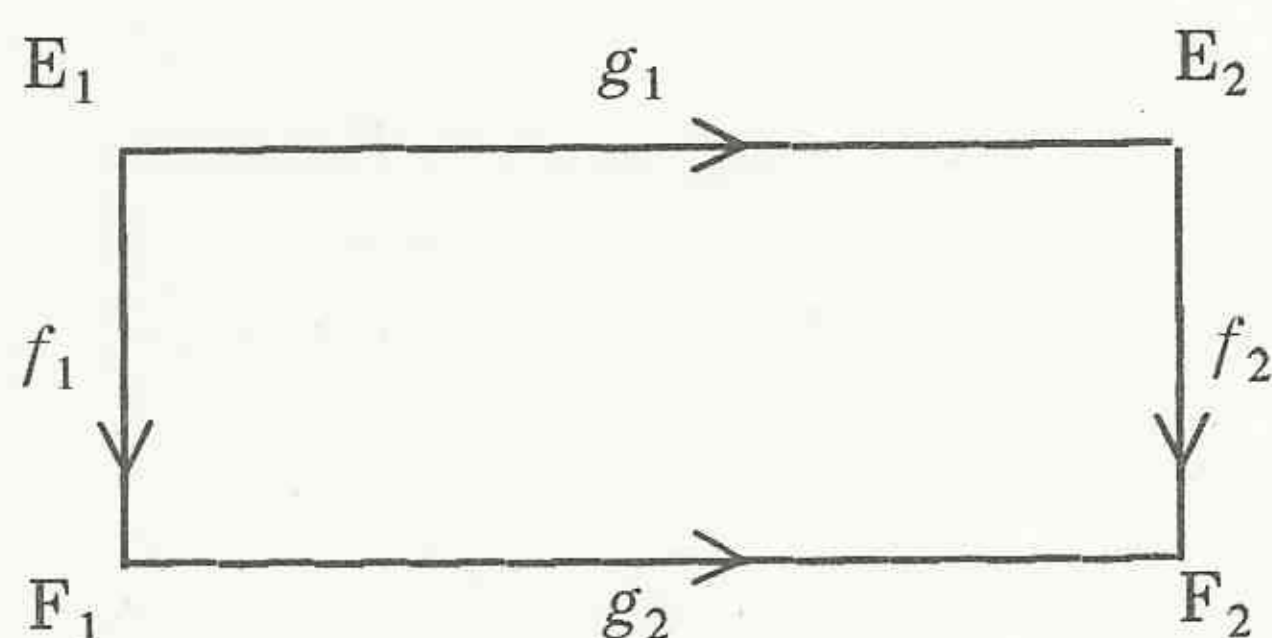
. soit à des lois non internes : par exemple le produit scalaire ;

. soit à des opérations qui ne seraient pas partout définies (sous réserve qu'elles le soient toujours simultanément pour (a,b) et (b,a) et que les composés soient égaux) : par exemple la demi-somme dans $\mathbb{Z}$;

. soit à des processus de type analogue ne portant pas sur des ensembles ; par exemple l'addition et la multiplication des cardinaux ;

. voire même à un processus faisant intervenir des composants différents ; c'est le cas de ce qu'on appelle *diagrammes* : si E_1, E_2, F_1, F_2 sont quatre ensembles, f_1 (resp. f_2) une application de E_1 vers F_1 (resp. de E_2 vers F_2), et g_1 (resp. g_2) une application de E_1 vers E_2 (resp. de F_1 vers F_2), dire que le diagramme ci-dessous est commutatif signifie que

$$g_2 \circ f_1 = f_2 \circ g_1 .$$



1.3. Par extension, on applique dans certains cas ce qualificatif à des structures munies de lois commutatives ; ainsi :

. si la loi d'un groupe est commutative, le groupe lui-même est dit commutatif (ou aussi : *abélien*) ;

. si la seconde loi (multiplication) d'un anneau (ou corps) est commutative, l'anneau (ou corps) lui-même est dit commutatif ;

. si la multiplication interne d'une algèbre est commutative, l'algèbre elle-même est dite commutative.