

Etym. : néologisme employé par les linguistes et les mathématiciens, formé sur la racine grecque $\mu\omicron\nu\omicron\varsigma$ (seul).

1.1. Définitions générales.

On appelle *monoïde* tout ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre.

Un abus de langage courant consiste à noter un monoïde par la même lettre que l'ensemble sous-jacent, bien que la connaissance de celui-ci ne suffise pas à caractériser le monoïde lui-même.

Un *morphisme de monoïdes* est une application d'un monoïde E dans un monoïde E' qui est un morphisme pour leurs lois et qui applique l'élément neutre de E sur celui de E' .

Dans un monoïde E , pour tout élément a et pour tout naturel n , on définit le *n -ième itéré* de a comme l'image de n par l'unique morphisme du monoïde $(\mathbb{N}, +)$ dans E qui envoie 1 sur a . Cet itéré se note souvent a^n , ou na si la loi de E est notée $+$.

1.2. Monoïdes particuliers.

Un monoïde dont la loi est commutative (resp. simplifiable) est dit *commutatif* (resp. *régulier*).

Un monoïde dont tout élément est symétrisable est un groupe [GROUPE].

On dit qu'un monoïde E est *libre* lorsqu'il contient une partie A *génératrice et libre*, c'est-à-dire telle que chaque élément de E soit le composé d'une seule suite finie d'éléments de A .

En particulier, à tout ensemble X , on associe le *monoïde libre engendré par X* , noté $M(X)$: l'ensemble sous-jacent à $M(X)$ est l'ensemble des suites finies d'éléments de X , y compris la suite vide ϕ ; la loi de $M(X)$ est la *concaténation*, c'est-à-dire la loi qui à tout couple $((x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_q))$ de suites associe la suite $(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$ appelée leur *concaténée*.

1.3. Sous-monoïdes.

E , muni de la loi $*$, étant un monoïde, une partie de E en est un *sous-monoïde* si elle est stable pour $*$ et possède l'élément neutre de E .

En particulier, dans tout monoïde, l'ensemble des éléments symétrisables est un sous-monoïde qui, muni de la loi induite, est un groupe.

Remarquons qu'une partie stable peut être un monoïde, ou même un groupe, munie de la loi induite, sans être un sous-monoïde.

Exemples : Dans le monoïde $(\mathbb{Z} / 6 \mathbb{Z} ; \times)$, la partie stable $\{\overset{\circ}{0} ; \overset{\circ}{3}\}$ est un monoïde pour la loi induite par $\times$ sans être un sous-monoïde de $(\mathbb{Z} / 6 \mathbb{Z} ; \times)$; il en est de même de $\{\overset{\circ}{3}\}$ et de $\{\overset{\circ}{2} ; \overset{\circ}{4}\}$ qui, de plus, sont des groupes pour la loi induite par $\times$; par contre, $\{\overset{\circ}{0} ; \overset{\circ}{1} ; \overset{\circ}{2} ; \overset{\circ}{4}\}$ est un sous-monoïde, ainsi que $\{\overset{\circ}{1} ; \overset{\circ}{5}\}$, ce dernier étant un groupe.